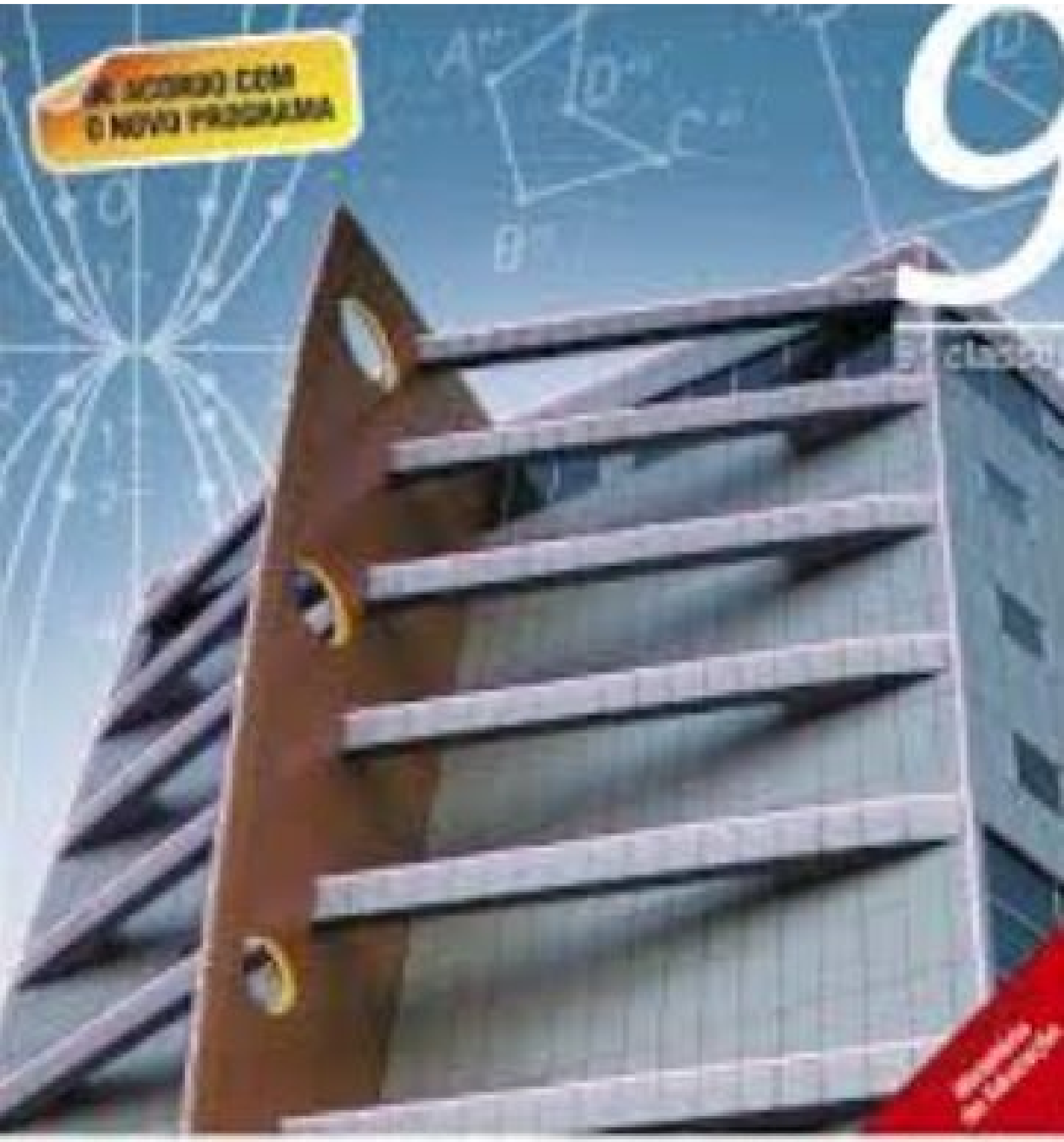


Hellen Lengyk / Neto João Chuquela

Matemática

PLURAL EDITORES

LIVRO DO ALUNO

Versão atualizada de acordo com o novo programa

9.ª classe

Heitor Langa
Neto João Chuquela

Matemática

PLURAL EDITORES
GRUPO PORTO EDITORA

Visão geral dos conteúdos de Matemática do 9.º ano

1.ª Unidade: Números reais e radiciação
- Números racionais
- Números reais
- Radiciação

2.ª Unidade: Inequações lineares e sistemas de inequações lineares com uma variável
- Intervalos reais
- Inequações lineares com uma variável
- Sistemas de inequações lineares com uma variável

3.ª Unidade: Monómios e polinómios
- Monómios
- Polinómios

4.ª Unidade: Equação quadrática
- Equação quadrática

5.ª Unidade: Função quadrática
- Função quadrática

6.ª Unidade: Quadriláteros
- Quadriláteros

7.ª Unidade: Noções básicas de Estatística
- Estatística
- Recolha, organização e apresentação de dados estatísticos
- Medidas de tendência central

8.ª Unidade: Semelhança de triângulos
- Homotetias
- Razões e proporções
- Semelhança de triângulos

9.ª Unidade: Áreas e volumes de sólidos geométricos
- Poliedros
- Prismas
- Pirâmides
- Sólidos de revolução

ISBN 978 989 611 145 9

APRESENTAÇÃO

A Matemática é uma disciplina fundamental não só para elevar o nível científico dos alunos, mas também porque é uma "ferramenta" indispensável na formação técnica dos alunos.

Este manual foi elaborado segundo o Programa de Matemática para a 9.ª classe aprovado pelo MEC. Um dos objectivos deste livro é ilustrar e demonstrar a aplicação de cada unidade na prática do quotidiano e foi estruturado de modo a promover a autonomia do aluno no seu estudo. Consequentemente, o livro apresenta vários exercícios ao longo de cada unidade temática e termina com uma avaliação formativa para o aluno conferir se assimilou a matéria essencial, aferir o grau de desenvolvimento do seu estudo e, também, como preparação para a avaliação escrita.

No fim do livro são disponibilizadas as soluções de todos os exercícios que servem para o aluno verificar a exactidão dos seus resultados. No caso do aluno sentir dificuldades ao resolver determinado exercício, não deve recorrer de imediato às soluções, mas fazer todo o esforço para o resolver, discutir com os colegas, voltar aos exercícios anteriores, etc. É no processo de resolução de um problema que se aprende matemática e não no processo de copiar uma solução já feita.

Esperamos que este livro, em parceria com o professor, se revele um instrumento fundamental à aprendizagem desta importante e exigente disciplina.

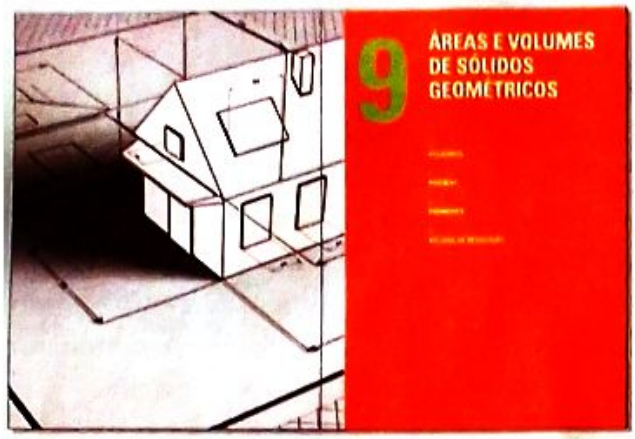
Os autores

EXPLORAÇÃO DO MANUAL

Como utilizar o manual?

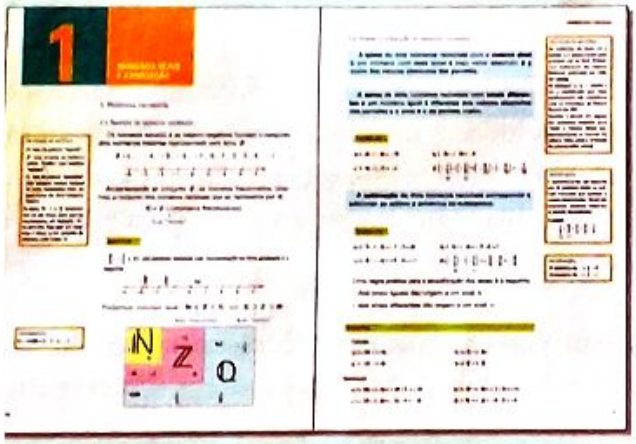
O manual **Matemática 9.ª classe** pretende aplicar, de uma forma pedagogicamente adequada, as linhas orientadoras do currículo do Ensino Secundário Geral conjugadas com os conteúdos da disciplina de Matemática da 9.ª classe. Está estruturado em nove unidades temáticas e as competências e as orientações do programa são desenvolvidas de forma coerente e funcional.

Em cada unidade temática encontra:



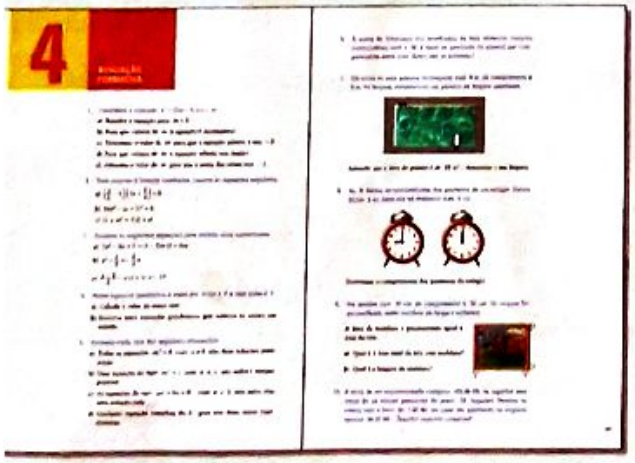
Dupla página de abertura da unidade

Imagem sugestiva relacionada com os conteúdos a abordar.



Desenvolvimento de conteúdos

Textos, imagens, esquemas e tabelas com informação rigorosa.



Avaliação formativa

Relaciona os conteúdos abordados permitindo uma auto-avaliação.

Para a consolidação dos conteúdos:

Conhecimento

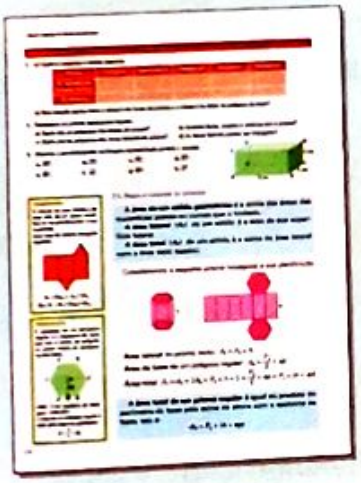
Expõe definições e propriedades fundamentais à aprendizagem.

Exemplos

Orienta na consolidação dos novos conhecimentos ou evidenciam métodos de resolução.

Exercícios

Aplicação dos conhecimentos adquiridos para desenvolver a aprendizagem.



Observação / Um pouco de História...

Aborda pequenas explicações que facilitam a compreensão do conteúdo em questão e pequenas notas históricas.

No final do manual:

Soluções

Tábuas de quadrados, raízes quadradas e raízes cúbicas

Planificações de sólidos geométricos

ÍNDICE

NÚMEROS REAIS E RADICIAÇÃO

10 1. NÚMEROS RACIONAIS
17 2. NÚMEROS REAIS
20 3. RADICIAÇÃO
30 Avaliação formativa

INEQUAÇÕES LINEARES E SISTEMAS DE INEQUAÇÕES LINEARES COM UMA VARIÁVEL

34 1. INTERVALOS REAIS
41 2. INEQUAÇÕES LINEARES COM UMA VARIÁVEL
47 3. SISTEMAS DE INEQUAÇÕES LINEARES COM UMA VARIÁVEL
53 Avaliação formativa

MONÓMIOS E POLINÓMIOS

58 1. MONÓMIOS
63 2. POLINÓMIOS
66 3. CASOS NOTÁVEIS DA MULTIPLICAÇÃO
68 4. FACTORIZAÇÃO DE UM POLINÓMIO
70 Avaliação formativa

EQUAÇÃO QUADRÁTICA

74 1. EQUAÇÃO QUADRÁTICA
76 2. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS
86 3. PROBLEMAS DO 2.º GRAU
88 Avaliação formativa

FUNÇÃO QUADRÁTICA

92 1. FUNÇÃO QUADRÁTICA
101 2. PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES QUADRÁTICAS
108 Avaliação formativa

QUADRILÁTEROS

108 1. QUADRILÁTEROS
110 2. CONCEITOS E PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS
116 Avaliação formativa

NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA

120 1. ESTATÍSTICA
122 2. RECOLHA, ORGANIZAÇÃO E APRESENTAÇÃO DE DADOS ESTATÍSTICOS
128 3. MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL
131 Avaliação formativa

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

136 1. HOMOTETIAS
141 2. RAZÕES E PROPORÇÕES
146 3. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS
163 Avaliação formativa

ÁREAS E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

168 1. POLIEDROS
174 2. PRISMAS
179 3. PIRÂMIDES
183 4. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
189 Avaliação formativa
192 Soluções
204 Anexo 1: Tábuas
207 Anexo 2: Planificações de sólidos geométricos

1 NÚMEROS REAIS E RADICIAÇÃO

1. NÚMEROS RACIONAIS

2. NÚMEROS REAIS

3. RADICIAÇÃO

1 NÚMEROS REAIS E RADICIAÇÃO

1. Números racionais

1.1. Revisão de números racionais

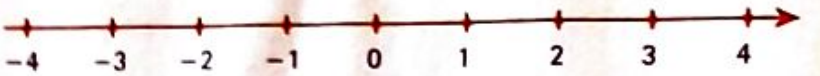
UM POUCO DE HISTÓRIA...

- $\mathbb{N}$ vem da palavra "natural";
- $\mathbb{Z}$ tem origem na palavra alemã "Zahlen" que significa "número";
- $\mathbb{Q}$ vem da palavra "quociente" pois qualquer número racional se pode representar como um quociente de dois números inteiros.

Às letras N, Z e Q acrescentou-se um traço para que ao escrevermos, por exemplo, $\mathbb{N}$, se perceba logo que nos estamos a referir a um conjunto de números e não à letra N.

Os números naturais e os inteiros negativos formam o **conjunto dos números inteiros** representado pela letra $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$



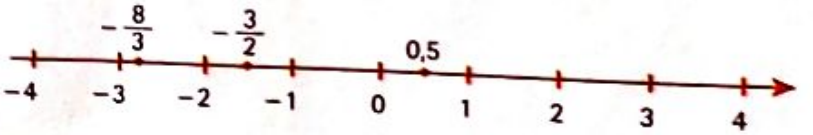
Acrescentando ao conjunto $\mathbb{Z}$ os números fraccionários, obtemos o conjunto dos números racionais que se representa por $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \{\text{números fraccionários}\}$$

↑ lê-se "reunião"

EXEMPLO:

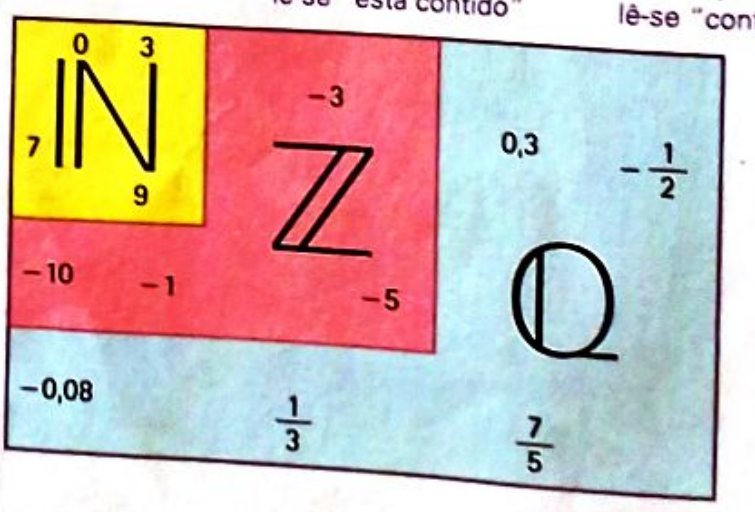
$-\frac{8}{3}$; $-\frac{3}{2}$ e 0,5 **são números racionais cuja representação na recta graduada é a seguinte:**



Podemos concluir que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$.

↑ lê-se "está contido" ↑ lê-se "contém"

OBSERVAÇÃO:
$\mathbb{N}' = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$



1.2. Adição e subtração de números racionais

A soma de dois números racionais com o mesmo sinal é um número com esse sinal e cujo valor absoluto é a soma dos valores absolutos das parcelas.

A soma de dois números racionais com sinais diferentes é um número igual à diferença dos valores absolutos das parcelas e o sinal é o da parcela maior.

EXEMPLOS:

a) $(+4)+(+6)=+10$

b) $(-5)+(-3)=-8$

c) $(-4)+(+7)=+3$

d) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(+\frac{5}{10}\right)+\left(-\frac{4}{10}\right)=+\frac{1}{10}$
(5) (2)

A subtracção de dois números racionais corresponde a adicionar ao aditivo o simétrico do subtractivo.

EXEMPLOS:

a) $(+7)-(-3)=+7+3=10$

b) $(-2)-(-9)=-2+9=7$

c) $(+5)-(+4)=+5-4=+1$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$
(2) (1)

Uma regra prática para a simplificação dos sinais é a seguinte:

– dois sinais **iguais** dão origem a um sinal **+**;

– dois sinais **diferentes** dão origem a um sinal **−**.

EXEMPLO:

Calcule:

a) $(+10)+(+5)$;

b) $(+2)-(-9)$;

c) $(-12)-(+4)$;

d) $(+8)+(-3)$.

Resolução

a) $(+10)+(+5)=+10+5=+15$

b) $(+2)-(-9)=+2+9=+11$

c) $(-12)-(+4)=-12-4=-16$

d) $(+8)+(-3)=+8-3=+5$

UM POUCO DE HISTÓRIA

Os símbolos de mais (+) e menos (−) apareceram pela primeira vez no livro *Aritmética Comercial*, de Johann Widman, publicado em 1489, em Leipzig.

Os símbolos + e − vieram a ter o significado que hoje conhecemos em Inglaterra com os trabalhos de Robert Record em 1557.

Durante o século XV, alguns dos primeiros símbolos para "mais" e "menos" foram respectivamente *p* (inicial da palavra latina *plus*) e *m* (inicial da palavra latina *minus*).

OBSERVAÇÃO:

É necessário ter em atenção que só podemos somar ou subtrair fracções que tenham o mesmo denominador. Se tal não acontecer, devemos reduzi-los ao mesmo denominador.

Exemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{2}{4}+\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$$
(2) (1)

OBSERVAÇÃO:

- O simétrico de -3 é $+3$.
- O simétrico de $+4$ é -4.

1.3. Adição algébrica e a simplificação da escrita

Consideremos a seguinte expressão onde surgem várias adições e subtracções:

$$(+2)+(-5)-(-1)+(+8)-(+7)$$

Transformando as subtracções em adições, a expressão pode ser escrita usando apenas a adição:

$$(+2)+(-5)-(-1)+(+8)-(+7)=(+2)+(-5)+(+1)+(+8)+(-7)$$

A uma expressão que se pode transformar numa adição de números racionais designa-se por **adição algébrica** e o seu resultado por **soma algébrica**.

Usando as regras mencionadas anteriormente, a expressão simplificada e o respectivo resultado são os seguintes:

$$(+2)+(-5)-(-1)+(+8)-(+7)=(+2)+(-5)+(+1)+(+8)+(-7)=$$
$$=+2-5+1+8-7=-3+1+8-7=-2+8-7=+6-7=-1$$

OBSERVAÇÃO:

Os sinais + e − surgem com duas funções distintas:

Sinais operacionais

$(+2)+(-5)-(-1)+(+8)-(+7)$

Sinais posicionais

Os **sinais operacionais** estão colocados entre os números e referem-se às operações de adição e subtracção.

Os **sinais posicionais** estão colocados dentro dos parêntesis e indicam-nos a posição do número relativamente ao zero.

OBSERVAÇÃO:

Convencionou-se que, quando numa expressão os sinais posicionais são só de adição, podemos não escrevê-los e, portanto, os parêntesis não são necessários.

EXEMPLO:

Transforme a expressão $(+18)-(-9)+(-5)-(-10)$ numa adição algébrica e calcule o seu valor.

Resolução

$$(+18)-(-9)+(-5)-(-10)=+18+(+9)+(-5)+(+10)=+18+9-5+10=$$
$$=+27-5+10=+22+10=32$$

1.3.1. Uso de parêntesis

Se uma soma algébrica dentro de parêntesis é precedida pelo sinal **+**, este pode ser omitido e **não se alteram** os sinais das parcelas. No caso de ser precedida pelo sinal **−**, para este desaparecer **trocam-se** os sinais das parcelas.

EXEMPLO:

Calcule:

a) $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right)$; b) $0{,}5+\frac{7}{5}-\left(0{,}2+\frac{9}{5}\right)$; c) $-\frac{3}{5}-\left(\frac{7}{4}+0{,}5\right)$.

Resolução

a) $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right)=\underset{(2)}{\frac{1}{2}}+\underset{(1)}{\frac{3}{4}}-\underset{(2)}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}-\frac{10}{4}=\frac{5}{4}-\frac{10}{4}=-\frac{5}{4}$

b) $0{,}5+\frac{7}{5}-\left(0{,}2+\frac{9}{5}\right)=\frac{5}{10}+\underset{(2)}{\frac{7}{5}}-\frac{2}{10}-\underset{(2)}{\frac{9}{5}}=\frac{5}{10}+\frac{14}{10}-\frac{2}{10}-\frac{18}{10}=-\frac{1}{10}$

c) $-\frac{3}{5}-\left(\frac{7}{4}+0{,}5\right)=-\underset{(4)}{\frac{3}{5}}-\underset{(5)}{\frac{7}{4}}-\underset{(2)}{\frac{5}{10}}=-\frac{12}{20}-\frac{35}{20}-\frac{10}{20}=-\frac{57}{20}$

1.4. Multiplicação de números racionais

O procedimento para multiplicar números racionais é o mesmo que estudámos na classe anterior na multiplicação de números inteiros. As propriedades estudadas também são extensíveis aos números racionais.

Relembra-se que para multiplicar números representados por fracções, multiplicam-se os respectivos numeradores e os denominadores.

- O **produto** de dois números de sinais **iguais** é um número positivo.
- O **produto** de dois números de sinais **diferentes** é um número negativo.

UM POUCO DE HISTÓRIA...

O sinal de multiplicação (×) foi utilizado pela primeira vez por William Oughtred no livro *Clavis Mathematicae*, publicado em 1631, apesar de já ter aparecido num apêndice da tradução do livro de John Napier em 1618, cuja autoria foi atribuída a Oughtred.

No entanto, a sua aceitação na simbologia matemática não foi fácil por se confundir com a letra *x*.

EXEMPLO:

Calcule:

a) $\frac{3}{5} \times 0{,}5 \times \frac{1}{2}$; b) $-2 \times \frac{7}{3} \times \frac{5}{2}$; c) $6 \times \frac{1}{2} \times \frac{8}{5}$.

Resolução

a) $\frac{3}{5} \times 0{,}5 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{50} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

b) $-2 \times \frac{7}{3} \times \frac{5}{2} = -\frac{14}{3} \times \frac{5}{2} = -\frac{70}{6} = -\frac{35}{3}$

c) $6 \times \frac{1}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{6}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$

1.5. Divisão de números racionais

Para efectuar a divisão de dois números racionais, pode-se transformar a divisão numa multiplicação continuando a serem válidas as regras dos sinais.

Na **divisão** de dois números racionais multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor.

UM POUCO DE HISTÓRIA...

Hoje em dia utilizam-se vários sinais para indicar uma divisão.

A barra horizontal da forma $\frac{a}{b}$ que indica a divisão de *a* por *b* é de origem árabe.

A forma *a/b* indicando a divisão de *a* por *b* também é atribuída aos Árabes. Esta barra oblíqua, variante da barra horizontal, foi introduzida por De Morgam em 1845.

Em 1659, o suíço Johann Heinrich Rahn inventou para a divisão o sinal + que não teve aceitação no seu próprio país, ao contrário da Inglaterra e dos Estados Unidos da América.

Os dois pontos, :, devem-se a Leibniz (1684) que usava esta notação nos casos em que se deveria escrever a divisão apenas numa linha.

Relativamente ao símbolo ⌞ designado por "gnomon" ou ângulo, utilizado para separar dividendo, divisor e quociente numa divisão, não existe uma informação precisa, suspeitando-se ser de origem indiana.

EXEMPLO:

Calcule:

a) $(-2) : \left(-\frac{2}{5}\right)$; b) $(-2+6) : (-5) : 3$; c) $-\frac{2}{5} : \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{2}\right)$.

Resolução

a) $(-2) : \left(-\frac{2}{5}\right) = (-2) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = +\frac{10}{2} = +5$

b) $(-2+6) : (-5) : 3 = +4 : (-5) : 3 = 4 \times \left(-\frac{1}{5}\right) : 3 = -\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = -\frac{4}{15}$

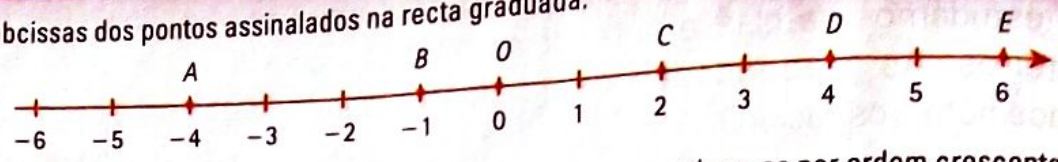
c) $-\frac{2}{5} : \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{5} \times \frac{5}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{3}{4}$

OBSERVAÇÃO:

A divisão por zero é impossível porque não existe o seu inverso.

Exercício n.º 1

1. Indique as abcissas dos pontos assinalados na recta graduada.



2. Represente numa recta graduada as abcissas dos seguintes pontos e ordene-os por ordem crescente.

$A \rightsquigarrow -7$ $B \rightsquigarrow -\frac{1}{2}$ $C \rightsquigarrow +1$ $D \rightsquigarrow -1{,}5$ $E \rightsquigarrow +3$ $F \rightsquigarrow \frac{7}{2}$ $G \rightsquigarrow -3{,}5$

3. Dado o conjunto $A = \left\{-3\,;\,-2\,;\,-\frac{4}{3}\,;\,0{,}1\,;\,\frac{1}{2}\,;1{,}3\,;\,3{,}5\right\}$, indique:

a) os números inteiros;
b) os números fraccionários;
c) os números naturais;
d) os números racionais;
e) os números inteiros não naturais;
f) os números racionais não inteiros.

4. Efectue as seguintes operações.

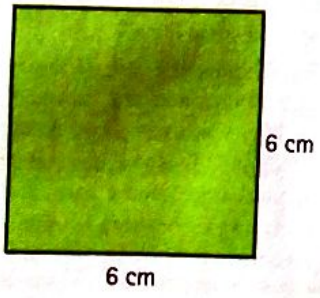
a) $(-5)+(-10)+(-3)-(+7)$
b) $\left(+\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{6}\right)$
c) $18+20-17-3$
d) $-2+\left(-\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$
e) $-1+\frac{1}{5}+\left(-\frac{2}{3}\right)+2$
f) $\frac{1}{2}-\frac{7}{3}+1$

5. Calcule e simplifique as seguintes operações.

a) $\frac{5}{2}+\left(1{,}3-\frac{9}{2}\right)$
b) $\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}\right)$
c) $\frac{2}{3}-\left(\frac{8}{10}-\frac{1}{2}\right)$
d) $\left(\frac{1}{4}-3-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}$
e) $(0{,}5+0-0{,}3)+\frac{4}{4}$
f) $\frac{5}{3}-\left(\frac{4}{2}+5-\frac{1}{3}\right)+0{,}5$

6. Efectue as seguintes operações.

a) $\frac{2}{3}\times 3$
b) $\frac{2}{3}\times(-6)$
c) $\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
d) $\frac{3}{4}\times(-0{,}2)\times(-5)\times 0$
e) $(7-4:2)+7\times(3-2)-2\times 4$
f) $(2:3+10:3):(16-2\times 7)+16-16$



1.6. Quadrados e raízes quadradas de números racionais

Consideremos o seguinte problema:

Se o lado de um quadrado mede 6 cm, a sua área é igual a $A = 6 \times 6 = 6^2 = 36\ \text{cm}^2$. Inversamente, se a área de um quadrado é $36\ \text{cm}^2$, o seu lado é igual à **raiz quadrada** de 36, ou seja, 6, e escreve-se $\sqrt{36} = 6$.

A **raiz quadrada** de um número não negativo a é um número que elevado ao quadrado é igual a a.

radical ($\sqrt{}$)

$\sqrt{a} = b$ se e só se $b^2 = a$, com a e b não negativos.

radicando (a)

Os números cuja raiz quadrada é um número inteiro denominam-se quadrados perfeitos.

EXEMPLO:

0, 1, 4, 9, 16, 25, ... são quadrados perfeitos porque $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, ...

Na classe anterior, estudámos o cálculo da raiz quadrada de um número usando tábuas em que os radicandos eram não superiores a 99,9. Assim, como calcular a raiz quadrada de um número a tal que:

1.º caso: a é um quadrado perfeito

Pelas tábuas da raiz quadrada ou dos quadrados (consultar as páginas finais do livro):

- $\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$
- $\sqrt{100} = 10$ porque $10^2 = 100$

2.º caso: $1{,}00 \leqslant a \leqslant 99{,}9$

Pelas tábuas da raiz quadrada:

- $\sqrt{9{,}12} \approx 3{,}0199$ (alínea 9,1; coluna 2 na tábua n.º 1)
- $\sqrt{48{,}3} \approx 6{,}9498$ (alínea 48; coluna 3 na tábua n.º 2)

3.º caso: $a > 99{,}9$

O procedimento é factorizar o radicando em um produto em que um dos factores seja um número contemplado nas tábuas e o outro seja uma potência de 100, 10 000, etc., porque $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{10\,000} = 100$, etc.

- $\sqrt{169} = \sqrt{1{,}69 \times 100} = \sqrt{1{,}69} \times \sqrt{100} = 1{,}3 \times 10 = 13$
- $\sqrt{169\,000} = \sqrt{16{,}9 \times 10\,000} = \sqrt{16{,}9} \times \sqrt{10\,000} \approx$
  $\approx 4{,}111 \times 100 \approx 411{,}1$

4.º caso: $0 < a < 1$

O procedimento é factorizar o radicando em um produto em que um dos factores seja um número contemplado na tábua e o outro seja uma potência de 0,01 ; 0,0001 ; etc., porque $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, $\sqrt{0{,}0001} = 0{,}01$, etc.

- $\sqrt{0{,}169} = \sqrt{16{,}9 \times 0{,}01} = \sqrt{16{,}9} \times \sqrt{0{,}01} \approx$
  $\approx 4{,}111 \times 0{,}1 \approx 0{,}4111$
- $\sqrt{0{,}00169} = \sqrt{16{,}9 \times 0{,}0001} = \sqrt{16{,}9} \times \sqrt{0{,}0001} \approx$
  $\approx 4{,}111 \times 0{,}01 \approx 0{,}04111$

UM POUCO DE HISTÓRIA...

Na Antiguidade, os matemáticos gregos associavam estes números a formas geométricas. Representando cada unidade por um ponto:

Por este motivo, os quadrados perfeitos designam-se por números quadrangulares.

OBSERVAÇÃO:

Para calcular o quadrado de qualquer número, pode-se usar a **tábua de quadrados**. Por exemplo, para determinar 110^2, procuramos na tábua a alínea **11** e a coluna **0**. Como a leitura é 12 100, então $110^2 = 12\,100$.

	0	1
10	10 000	10 201
11	12 100	12 321
12	14 400	14 641

OBSERVAÇÃO:

Para quaisquer números positivos a e b:
$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

A raiz quadrada de um número pode ser calculada através do uso de tábuas, mas também usando um algoritmo.

Algoritmo da raiz quadrada de um número

Como determinar o valor de $\sqrt{712}$?

$\sqrt{7\,12}\ \big|\ ___$

1.º Começa-se por dividir o número, da direita para a esquerda, em grupos de dois algarismos.

$\sqrt{7\,12}\ \big|\ \mathbf{2}$
$\mathbf{4}$

2.º Determina-se a raiz quadrada do maior quadrado perfeito não superior ao número formado pelo grupo da esquerda.

Neste caso, $\mathbf{2}^2 = \mathbf{4} < 7$ e coloca-se o **2** e o **4** nos lugares indicados.

$\sqrt{7\,12}\ \big|\ 2$
$-\,4$
3

3.º Determina-se a diferença entre o número formado pelo grupo da esquerda e o quadrado perfeito, $7 - 4 = 3$.

$\sqrt{712}\ \big|\ 2$
$-\,4\quad\ \ \mathbf{4}$
312

4.º À direita, escreve-se o grupo seguinte de algarismos nos lugares indicados: **12**.

Por baixo do 2 escreve-se o seu dobro: **4**.

$\sqrt{71\,2}\ \big|\ 2$
$-\,4\quad\ \ \mathbf{46}$
$31\,2\quad \times \mathbf{6}$
276

5.º Do número 312, separa-se o algarismo da direita, 2, e divide-se o número 31 por **4**. Como o quociente não é um número inteiro, por tentativas, procura-se o valor de x tal que $\mathbf{4}x$ multiplicado por x se aproxime de 312.

Para $x = \mathbf{6}$, multiplica-se o número assim obtido, **46**, pelo quociente **6**.

Note que, para $x = 7$, $47 \times 7 = 329$ que já ultrapassou o 312.

$\sqrt{712}\ \big|\ \mathbf{26}$
$-\,4\quad\ \ 46$
$312\quad \times 6$
$-\,\mathbf{276}\quad \mathbf{276}$
36

6.º Como o produto obtido, **276**, é menor ou igual que o número que se encontra à esquerda, efectua-se a subtracção do segundo pelo primeiro e aceita-se o **6** como sendo o segundo algarismo da raiz quadrada e coloca-se à direita do 2. Caso contrário, o procedimento era o mesmo que para outros valores mais baixos de x.

Assim, $\sqrt{712} \approx 26$ e o resto é 36.

Verificação: $26^2 + 36 = 676 + 36 = 712$

Como calcular o valor de $\sqrt{19\,324\,564}$?

O procedimento é idêntico ao descrito no caso anterior. No entanto, para valores do radicando maiores, os 4.º , 5.º e 6.º passos repetem-se até ao último par de algarismos do radicando.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{19\,32\,45\,64} & 4395 \\ \hline -16 & \\ \hline 3\,32 & \\ -2\,49 & \\ \hline 83\,45 & \\ -78\,21 & \\ \hline 524\,64 & \\ -439\,25 & \\ \hline 85\,39 & \end{array}$$

83	869	8785
× 3	× 9	× 5
249	7821	43925

Assim, $\sqrt{19\,324\,564} \approx 4395$ e $r = 8539$.

Verificação: $4395^2 + 8539 = 19\,316\,025 + 8539 = 19\,324\,564$.

Exercício n.º 2

1. Calcule os seguintes quadrados.
   a) 25^2 b) $(-15)^2$ c) $0{,}01^2$ d) $0{,}02^2$ e) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ f) $\left(\frac{1}{20}\right)^2$
2. Calcule a área de um quadrado cujo lado mede:
   a) 5,5 cm ; b) 8,75 m ; c) 1,44 dm ; d) 2,25 m ; e) 9,5 dm ; f) 7,32 mm .
3. Determine usando a tábua adequada:
   a) $\sqrt{0{,}81}$; b) $\sqrt{0{,}75}$; c) $\sqrt{888}$; d) $\sqrt{219}$; e) $\sqrt{1550}$; f) $\sqrt{415}$.
4. Usando o algoritmo da raiz quadrada, calcule o valor das seguintes expressões e apresente o respectivo resto.
   a) $\sqrt{225}$ b) $\sqrt{344}$ c) $\sqrt{1350}$ d) $\sqrt{9025}$ e) $\sqrt{347\,325}$ f) $\sqrt{634\,215}$

2. Números reais

2.1. Noção de números irracionais

Os números racionais podem ser representados na forma fraccionária ou na forma decimal (dízimas), como estudámos na classe anterior.

EXEMPLOS:

a) $\frac{2}{8} = 2 : 8 = 0{,}25$ b) $\frac{13}{8} = 1{,}625$ c) $\frac{17}{6} \approx 2{,}8333\ldots = 2{,}8(3)$

Nos dois primeiros exemplos o resto da divisão é zero, pelo que as dízimas obtidas dizem-se **finitas** e no último exemplo, a dízima diz-se **infinita**. Como existe um algarismo ou um conjunto de algarismos que se repetem sempre pela mesma ordem, a dízima diz-se **infinita periódica** cujo período está escrito dentro de parêntesis.

Os números racionais são todos os números que podem ser representados por dízimas finitas ou por dízimas infinitas periódicas.

OBSERVAÇÃO:

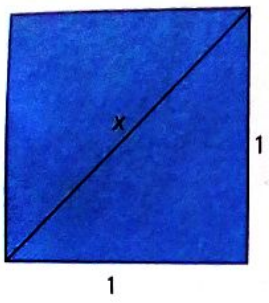
$$\begin{array}{r|l} 2{,}00 & 8 \\ 40 & 0{,}25 \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 13{,}000 & 8 \\ 50 & 1{,}625 \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 17{,}000\ldots & 6 \\ 50 & 2{,}833 \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Consideremos o seguinte problema:

Qual a medida da diagonal de um quadrado cujo lado é igual a 1 cm ?



Para calcular o valor de x usamos o Teorema de Pitágoras:

$x^2 = 1^2 + 1^2 \iff x^2 = 2$, pelo que, $x = \sqrt{2} \approx 1{,}414\,213\,562\ldots$ cm

O valor de $\sqrt{2}$ é uma dízima infinita não periódica e, por isso, não representa um número racional.

Existem outros números que são representados por dízimas infinitas não periódicas, como, por exemplo:

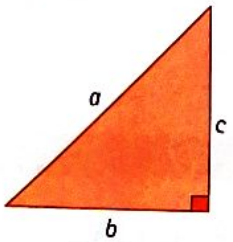
$\pi \approx 3{,}141\,592\,654\ldots$

$e \approx 2{,}718\,281\,828\ldots$ (número de Neper)

$\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,033\,989\ldots$ (número de ouro)

TEOREMA DE PITÁGORAS

Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.



$a^2 = b^2 + c^2$

Os **números irracionais** são todos os números que podem ser representados por **dízimas infinitas não periódicas.**

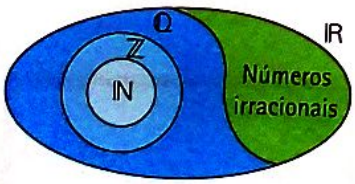
Resumo:

Dízimas
- finitas → números racionais
- infinitas
  - periódicas → números racionais
  - não periódicas → números irracionais

2.2. Os números reais

O conjunto de números racionais ($\mathbb{Q}$) com o conjunto de números irracionais forma um novo conjunto chamado conjunto dos **números reais**, representado pela letra $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{números irracionais}\}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

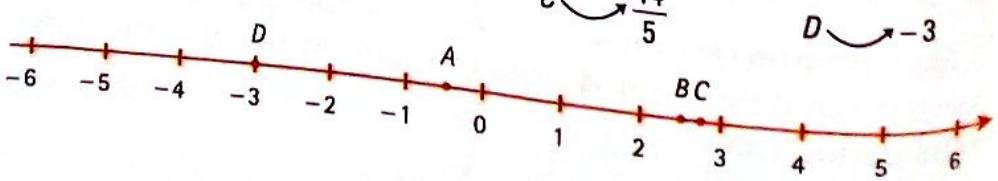
2.3. Representação de números reais na recta graduada

A cada número racional podemos associar um só ponto sobre a recta graduada.

EXEMPLO:

Marque na recta graduada os seguintes pontos:

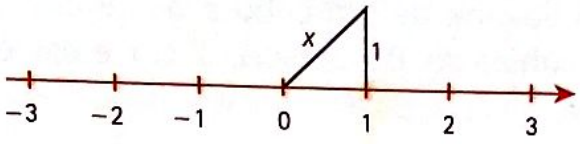
$A \to -\frac{1}{2}$ $\quad B \to 2{,}5$ $\quad C \to \frac{14}{5}$ $\quad D \to -3$



Será que cada número irracional também corresponde a um ponto da recta?

Como marcar o ponto de abcissa $\sqrt{2}$?

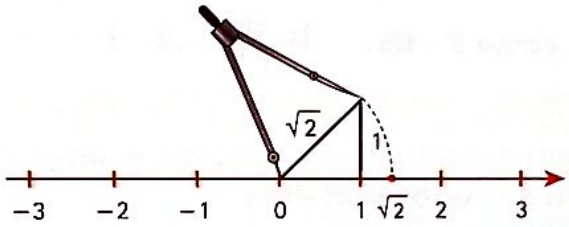
Constrói-se uma recta graduada e sobre esta um triângulo rectângulo isósceles cujos catetos meçam 1 unidade.



A medida do comprimento da hipotenusa desse triângulo é $\sqrt{2}$, pois, pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \iff x^2 = 2 \text{, pelo que, } x = \sqrt{2}\,.$$

Em seguida, coloca-se a ponta seca de um compasso sobre o 0 e, com abertura igual ao comprimento da hipotenusa, descreve-se um arco que corte a recta graduada num ponto à direita de 1. A abcissa desse ponto é $\sqrt{2}$.



Para marcar na recta graduada o ponto de abcissa $-\sqrt{2}$, o arco deve ser descrito para o lado esquerdo de 0, isto é, para a parte negativa da recta.

Desta forma, a todo o número real corresponde um só ponto na recta graduada e vice-versa.

UM POUCO DE HISTÓRIA...

A história dos **números irracionais** está intimamente ligada com factos de natureza geométrica e aritmética bem conhecidos da Escola Pitagórica que considerava estes números heréticos.

Apesar de estes números só terem sido definidos em 1872 pelo matemático alemão Richard Dedekind e terem sido usados pelos Egípcios e pelos Babilónios, foram os Gregos os primeiros a reconhecer a existência de comprimentos que não podiam ser expressos por números racionais.

Durante séculos, os números irracionais foram designadas por "números nulos", "números incalculáveis" e "números inexprimíveis".

Richard Dedekind
(1831-1916)

Exercício n.º 3

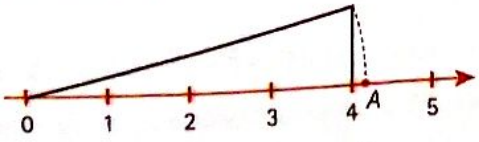
1. Averigúe quais os tipos de dízimas dos seguintes números reais e indique o período, se for o caso.

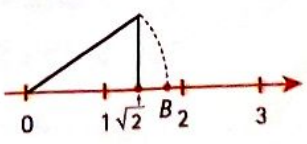
a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\frac{5}{6}$ **d)** $\sqrt{12}$ **e)** $\frac{2}{3}$

2. Marque na recta graduada, os pontos correspondentes aos números reais seguintes e ordene-os por ordem crescente.

$$\frac{7}{2} \quad -\frac{8}{3} \quad \sqrt{5} \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{2}+2 \quad \sqrt{5}-2$$

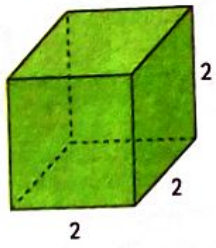
3. Indique o número irracional representado pelos pontos A e B.





3. Radiciação

3.1. Cubos e raízes cúbicas de números racionais



Consideremos o seguinte cubo de lado 2 cm. Se a aresta do cubo mede 2 cm, o seu volume é $V = 2^3 = 8\ cm^3$. Inversamente, se o volume de um cubo é de $8\ cm^3$, a sua aresta mede a raiz cúbica de 8, ou seja, 2 cm e escreve-se $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.

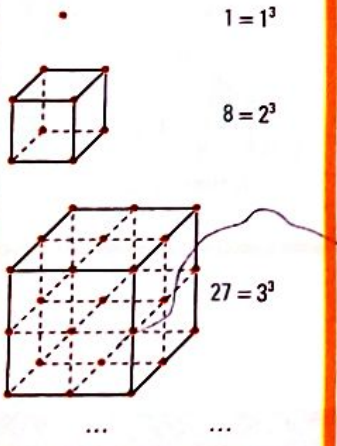
Repare que $\sqrt[3]{8} = 2$ e não é igual a -2 porque $(-2)^3 = -8 \neq 8$.

A **raiz cúbica** de um número a é um número que elevado ao cubo é igual a a.

$$\sqrt[3]{a} = b \text{ se e só se } b^3 = a.$$

UM POUCO DE HISTÓRIA...

À semelhança dos quadrados perfeitos, os matemáticos na Antiguidade associavam os **cubos perfeitos** às seguintes formas geométricas:



EXEMPLOS:

a) $\sqrt[3]{125} = 5$, porque $5^3 = 125$.

b) $\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \sqrt[3]{8} = 3$

Os números cuja sua raiz cúbica é um número inteiro denominam-se **cubos perfeitos.**

EXEMPLOS:

0, 1, 8, 27, 64, ... são cubos perfeitos porque $\sqrt[3]{0} = 0$, $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{8} = 2$, ...

3.2. Potência de expoente fraccionário

Para os números naturais m e n não nulos e o número real positivo a:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

EXEMPLOS:

a) $3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4}$

b) $x^{\frac{p}{2}} = \sqrt{x^p}$ com $p \in \mathbb{N}$.

c) $2^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{2^5}$

d) $7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7}$

inversamente:

e) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

f) $\sqrt[5]{4^3} = 4^{\frac{3}{5}}$

g) $\sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3$

h) $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$

3.3. Valores aproximados de radicais

Os números irracionais são representados por dízimas infinitas não periódicas. Frequentemente, escreve-se $\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ldots$ onde $\sqrt{2}$ é o valor exacto e $1{,}4142\ldots$ um **valor aproximado** do radical. No entanto, pode-se distinguir vários tipos de valores aproximados:

- $1{,}41$ é um valor aproximado por **defeito** às centésimas;
- $1{,}42$ é um valor aproximado por **excesso** às centésimas;
- $1{,}414$ é um valor aproximado por **defeito** às milésimas;
- $1{,}415$ é um valor aproximado por **excesso** às milésimas.

Um enquadramento possível de $\sqrt{2}$ é $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ (a menos de $1{,}415 - 1{,}414 = 0{,}001$).

Como calcular valores aproximados de expressões que contêm radicais?

OBSERVAÇÃO:

Sempre que se utiliza uma aproximação de um número e não o seu valor exacto, comete-se um erro.

EXEMPLO:

Calcule um valor aproximado às centésimas de cada um dos números irracionais seguintes.

a) $\sqrt{3} + \sqrt[3]{56}$ **b)** $3 \times \sqrt[3]{56}$

Resolução

a) Da tábua, $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$ e $\sqrt[3]{56} \approx 3{,}8259$, pelo que, $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ (a menos de $1{,}74 - 1{,}73 = 0{,}01$) e $3{,}82 < \sqrt[3]{56} < 3{,}83$ (a menos de $0{,}01$). Assim:

$$\begin{array}{r} 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 \\ 3{,}82 < \sqrt[3]{56} < 3{,}83 \\ \hline 5{,}55 < \sqrt{3} + \sqrt[3]{56} < 5{,}57 \end{array} \quad \text{(a menos de } 0{,}02\text{)}$$

Desta forma,

- $5{,}55$ é um **valor aproximado por defeito** às centésimas;
- $5{,}57$ é um **valor aproximado por excesso** às centésimas.

b)
$$\begin{array}{r} 3{,}82 < \sqrt[3]{56} < 3{,}83 \\ \hline 3 \times 3{,}82 < 3 \times \sqrt[3]{56} < 3 \times 3{,}83 \end{array}$$
$$11{,}46 < 3 \times \sqrt[3]{56} < 11{,}49 \text{ (a menos de } 0{,}03\text{)}$$

pelo que:

- $11{,}46$ é um **valor aproximado por defeito** às centésimas;
- $11{,}49$ é um **valor aproximado por excesso** às centésimas.

Exercício n.º 4

1. Determine o valor das seguintes raízes.

   a) $\sqrt[3]{92}$ b) $\sqrt[3]{100}$ c) $\sqrt[3]{729}$

   d) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e) $\sqrt[3]{-64}$ f) $\sqrt[3]{-\frac{125}{27}}$

2. Escreva os seguintes radicais sob a forma de potência de expoente fraccionário.

   a) $\sqrt{2^5}$ b) $\sqrt[3]{a^4}$ c) $(\sqrt[7]{2})^3$

   d) $\sqrt[5]{b^5}$ e) $\sqrt[3]{a^3}$ f) $\sqrt{5^2}$

3. Determine o valor das seguintes potências.

   a) $64^{\frac{1}{3}}$ b) $100^{\frac{3}{2}}$ c) $\left(-\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

4. Determine um valor aproximado por defeito às centésimas de:

   a) $\sqrt{8}+\sqrt{3}$; b) $\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{90}$; c) $\sqrt{8}\times\sqrt{5}$;

   d) $4\times\sqrt{7}$; e) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}$; f) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3}$.

3.4. Passagem de um factor para dentro e para fora do radical

3.4.1. Passagem de um factor para dentro de um radical

Para quaisquer a e b números reais com $b \geqslant 0$:

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}.$$

OBSERVAÇÃO:

Para quaisquer números reais positivos a e b:

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}.$$

EXEMPLO:

Sabendo que $3 = \sqrt{3^2}$ pois $\sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3$, então:

$$3\times\sqrt{2} = \sqrt{3^2\times 2} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{18}.$$

Esta regra é útil para minimizar o erro que se comete quando se utilizam valores aproximados de $3\sqrt{2}$, pois triplicamos o erro de arredondamento ao multiplicarmos o valor aproximado de $\sqrt{2}$ por 3. Para evitar tal facto, se passarmos o número 3 para dentro do radical como foi feito no exemplo e calcularmos $\sqrt{18}$, obtemos também um número aproximado, sem aumentarmos o erro. Assim, teremos um resultado mais próximo do valor exacto da raiz.

3.4.2. Passagem de um factor para fora de um radical

EXEMPLOS:

a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{5^2 \times 3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

Se existir um quadrado perfeito dentro do radical, este pode passar para fora do radical, ou seja, $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ onde a e b são números reais e $b \geqslant 0$ (a decomposição do radicando em factores primos facilita esta operação).

EXEMPLO:

Como $45 = 3^2 \times 5$, então $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

OBSERVAÇÃO:

45	3
15	3
5	5
	1

$45 = 3^2 \times 5$

No caso do radicando ser um número grande, torna-se pouco prático decompô-lo em factores primos, pelo que uma alternativa é proceder à decomposição em potências de 100 (100 , 10 000 , 1 000 000 , ...) .

EXEMPLOS:

a) $\sqrt{700} = \sqrt{100 \times 7} = \sqrt{100} \times \sqrt{7} = \sqrt{10^2} \times \sqrt{7} = 10\sqrt{7}$

b) $\sqrt{250\,000} = \sqrt{10\,000 \times 25} = \sqrt{100^2} \times \sqrt{25} = 100 \times 5 = 500$

3.5. Propriedades dos radicais

3.5.1. Quadrado de uma raiz quadrada

O quadrado de uma raiz quadrada é igual ao seu radicando, ou seja:

$$(\sqrt{a})^2 = a \text{ , para } a \in \mathbb{R}_0^+ .$$

EXEMPLOS:

a) $(\sqrt{5})^2 = 5$ porque $(\sqrt{5})^2 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{\frac{2}{2}} = 5$;

b) $(\sqrt{7})^2 = 7$ porque $(\sqrt{7})^2 = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 7^{\frac{2}{2}} = 7$.

3.5.2. Potência de um radical

Para $a \in \mathbb{R}_0^+$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$.

EXEMPLOS:

a) $(\sqrt{3})^7 = \sqrt{3^7}$ porque $(\sqrt{3})^7 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^7 = 3^{\frac{7}{2}} = \sqrt{3^7}$;

b) $(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2^5}$ porque $(\sqrt[3]{2})^5 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$.

EXEMPLO:

Calcule o valor das seguintes expressões.

a) $(\sqrt{3})^5$ b) $(\sqrt[3]{5})^3$ c) $(\sqrt[3]{2})^5$ d) $(\sqrt[3]{7})^6$

Resolução

a) $(\sqrt{3})^5 = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^4 \times 3} = 3^2 \times \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

b) $(\sqrt[3]{5})^3 = \sqrt[3]{5^3} = 5$

c) $(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

d) $(\sqrt[3]{7})^6 = \sqrt[3]{7^6} = \sqrt[3]{(7^2)^3} = 7^2 = 49$

3.5.3. Radical em que o radicando é um radical

Para $a \in \mathbb{R}_0^+$ e $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$.

EXEMPLOS:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ porque $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$;

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[15]{a}$ porque $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{a}$ com $a \in \mathbb{R}_0^+$.

EXEMPLO:

Simplifique os seguintes radicais.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$, $a \in \mathbb{R}_0^+$ c) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$

d) $\sqrt[4]{25}$ e) $\sqrt[6]{8}$ f) $\sqrt[8]{81 \times 25^4}$

Resolução

a) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$

b) $\left(\sqrt[4]{\sqrt{5}}\right)^{16} = \left(\sqrt[8]{5}\right)^{16} = \sqrt[8]{5^{16}} = 5^{\frac{16}{8}} = 5^2 = 25$

c) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^2 \times 2}} = \sqrt[6]{50}$

d) $\sqrt[4]{25} = \sqrt{\sqrt{25}} = \sqrt{5}$

e) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt{2}$

f) $\sqrt[8]{81 \times 256} = \sqrt[8]{3^4 \times 2^8} = \sqrt{\sqrt[4]{3^4 \times (2^2)^4}} = \sqrt{3 \times 2^2} = 2\sqrt{3}$

3.6. Comparação de radicais

Para comparar radicais podemos transformá-los em potências fraccionárias e, de seguida, usar as regras das operações com potências, ou simplesmente, igualar os índices dos radicais em estudo (calculando o mínimo múltiplo comum dos índices dos radicais).

EXEMPLOS:

a) $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, porque $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}}$ $(2<3)$; b) $\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3}$, porque $2^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{3}}$ $(2<3)$.

EXEMPLO:

Ordene por ordem crescente os seguintes radicais:

a) $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{7}$; b) $\sqrt[4]{2}$ e $\sqrt[6]{5}$; c) $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{10}$ e $\sqrt[8]{80}$.

Resolução

a) m. m. c. $(2, 3) = 6$

$\sqrt{3} = \sqrt[3\times2]{3^3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$ e $\sqrt[3]{7} = \sqrt[2\times3]{7^2} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{49}$.

Como $27 < 49$, então $\sqrt[6]{27} < \sqrt[6]{49}$, ou seja, $\sqrt{3} < \sqrt[3]{7}$.

b) m. m. c. $(4, 6) = 12$

$\sqrt[4]{2} = \sqrt[4\times3]{2^3} = \sqrt[12]{8}$ e $\sqrt[6]{5} = \sqrt[6\times2]{5^2} = \sqrt[12]{25}$.

Como $25 > 8$, então $\sqrt[4]{2} < \sqrt[6]{5}$.

c) m. m. c. $(2, 4, 8) = 8$

$\sqrt{3} = \sqrt[2\times4]{3^4} = \sqrt[8]{81}$ e $\sqrt[4]{10} = \sqrt[4\times2]{10^2} = \sqrt[8]{100}$.

Como $80 < 81 < 100$, conclui-se que $\sqrt[8]{80} < \sqrt{3} < \sqrt[4]{10}$.

Exercício n.º 5

1. Passe o factor para dentro do radical.

a) $5\sqrt[3]{10}$ b) $30\sqrt{2a}$ c) $2x\sqrt[3]{2x^2}$ d) $a^2b\sqrt{a}$

2. Simplifique os seguintes radicais.

a) $\sqrt[12]{6^3}$ b) $\sqrt[9]{2^3}$ c) $\sqrt[100]{7^{20}}$ d) $\sqrt[24]{10\,000y^{12}}$

e) $\sqrt{\sqrt{5}}$ f) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{6}}}$ g) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{y^3}}}$ h) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{4}}\right)^6$

3. Compare os seguintes radicais.

a) $\sqrt[6]{4^2}$ _____ $\sqrt[6]{2^4}$ b) $\sqrt[8]{\frac{5}{9}}$ _____ $\sqrt[8]{\frac{6}{8}}$ c) $\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$ _____ $\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$ d) $\sqrt[9]{\frac{2}{5}}$ _____ $\sqrt[9]{\frac{1}{4}}$

e) $\sqrt[4]{9}$ _____ $\sqrt[3]{5}$ f) $\sqrt[15]{2^7}$ _____ $\sqrt[3]{2^2}$ g) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ _____ $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$ h) $\sqrt{5}$ _____ $\sqrt[3]{7}$

3.7. Operações com radicais

Todas as propriedades das operações efectuadas com números racionais são aplicáveis aos números irracionais.

3.7.1. Adição e subtracção de radicais

Dois radicais dizem-se semelhantes quando têm o mesmo índice e o mesmo radicando.

EXEMPLO:

Os radicais $3\sqrt{5}$ e $4\sqrt{5}$ são semelhantes, ao contrário de $2\sqrt{3}$ e $4\sqrt{5}$.

Só podemos somar ou subtrair radicais que sejam semelhantes. Nestes casos, somam-se ou subtraem-se os coeficientes mantendo-se o radical.

Para a, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}_0^+$, $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$.

OBSERVAÇÃO:
Não é possível somar primeiro os dois radicais e só depois extrair a raiz quadrada, porque, se tal pudesse acontecer:
$\sqrt{9}+\sqrt{4} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
$\approx 3{,}606 \neq 5$, pelo que
$\sqrt{9}+\sqrt{4} \neq \sqrt{9+4}$.

EXEMPLOS:

a) $\sqrt{9}+\sqrt{4} = 3+2 = 5$

b) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{125}+\sqrt{7} = 3+5+\sqrt{7} = 8+\sqrt{7}$

EXEMPLO:

Efectue as seguintes operações.

a) $2\sqrt{3}+7\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

b) $\sqrt{12}+\sqrt{75}$

Resolução

a) $2\sqrt{3}+7\sqrt{3}-4\sqrt{3} = (2+7-4)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b) Neste caso, como os radicais não são semelhantes, procede-se à sua factorização.

Como $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$ e $\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \times 3} = 5\sqrt{3}$, então

$\sqrt{12}+\sqrt{75} = 2\sqrt{3}+5\sqrt{3} = (2+5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$.

3.7.2. Multiplicação de radicais

Para a, $b \in \mathbb{R}_0^+$ e $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$.

Para calcular o produto de duas raízes, multiplicamos os radicandos e, posteriormente, calculamos a raiz do produto. Apenas no caso dos radicandos serem quadrados perfeitos é que podemos calcular a raiz de cada um separadamente.

EXEMPLO:

$\sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$

EXEMPLO:

Calcule o valor das seguintes operações.

a) $\sqrt{25} \times \sqrt{36}$ b) $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$ c) $\sqrt{11} \times \sqrt{9}$

Resolução

a) Como os radicandos são quadrados perfeitos, é mais fácil calcular a raiz quadrada de cada radical.

$\sqrt{25} \times \sqrt{36} = 5 \times 6 = 30$

b) Neste caso, é mais correcto calcular primeiro o produto e depois a raiz quadrada, porque os radicandos não são quadrados perfeitos.

$\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$

c) Como apenas um dos radicandos é um quadrado perfeito, calcula-se primeiro o produto e só depois a raiz quadrada.

$\sqrt{11} \times \sqrt{9} = \sqrt{99} \approx 9{,}95$

OBSERVAÇÃO:
No caso de termos calculado primeiro as raízes de cada radical, triplicávamos o erro, o que devemos evitar sempre que possível.

3.7.3. Divisão de radicais

Para a, $b \in \mathbb{R}_0^+$ e $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Na **divisão** de radicais, dividimos os radicandos e, posteriormente, calculamos a raiz do resultado de divisão. No caso dos radicandos serem quadrados perfeitos podemos calcular separadamente a raiz do numerador e do denominador e só depois dividir o resultado obtido.

EXEMPLOS:

a) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$ b) $\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4}$

EXEMPLO:

Calcule o valor das seguintes operações.

a) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2}$

b) $\sqrt[6]{20} : \sqrt[6]{5} : \sqrt[3]{2}$

Resolução

a) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8 : 2} = \sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[6]{20} : \sqrt[6]{5} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{20 : 5} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{2} = 1$

Quadro-síntese das operações com radicais

Consideremos a, $b \in \mathbb{R}_0^+$, c, $d \in \mathbb{R}$ e m, $n \in \mathbb{N}$.

Propriedades	Exemplos
$c\sqrt[n]{a} \pm d\sqrt[n]{a} = (c \pm d)\sqrt[n]{a}$	$-2\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$
$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$	$\sqrt{6} \times \sqrt{2} = \sqrt{12}$
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$	$\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4}$

3.8. Racionalização de denominadores

A preocupação até este momento foi simplificar os resultados das operações com radicais. Em todas as situações descritas obtivemos expressões simples em que o denominador não é um radical. Se tal não acontecesse já não se podia considerar uma expressão simplificada e, neste caso, era necessário **racionalizar o denominador**, ou seja, escrever uma expressão equivalente sem radical no denominador. O procedimento é o seguinte:

1.º Determina-se um número irracional que multiplicado pelo denominador dê um número racional;

2.º Multiplicam-se ambos os termos da fracção por esse número irracional.

EXEMPLOS:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$

c) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{6 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{6\sqrt[3]{2^2}}{2} = 3\sqrt[3]{4}$

OBSERVAÇÃO:

- Os binómios $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ e $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ dizem-se **expressões conjugadas** assim como os binómios $a + bx$ e $a - bx$.
- Aplicando a propriedade distributiva, $(a + bx) \times (a - bx) = a^2 - b^2x^2$.

Se o denominador for um binómio da forma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, multiplicamos ambos os termos da fracção pelo conjugado da expressão do denominador.

EXEMPLO:

Racionalize os denominadores das seguintes fracções.

a) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

OBSERVAÇÃO:

Para $a, b \in \mathbb{R}_0^+$,
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) =$
$= (\sqrt{a})^2 - \sqrt{a}\sqrt{b} +$
$+ \sqrt{b}\sqrt{a} + (\sqrt{b})^2 =$
$= a - b$

Resolução

a) Sabendo que o conjugado de $(2-\sqrt{2})$ é $(2+\sqrt{2})$ e que, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$:

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\times(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})} = \frac{2\times(2-\sqrt{2})}{4-2} = \frac{2\times(2-\sqrt{2})}{2} = 2-\sqrt{2}.$$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}-2}{(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}\times(4-3\sqrt{2})}{(4+3\sqrt{2})\times(4-3\sqrt{2})} = \frac{-4\sqrt{2}+6}{-2} = 2\sqrt{2}-3$

Exercício n.º 6

1. Simplifique as seguintes expressões.

a) $2\sqrt{2}+8\sqrt{2}-5\sqrt{2}$ b) $7\sqrt{5}-\sqrt{5}-3\sqrt{5}$ c) $8\sqrt{17}+2\sqrt{17}-15\sqrt{17}$

d) $\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{48}$ e) $3\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$ f) $3\sqrt{8}-8\sqrt{18}+2\sqrt{72}$

g) $3\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{125}$ h) $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{108}$ i) $\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{5}$

2. Efectue as seguintes operações.

a) $\sqrt{16+9}-(4+2)\sqrt{9}$ b) $7-3\sqrt{4+12}+2\sqrt{6^2}$ c) $(\sqrt{2+3})^2-(\sqrt{36}+\sqrt{9})$

d) $\frac{5\sqrt{8}\times 12\sqrt{5}}{6\sqrt{16}\times 10\sqrt{10}}$ e) $\frac{(3+2)\sqrt{2}\times 4(\sqrt{3})^2}{6\times 3\sqrt{32}}$ f) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{40}}{\sqrt{5}}-\sqrt{8}+(\sqrt{5})^2$

3. Racionalize os denominadores das fracções seguintes:

a) $\frac{x}{\sqrt{x}}$, com $x>0$; b) $\frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$, com $a>0$; c) $\frac{3}{1+\sqrt{3}}$.

4. Efectue as seguintes operações.

a) $12\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{9}$ b) $8\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}$ c) $\sqrt{21}+\sqrt[4]{21^2}$

d) $8\sqrt[6]{12}-5\sqrt[6]{12}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}$ f) $\sqrt{\sqrt{3}}-\sqrt{2}+3\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{2^3}$

5. Calcule o valor das seguintes expressões.

a) $\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{4}$ b) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{a^3}$ c) $\sqrt[8]{5}\times\sqrt[8]{3^3}\times\sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt{2^3}:\sqrt{5^2}$ e) $\frac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{ab}}$ f) $\frac{\sqrt{a^2b^3c^5}}{\sqrt{a^4bc^3}}$

6. Calcule o valor das seguintes expressões.

a) $3\sqrt{2}(2\sqrt{3}-4\sqrt{12}-6\sqrt{27}+8\sqrt{48})$ b) $(4\sqrt{28}-3\sqrt{63})\times 5\sqrt{2}-(\sqrt{2}+6\sqrt{32})\times 2\sqrt{7}$

1 AVALIAÇÃO FORMATIVA

1. De entre as seguintes afirmações indique a falsa.

(A) 5 é um número natural.

(B) $\frac{1}{2}$ é um número racional.

(C) 5,7 é um número irracional.

(D) $\sqrt{3}$ é um número real.

2. Qual dos seguintes números está situado, na recta graduada, entre $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{4}$?

(A) $\frac{7}{8}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{11}{16}$ (D) $\frac{15}{16}$

3. Escreva o sinal < ou > entre os números.

a) $-1{,}7 ____ -7$

b) $\pi ____ \sqrt{17}$

c) $-\frac{8}{3} ____ -2{,}7$

d) $\sqrt{2} ____ 1{,}14$

4. Calcule as seguintes expressões pelo processo que entender mais adequado.

a) $-(-4)+6+(-4)+(+1)-(+3)$

b) $-1250-(-250)+225$

c) $100-200-[-(+200)]-1$

d) $-\left(\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)+1$

e) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{250}{500}-\left(-\frac{9}{6}\right)+5$

5. Simplifique e calcule.

a) $-5\times(-8):(-4)$

b) $(-3)+(-2)\times 10:(-2)$

c) $-4(-2-3)+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}:\left(-\frac{2}{10}\right)$

d) $-7-(-8)+\frac{2}{5}:2$

e) $(-2)+(-5)\times\frac{(-2)}{(-4)}\times(+2)\times(-1)$

6. Sabendo que $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ e $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$, calcule um valor aproximado por defeito às centésimas de:

a) $\sqrt{18}$; b) $\sqrt{20}$; c) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; d) $\sqrt{5}-3\sqrt{2}$.

7. Sabendo que o lado de um triângulo equilátero mede $2\sqrt{3}$ m, calcule um valor aproximado às décimas do seu perímetro.

8. Compare os seguintes radicais.

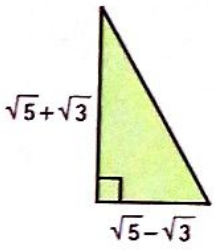
$\sqrt{2}$ _____ $\sqrt[3]{3}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3^2}$ _____ $\sqrt[4]{2^3}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{\frac{1}{5}}$ _____ $\sqrt[7]{\frac{2}{9}}$

9. Simplifique as expressões seguintes.

a) $\sqrt{50}$ b) $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\sqrt{200ab^3}$ d) $\sqrt{12xyz^2}$

10. Num triângulo rectângulo em que os catetos medem $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, calcule:

a) a medida da hipotenusa; b) a área do triângulo.



O desenho não está feito à escala.

11. Determine o lado do quadrado cuja área é igual a:

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt[3]{10}$; c) $4\sqrt{3}$.

12. Calcule as seguintes expressões.

a) $3\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{125}-\sqrt{72}+4\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{3}-9$

c) $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

d) $(8-3\sqrt{2})^2$

e) $(5\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}+4)$

f) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{7})(4\sqrt{2}+5\sqrt{7})$

g) $\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{40}}{\sqrt{5}}$

h) $\frac{(2\sqrt{3})^2-\sqrt{25}}{4(\sqrt{7})^2}$

13. Racionalize os denominadores das seguintes fracções.

a) $\frac{2+\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}$ b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

c) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ d) $\frac{2}{4+3\sqrt{2}}$

2 INEQUAÇÕES LINEARES E SISTEMAS DE INEQUAÇÕES LINEARES COM UMA VARIÁVEL

1. INTERVALOS REAIS

2. INEQUAÇÕES LINEARES COM UMA VARIÁVEL

3. SISTEMAS DE INEQUAÇÕES LINEARES COM UMA VARIÁVEL

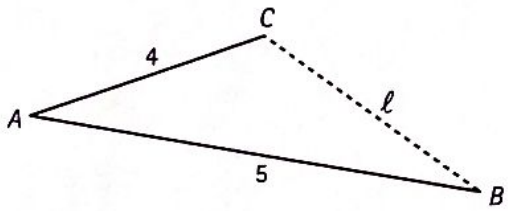
2 INEQUAÇÕES LINEARES E SISTEMAS DE INEQUAÇÕES LINEARES COM UMA VARIÁVEL

1. Intervalos reais

1.1. Noção de intervalo real

Pretende-se construir um triângulo em que dois dos seus lados tenham de comprimento 4 e 5 centímetros.

Qual deve ser o comprimento do terceiro lado, sabendo que é maior que 1 centímetro?



UM POUCO DE HISTÓRIA...

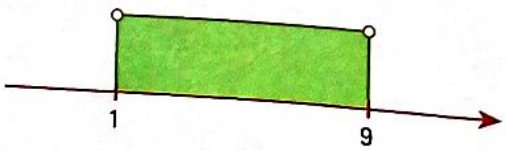
Os sinais $>$ (maior que) e $<$ (menor que) estão ligados ao matemático Thomaz Harriot (1560-1621) fundador da escola inglesa de Álgebra. No entanto, os sinais $\geqslant$ e $\leqslant$ viriam a surgir mais tarde, em 1734, com o francês Pierre Bouguer.

Tendo em conta que para construir um triângulo cada lado tem de ser menor que a soma dos outros dois (desigualdade triangular), então $\ell < 4 + 5 \iff \ell < 9$. Por outro lado, de acordo com as condições do enunciado, $\ell > 1$. Os valores que satisfazem, simultaneamente, as duas condições têm de ser maiores que 1 e menores que 9, isto é, o comprimento do terceiro lado pode tomar todos os valores entre 1 e 9.

Simbolicamente,

$$1 < \ell < 9$$

Uma representação na recta graduada (eixo real) pode ser a seguinte:



Nos pontos de abcissa 1 e 9 aparecem "bolas abertas" para indicar que os números 1 e 9 **não** pertencem ao conjunto-solução.

Outra forma de representar o conjunto de números mencionados é sob a forma de **intervalos de números reais**:

$$\{\ell \in \mathbb{R} : 1 < \ell < 9\} =]1\ ,\ 9[$$

↓

Intervalo de números reais

O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, assim como qualquer outro conjunto, possui subconjuntos denominados **intervalos reais** que podem ser representados por desigualdades.

Consideremos os seguintes conjuntos para os números reais a e b, com $a < b$.

Intervalo aberto de extremos a e b:

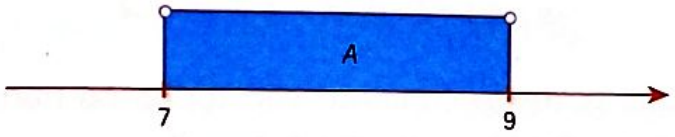
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores que a e menores que b.

EXEMPLO:

$A = \{x \in \mathbb{R} : 7 < x < 9\}$

Representação do conjunto A no eixo real:



Representação do conjunto A sob a forma de intervalo: $A =]7, 9[$.

Pela mesma razão das "bolas abertas" na representação no eixo real, os parêntesis rectos estão virados para fora nos extremos do intervalo. Por isso, o intervalo diz-se **aberto**.

Intervalo fechado de extremos a e b:

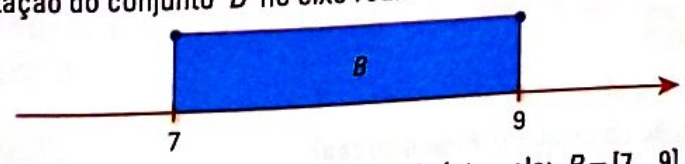
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$$

Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores ou iguais que a e menores ou iguais que b.

EXEMPLO:

$B = \{x \in \mathbb{R} : 7 \leqslant x \leqslant 9\}$

Representação do conjunto B no eixo real:



Representação do conjunto B sob a forma de intervalo: $B = [7, 9]$.

Os extremos do intervalo pertencem ao conjunto B e, por isso, os parêntesis rectos estão virados para dentro, na representação sob a forma de intervalos. Pela mesma razão, as "bolas" estão fechadas na representação no eixo real, logo, o intervalo diz-se **fechado**.

Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita:

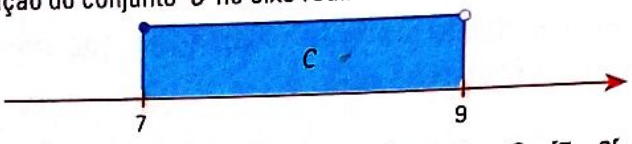
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$$

Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores ou iguais que a e menores que b.

EXEMPLO:

$C = \{x \in \mathbb{R} : 7 \leqslant x < 9\}$

Representação do conjunto C no eixo real:



Representação do conjunto C sob a forma de intervalo: $C = [7, 9[$.

Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$

Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores que a e menores ou iguais que b.

EXEMPLO:

$D = \{x \in \mathbb{R} : 7 < x \leqslant 9\}$

Representação do conjunto D no eixo real:

Representação do conjunto D sob a forma de intervalo: $D =]7, 9]$.

UM POUCO DE HISTÓRIA...

O símbolo que indica o número infinito, ∞, foi proposto pelo matemático inglês John Wallis em 1655 no *Tractatus de Sectionibus Conicis*. Este símbolo tem a forma de uma curva chamada "lemniscata de Bernoulli" (oito deitado).

Semi-intervalo fechado à direita:

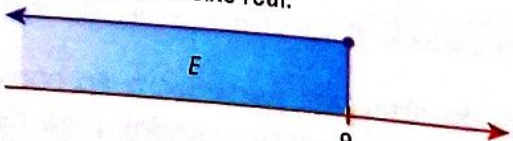
$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$$

Os elementos deste conjunto são todos os números reais menores ou iguais que b.

EXEMPLO:

$E = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 9\}$

Representação do conjunto E no eixo real:



Representação do conjunto E sob a forma de intervalo: $E =]-\infty, 9]$

↓

O símbolo $-\infty$ indica que o intervalo é ilimitado à esquerda

Semi-intervalo aberto à direita:

$$]-\infty,\ b[= \{x \in \mathbb{R} :\ x < b\}$$

Os elementos deste conjunto são todos os números reais menores que b.

EXEMPLO:

$F = \{x \in \mathbb{R} :\ x < 9\}$

Representação do conjunto F no eixo real:

Representação do conjunto F sob a forma de intervalo: $F =]-\infty, 9[$.

Semi-intervalo fechado à esquerda:

$$[a,\ +\infty[= \{x \in \mathbb{R} :\ x \geqslant a\}$$

Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores ou iguais que a.

EXEMPLO:

$G = \{x \in \mathbb{R} :\ x \geqslant 7\}$

Representação do conjunto G no eixo real:

Representação do conjunto G sob a forma de intervalo: $G = [7,\ +\infty[$.

O símbolo $+\infty$ indica que o intervalo é ilimitado à direita.

Semi-intervalo aberto à esquerda:

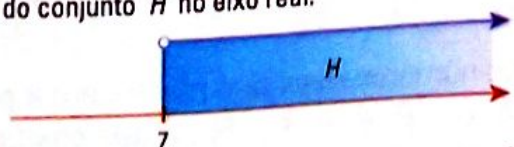
$$]a,\ +\infty[= \{x \in \mathbb{R} :\ x > a\}$$

Os elementos deste conjunto são todos os números reais maiores que a.

EXEMPLO:

$H = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 7\}$

Representação do conjunto H no eixo real:



Representação do conjunto H sob a forma de intervalo: $H =]7,\ +\infty[$.

Exercício n.º 1

1. Represente no eixo real os seguintes intervalos.

   $A=[0,3]$ $\quad B=\left]-\frac{2}{3},5\right[$ $\quad C=[-\sqrt{2},-1[$ $\quad D=]-4,0]$

2. Indique dois números:

   a) inteiros que pertençam ao intervalo $[1,3[$;

   b) racionais do intervalo $]0{,}4;0{,}5[$;

   c) um racional e outro irracional do intervalo $]-\sqrt{5},0[$.

3. Represente no eixo real e sob a forma de intervalo os seguintes conjuntos.

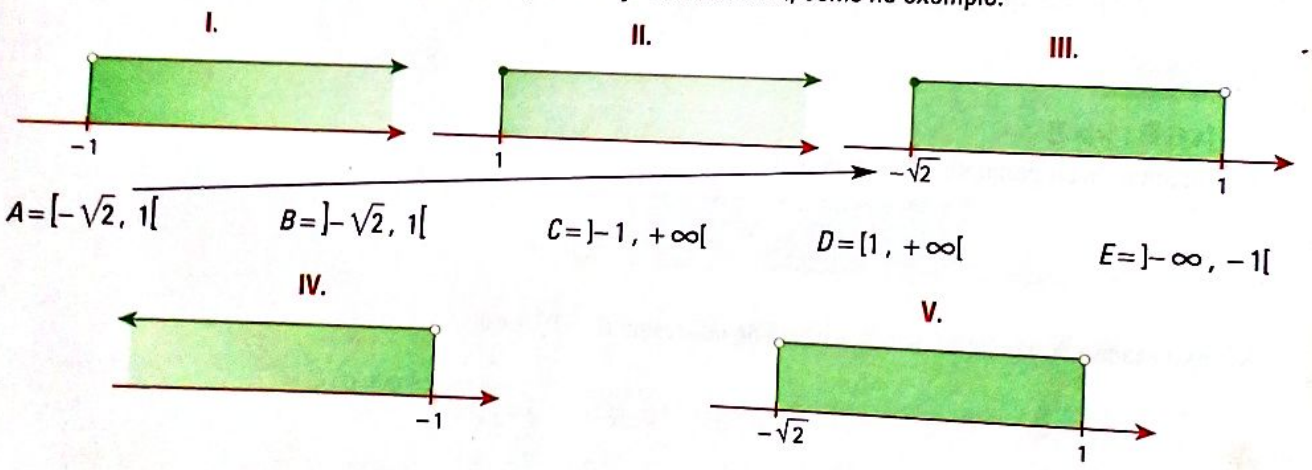
   $A=\{x\in\mathbb{R}: x\geqslant -2\}$ $\quad B=\left\{x\in\mathbb{R}: x<\frac{7}{2}\right\}$ $\quad C=\{x\in\mathbb{R}: x>-\sqrt{3}\}$ $\quad D=\left\{x\in\mathbb{R}: -\frac{1}{2}\leqslant x<0\right\}$

4. Complete com os símbolos $\in$ ou $\notin$ de modo a obter afirmações verdadeiras.

   a) 4 _____ $[2,5]$ $\quad$ b) -2 _____ $[-2,+\infty[$ $\quad$ c) 0 _____ $\left[-7,-\frac{1}{2}\right[$

   d) 3 _____ $]-\infty,3[$ $\quad$ e) $\frac{1}{5}$ _____ $[-1,1[$ $\quad$ f) $\frac{10}{2}$ _____ $[-5,5[$

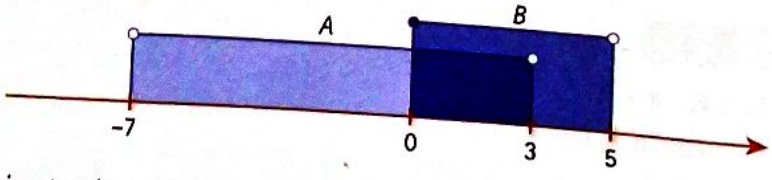
5. Associe cada um dos intervalos à respectiva representação no eixo real, como no exemplo.



$A=[-\sqrt{2},1[$ $\quad B=]-\sqrt{2},1[$ $\quad C=]-1,+\infty[$ $\quad D=[1,+\infty[$ $\quad E=]-\infty,-1[$

1.2. Reunião e intersecção de intervalos reais

Consideremos os conjuntos $A=]-7,3[$ e $B=[0,5[$ e suas representações no eixo real.



O conjunto dos números reais que pertencem a **pelo menos** um dos conjuntos A ou B é $]-7,5[$, a que chamamos **conjunto reunião** dos intervalos A e B e escreve-se $A\cup B=]-7,5[$.

O conjunto dos números reais que pertencem, **simultaneamente**, aos conjuntos A e B é $[0, 3[$. A este conjunto dá-se o nome de **conjunto intersecção** dos intervalos A e B e escreve-se $A \cap B = [0, 3[$.

OBSERVAÇÃO:
Na representação geométrica, o conjunto reunião tem pelo menos uma das cores e o conjunto intersecção tem as duas cores.

EXEMPLO:

Determine os conjuntos reunião e intersecção de:

a) $A =]1, 7[$ e $B =]6, 8]$;

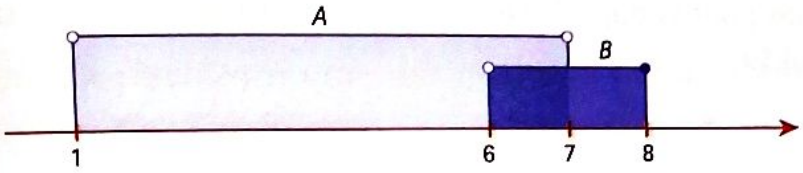
b) $A =]-\infty, 0[$ e $B =]-\infty, 5[$;

c) $A = [2, +\infty[$ e $B =]-5, -1[$;

d) $A =]-\infty, 5[$ e $B = [-4, +\infty[$.

Resolução

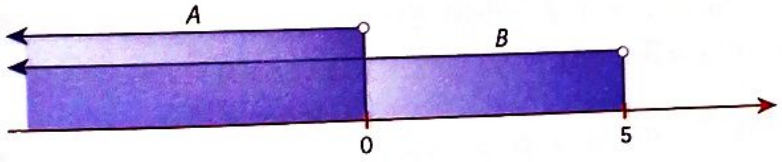
a)



$A \cup B =]1, 8]$

$A \cap B =]6, 7[$

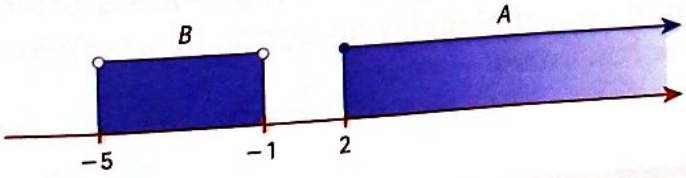
b)



$A \cup B =]-\infty, 5[$

$A \cap B =]-\infty, 0[$

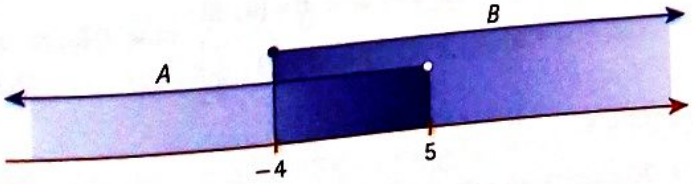
c)



$A \cup B =]-5, -1[\cup [2, +\infty[$

$A \cap B = \emptyset$

d)



$A \cup B =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

$A \cap B = [-4, 5[$

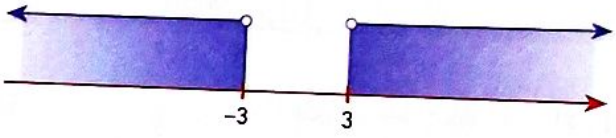
1.3. Conjunção e disjunção de condições

A condição $-4 \leqslant x < 5$ é equivalente à condição $x \geqslant -4 \wedge x < 5$.

lê-se "e"

O conjunto-solução desta **conjunção** de condições é o conjunto dos números reais que verificam as duas condições e corresponde à intersecção dos dois intervalos, ou seja, $[-4, +\infty[\cap]-\infty, 5[= [-4, 5[$.

A condição $|x| > 3$ representa, geometricamente, o conjunto de pontos cuja distância à origem é maior que 3 unidades, ou seja:



O conjunto-solução da condição referida é o conjunto dos números reais que verificam, pelo menos, uma das condições, $x < -3$ ou $x > 3$ e pode escrever-se, simbolicamente, $x < -3 \vee x > 3$.

lê-se "ou"

A **disjunção** de condições referida corresponde à reunião dos conjuntos, ou seja, $]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

A **conjunção** de condições corresponde à **intersecção** de conjuntos e a **disjunção** de condições corresponde à **reunião** de conjuntos.

Exercício n.º 2

1. Determine os conjuntos reunião e intersecção dos conjuntos:

   a) $A =]-10, 0]$ e $B = [0, 5]$;

   b) $A =]-20, 0[$ e $B = [0, 5]$;

   c) $A =]-\infty, 5]$ e $B =]3, +\infty[$;

   d) $A =]-2, 2]$ e $B = \left[3, \frac{7}{2}\right]$.

2. Indique sob a forma de intervalo as seguintes condições.

   a) $x > 5 \vee x > -1$

   b) $x < -3 \vee x \leqslant 0$

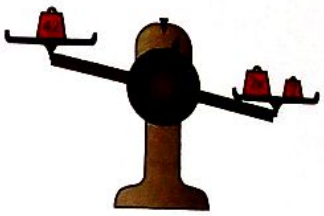
   c) $x < 0 \wedge x \geqslant -4$

   d) $x \geqslant 3 \wedge x \leqslant 3$

2. Inequações lineares com uma variável

2.1. Noção de inequação linear com uma variável

Consideremos o problema seguinte:



Qual o "peso" de um objecto cujo dobro aumentado de 7 unidades é menor que 42 ?

O problema proposto pode ser traduzido pela expressão $2x + 7 < 42$ onde a variável x representa o "peso" do objecto. A expressão referida designa-se por **inequação linear**.

Tal como a equação linear, a **inequação linear** é uma expressão do 1.º grau, só que, em vez do sinal igual, tem um sinal de desigualdade.

Uma inequação é uma desigualdade entre expressões que envolve variáveis.

A terminologia que usamos nas equações mantém-se nas inequações:

Inequação	1.º membro	2.º membro	Termos	Incógnita
$2x+7<42$	$2x+7$	42	$2x$, $+7$ e $+42$	x

Por tentativas, podemos verificar que existem várias soluções, ou seja, vários números que satisfazem a inequação.

Por exemplo:

– para $x = -5 \implies 2(-5) + 7 < 42$ (verdadeiro);

– para $x = 0 \implies 2 \times 0 + 7 < 42$ (verdadeiro).

Os seguintes números não são soluções da inequação, como podemos verificar:

– para $x = 30 \implies 2 \times 30 + 7 < 42$ (falso);

– para $x = 1000 \implies 2 \times 1000 + 7 < 42$ (falso).

Diz-se então que -5 , 0 , ... são soluções, ao contrário de 30 , 1000 , ... que não são soluções da inequação.

A solução de uma inequação são todos os valores que atribuídos à incógnita satisfazem a inequação, isto é, transformam-na numa desigualdade numérica verdadeira.

EXEMPLOS:

1. Das inequações seguintes, indique o 1.º e o 2.º membros e os seus termos.

   a) $4-x>2x$ b) $9\leqslant\frac{1}{2}y-2$

2. Averigúe se 2 e -1 são soluções das inequações seguintes.

   a) $\frac{1}{2}(x+1)<-x+2$ b) $(x-1)^2-1>x^2+3$

Resolução

1. a) 1.º membro: $4-x$; 2.º membro: $2x$; termos: 4, $-x$ e $2x$;

   b) 1.º membro: 9; 2.º membro: $\frac{1}{2}y-2$; termos: 9, $\frac{1}{2}y$ e -2.

2. a) Para $x=2$, $\frac{1}{2}(2+1)<-2+2 \iff \frac{3}{2}<0$ (falso).

   Assim, 2 não é solução da inequação.

   Para $x=-1$, $\frac{1}{2}(-1+1)<-(-1)+2 \iff 0<3$ (verdadeiro).

   Assim, -1 é solução da inequação.

   b) Para $x=2$, $(2-1)^2-1>2^2+3 \iff 0>7$ (falso).

   Assim, 2 não é solução da inequação.

   Para $x=-1$, $(-1-1)^2-1>(-1)^2+3 \iff 3>4$ (falso).

   Assim, -1 não é solução da inequação.

2.2. Resolução de inequações lineares com uma variável

Na classe anterior, aprendemos a resolver equações lineares usando os seguintes princípios de equivalência:

- **Princípio da adição:** adicionando (ou subtraindo) a ambos os membros da equação o mesmo número obtemos uma equação equivalente à dada;
- **Princípio da multiplicação:** multiplicando ambos os membros da equação pelo mesmo número não nulo obtemos uma equação equivalente à dada.

Estes princípios continuam a ser válidos para uma inequação linear.

OBSERVAÇÃO:
Duas inequações lineares são **equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto-solução

Princípio da adição: adicionando (subtraindo) a ambos os membros de uma inequação o mesmo número obtemos uma inequação equivalente à dada.

Como consequência do princípio da adição, podemos formular a seguinte regra prática:

Se numa inequação, passarmos qualquer termo de um membro para outro com mudança de sinal, obtemos uma inequação equivalente à dada.

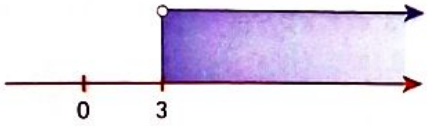
EXEMPLO:

Resolva as seguintes inequações.

a) $x+4>7$ b) $x-10\leqslant 4$ c) $7-2x<1-3x$

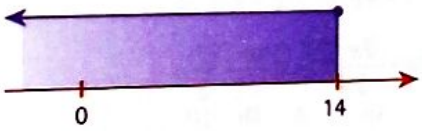
Resolução

a) $x+4>7 \iff x>7-4 \iff x>3$



Solução: $x\in]3, +\infty[$

b) $x-10\leqslant 4 \iff x\leqslant 4+10 \iff x\leqslant 14$



Solução: $x\in]-\infty, 14]$

c) $7-2x<1-3x \iff -2x+3x<1-7 \iff x<-6$

Solução: $x\in]-\infty, -6[$

Princípio da multiplicação: multiplicando ambos os membros de uma inequação pelo mesmo número diferente de zero obtemos uma inequação equivalente à dada. Contudo:

- se o número for positivo, **mantém-se** o sentido da desigualdade;
- se o número for negativo, **inverte-se** o sentido da desigualdade.

OBSERVAÇÃO:

Na desigualdade $5>4$ se multiplicarmos ambos os membros por 2, continuamos a ter uma desigualdade verdadeira porque $5\times 2>4\times 2 \iff 10>8$. Contudo, se multiplicarmos por -2, a desigualdade só se mantém verdadeira se se inverter o sentido da desigualdade, ou seja:
$5>4 \iff 5\times(-2)<4\times(-2)$
$\iff -10<-8$.

EXEMPLO:

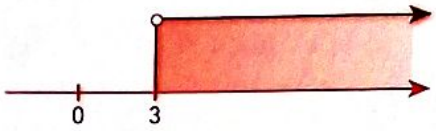
Resolva as seguintes inequações lineares.

a) $2x > 6$ b) $-7x \leqslant 3$

c) $\frac{7x}{3} - 4 \leqslant x - \frac{2}{3}$ d) $\frac{2x}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{4x}{3} - 4\right) > x + \frac{7}{5}$

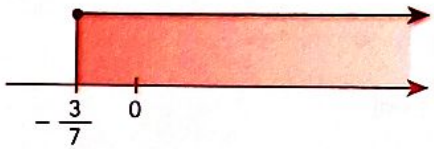
Resolução

a) $2x > 6 \iff x > \frac{6}{2} \iff x > 3$



Solução: $x \in]3, +\infty[$

b) $-7x \leqslant 3 \iff 7x \geqslant -3 \iff x \geqslant -\frac{3}{7}$

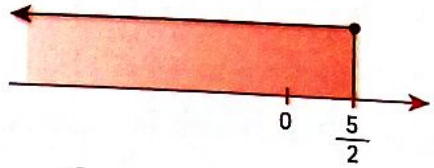


Solução: $x \in \left[-\frac{3}{7}, +\infty\right[$

c) $\frac{7x}{3} - 4 \leqslant x - \frac{2}{3} \iff \underset{(1)}{\frac{7x}{3}} - \underset{(3)}{\frac{4}{1}} \leqslant \underset{(3)}{\frac{x}{1}} - \underset{(1)}{\frac{2}{3}}$

$\iff 7x - 12 \leqslant 3x - 2 \iff 7x - 3x \leqslant 12 - 2$

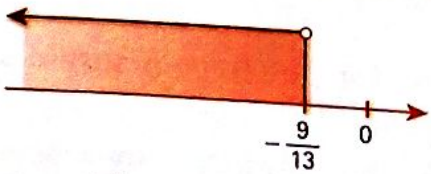
$\iff 4x \leqslant 10 \iff x \leqslant \frac{10}{4} \iff x \leqslant \frac{5}{2}$



Solução: $x \in \left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$

d) $\frac{2x}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{4x}{3} - 4\right) > x + \frac{7}{5} \iff \underset{(3)}{\frac{2x}{5}} - \underset{(1)}{\frac{4x}{15}} + \underset{(3)}{\frac{4}{5}} > \underset{(15)}{\frac{x}{1}} + \underset{(3)}{\frac{7}{5}} \iff$

$\iff 6x - 4x + 12 > 15x + 21 \iff -13x > 9 \iff 13x < -9 \iff x < -\frac{9}{13}$



Solução: $x \in \left]-\infty, -\frac{9}{13}\right[$

A aplicação dos princípios de equivalência das inequações lineares conduz à sua resolução, isto é, à determinação do seu conjunto-solução.

De um modo geral, qualquer inequação linear pode ser resolvida pelo seguinte procedimento:

1.º Desembaraçar de parêntesis;

2.º Desembaraçar de denominadores;

3.º Juntar os termos com incógnita num dos membros e os que não têm incógnita no outro membro utilizando o princípio de adição;

4.º Efectuar os cálculos para simplificar as expressões em cada membro;

5.º Dividir ambos os membros pelo coeficiente da incógnita utilizando o princípio da multiplicação;

6.º Representar a solução no eixo real e sob a forma de intervalo.

EXEMPLO:

Resolva as seguintes inequações e represente a solução no eixo real e sob a forma de intervalo.

a) $7+4x-5>2x-7$

b) $12x+5-x\leqslant 7x-4$

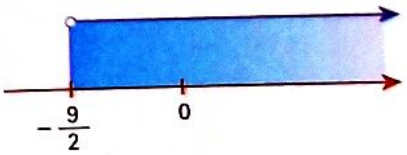
c) $4(2-x)>3(x-4)$

d) $\frac{3-x}{3}-\frac{2(x-1)}{4}\geqslant\frac{1}{12}-\frac{4(x-1)}{6}$

Resolução

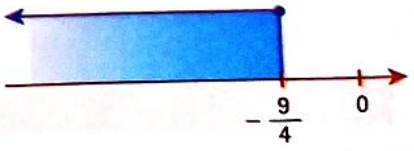
a) $7+4x-5>2x-7 \iff 4x-2x>5-7-7 \iff 2x>-9 \iff x>-\frac{9}{2}$

Solução: $x\in\left]-\frac{9}{2},+\infty\right[$



b) $12x+5-x\leqslant 7x-4 \iff 12x-x-7x\leqslant -4-5 \iff 4x\leqslant -9 \iff x\leqslant -\frac{9}{4}$

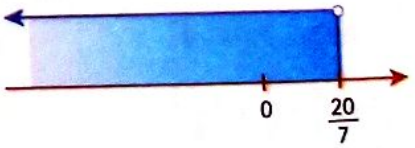
Solução: $x\in\left]-\infty,-\frac{9}{4}\right]$



c) $4(2-x)>3(x-4) \iff 8-4x>3x-12 \iff -4x-3x>-12-8 \iff$

$\iff -7x>-20 \iff 7x<20 \iff x<\frac{20}{7}$

Solução: $x\in\left]-\infty,\frac{20}{7}\right[$

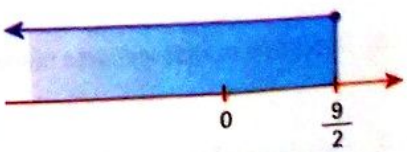


d) $\frac{3-x}{3}-\frac{2(x-1)}{4}\geqslant\frac{1}{12}-\frac{4(x-1)}{6} \iff \underset{(4)}{\frac{3-x}{3}}-\underset{(3)}{\frac{2x-2}{4}}\geqslant\underset{(1)}{\frac{1}{12}}-\underset{(2)}{\frac{4x-4}{6}} \iff$

$\iff 4(3-x)-3(2x-2)\geqslant 1-2(4x-4) \iff 12-4x-6x+6\geqslant 1-8x+8 \iff$

$\iff -2x\geqslant -9 \iff 2x\leqslant 9 \iff x\leqslant\frac{9}{2}$

Solução: $x\in\left]-\infty,\frac{9}{2}\right]$



A aplicação dos princípios de equivalência das inequações lineares conduz à sua resolução, isto é, à determinação do seu conjunto-solução.

De um modo geral, qualquer inequação linear pode ser resolvida pelo seguinte procedimento:

1.º Desembaraçar de parêntesis;

2.º Desembaraçar de denominadores;

3.º Juntar os termos com incógnita num dos membros e os que não têm incógnita no outro membro utilizando o princípio de adição;

4.º Efectuar os cálculos para simplificar as expressões em cada membro;

5.º Dividir ambos os membros pelo coeficiente da incógnita utilizando o princípio da multiplicação;

6.º Representar a solução no eixo real e sob a forma de intervalo.

EXEMPLO:

Resolva as seguintes inequações e represente a solução no eixo real e sob a forma de intervalo.

a) $7+4x-5>2x-7$

b) $12x+5-x\leqslant 7x-4$

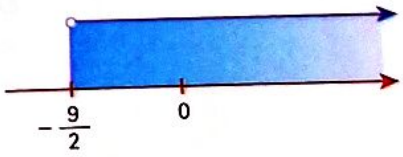
c) $4(2-x)>3(x-4)$

d) $\frac{3-x}{3}-\frac{2(x-1)}{4}\geqslant\frac{1}{12}-\frac{4(x-1)}{6}$

Resolução

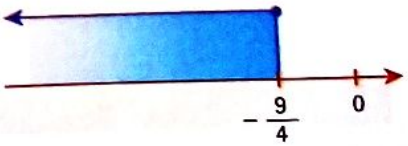
a) $7+4x-5>2x-7 \iff 4x-2x>5-7-7 \iff 2x>-9 \iff x>-\frac{9}{2}$

Solução: $x\in\left]-\frac{9}{2},+\infty\right[$



b) $12x+5-x\leqslant 7x-4 \iff 12x-x-7x\leqslant -4-5 \iff 4x\leqslant -9 \iff x\leqslant -\frac{9}{4}$

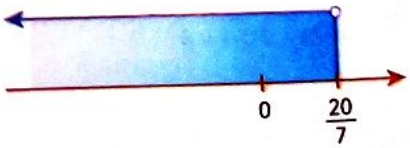
Solução: $x\in\left]-\infty,-\frac{9}{4}\right]$



c) $4(2-x)>3(x-4) \iff 8-4x>3x-12 \iff -4x-3x>-12-8 \iff$

$\iff -7x>-20 \iff 7x<20 \iff x<\frac{20}{7}$

Solução: $x\in\left]-\infty,\frac{20}{7}\right[$

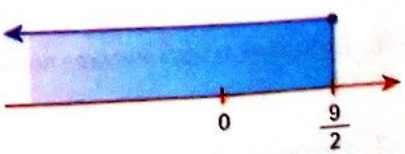


d) $\frac{3-x}{3}-\frac{2(x-1)}{4}\geqslant\frac{1}{12}-\frac{4(x-1)}{6} \iff \underset{(4)}{\frac{3-x}{3}}-\underset{(3)}{\frac{2x-2}{4}}\geqslant\underset{(1)}{\frac{1}{12}}-\underset{(2)}{\frac{4x-4}{6}} \iff$

$\iff 4(3-x)-3(2x-2)\geqslant 1-2(4x-4) \iff 12-4x-6x+6\geqslant 1-8x+8 \iff$

$\iff -2x\geqslant -9 \iff 2x\leqslant 9 \iff x\leqslant\frac{9}{2}$

Solução: $x\in\left]-\infty,\frac{9}{2}\right]$



2.3. Classificação de inequações lineares com uma variável

Atendendo à existência ou não da solução, as inequações lineares a uma incógnita podem ser classificadas em inequações **impossíveis**, **possíveis e determinadas** ou **possíveis e indeterminadas**.

EXEMPLO:

Resolva e classifique cada uma das seguintes inequações lineares.

a) $2(3x-4)>6x+1$ b) $5x-2<5(x+1)+7$ c) $2x-5x\geqslant 3+x$

Resolução

a) $2(3x-4)>6x+1 \iff 6x-8>6x+1 \iff 0x>9 \iff 0>9$

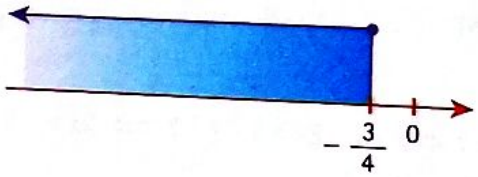
A desigualdade obtida é falsa para qualquer valor de x, por isso a inequação diz-se **impossível**.

b) $5x-2<5(x+1)+7 \iff 5x-2<5x+5+7 \iff 0x<14 \iff 0<14$

A desigualdade obtida é verdadeira para todo o valor de x, por isso a inequação diz-se **possível e indeterminada**.

c) $2x-5x\geqslant 3+x \iff 2x-5x-x\geqslant 3 \iff -4x\geqslant 3 \iff 4x\leqslant -3 \iff x\leqslant -\frac{3}{4}$

Solução: $x\in\left]-\infty, -\frac{3}{4}\right]$



A solução da inequação é possível e determinada, logo, a inequação diz-se **possível e determinada**.

Exercício n.º 3

1. Resolva e classifique as seguintes inequações lineares.

a) $2x+3>x-4$ b) $x+2\leqslant x-3+4x$ c) $(2x-1)-(3x+2)+2>2x-2$

d) $\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\geqslant\frac{x-1}{6}$ e) $x+2-\frac{4}{5}\leqslant\frac{x-1}{5}$ f) $\frac{3(x-1)}{2}+\frac{x+2}{3}<\frac{1}{6}$

g) $\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(2x-1)+1$ h) $1-\frac{x}{3}\geqslant -3x-(5-4x)$ i) $\frac{9-3x}{4}+\frac{2x+1}{6}<1-\frac{x-3}{2}$

2. Determine os dois menores números inteiros que verificam a inequação $\frac{x}{3}-4<2x+2$.

3. Calcule os três menores números inteiros que satisfazem a inequação $\frac{2(x-1)}{}+\frac{x-3}{}<4$

3. Sistemas de inequações lineares com uma variável

3.1. Noção de sistema de inequações lineares com uma variável

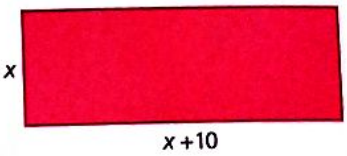
Consideremos o problema:

O António pretende construir um curral rectangular para as suas cabras, cujo comprimento é 10 metros maior que a largura.

Quais devem ser as dimensões do curral se o seu perímetro tem de ser menor que 42 metros?

Resolução

O perímetro de qualquer rectângulo é $P = 2(c + \ell)$, pelo que, neste caso,



$$P = 2(x + x + 10) = 2(2x + 10) = 4x + 20$$

Como o perímetro de um rectângulo é sempre um número positivo e, de acordo com o enunciado do problema, não deve exceder os 42 metros, então:

$$4x + 20 > 0 \text{ e } 4x + 20 < 42 .$$

As duas inequações devem ser satisfeitas para os mesmos valores da incógnita x.

Este conjunto de duas inequações, cuja solução é dada pela intersecção dos conjuntos-solução das duas inequações lineares, designa-se por **sistema de inequações lineares com uma variável** e escreve-se:

$$\begin{cases} 4x + 20 > 0 \\ 4x + 20 < 42 \end{cases}$$

3.2. Resolução de sistemas de inequações lineares com uma variável

O procedimento da resolução de um sistema de inequações lineares pode ser o seguinte:

1.º Resolve-se cada inequação do sistema separadamente;

2.º Representam-se as soluções das inequações do sistema no mesmo eixo real;

3.º A solução do sistema será a parte do eixo real que é comum às soluções das inequações do sistema. Esta solução é representada sob a forma de intervalos.

EXEMPLO:

Resolva e classifique os seguintes sistemas de inequações lineares.

a) $\begin{cases} x-1>0 \\ -2x \geqslant -4 \end{cases}$

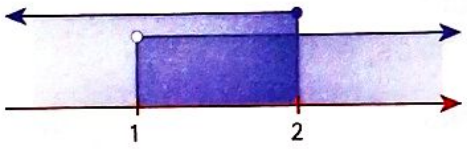
b) $\begin{cases} \frac{x}{2}+1<5-\frac{2x}{3} \\ \frac{3}{2}(x+1) \geqslant x-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} \leqslant 1+4x \\ 2(x-3)+\frac{1}{2}(x+1)<0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{x+2}{2} \geqslant \frac{x}{6} \\ \frac{1+2x}{2}>\frac{2x+2}{8}-\frac{3}{4} \end{cases}$

Resolução

a) $\begin{cases} x-1>0 \\ -2x \geqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 2x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x \leqslant 2 \end{cases}$

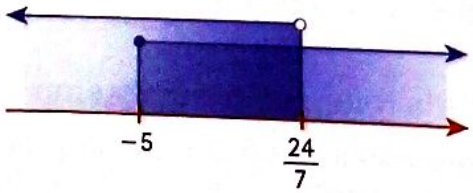


Solução: $x \in]1, 2]$

Sistema possível e determinado

b) $\begin{cases} \frac{x}{2}+1<5-\frac{2x}{3} \\ \frac{3}{2}(x+1) \geqslant x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underset{(3)}{\frac{x}{2}}+\underset{(6)}{\frac{1}{1}}<\underset{(6)}{\frac{5}{1}}-\underset{(2)}{\frac{2x}{3}} \\ \underset{(1)}{\frac{3x}{2}}+\underset{(1)}{\frac{3}{2}} \geqslant \underset{(2)}{\frac{x}{1}}-\underset{(2)}{\frac{1}{1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6<30-4x \\ 3x+3 \geqslant 2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4x<30-6 \\ 3x-2x \geqslant -2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x<24 \\ x \geqslant -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{24}{7} \\ x \geqslant -5 \end{cases}$

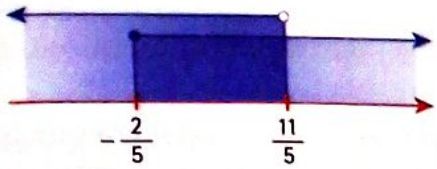


Solução: $x \in \left[-5, \frac{24}{7}\right[$

Sistema possível e determinado

c) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} \leqslant 1+4x \\ 2(x-3)+\frac{1}{2}(x+1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \leqslant 3+12x \\ \underset{(2)}{\frac{2}{1}}x-\underset{(2)}{\frac{6}{1}}+\underset{(1)}{\frac{x}{2}}+\underset{(1)}{\frac{1}{2}}<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-12x \leqslant 3+1 \\ 4x-12+x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x \leqslant 4 \\ 4x+x<12-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x \geqslant -4 \\ 5x<11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\frac{2}{5} \\ x<\frac{11}{5} \end{cases}$



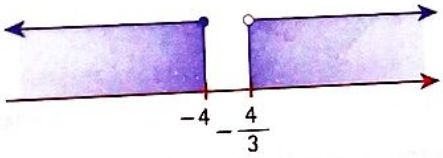
Solução: $x \in \left[-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right[$

Sistema possível e determinado

d) $\begin{cases} \underset{(2)}{\frac{x-1}{3}}-\underset{(3)}{\frac{x+2}{2}} \geqslant \underset{(1)}{\frac{x}{6}} \\ \underset{(4)}{\frac{1+2x}{2}}>\underset{(1)}{\frac{2x+2}{8}}-\underset{(2)}{\frac{3}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)-3(x+2) \geqslant x \\ 4+8x>2x+2-6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2-3x-6 \geqslant x \\ 4+8x>2x+2-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3x-x \geqslant 6+2 \\ 8x-2x>2-6-4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geqslant 8 \\ 6x>-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leqslant -8 \\ 6x>-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\frac{8}{2} \\ x>-\frac{8}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -4 \\ x>-\frac{4}{3} \end{cases}$



Solução: $x \in \varnothing$

Sistema impossível

Exercício n.º 4

Resolva os seguintes sistemas de inequações lineares.

a) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{x-1}{3}>1 \\ \frac{2x-12}{3}<2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-\frac{x+4}{3}<1 \\ 1>\frac{3x-1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2<3x-\frac{1}{4}(x-6) \\ 2x+3<1-(2x+2) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{2(x-2)}{3}-\frac{3(x+1)}{2}<\frac{x-1}{2}+1 \\ 3-\frac{2(x+2)}{3}>x+\frac{x-3}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x-3}{4}-\frac{3(1-2x)}{2} \geqslant 1 \\ \frac{2}{3}(x+3) \geqslant \frac{1}{2}(2x-1)-2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 1-x \leqslant \frac{x+1}{3} \\ 1+\frac{3(1-x)}{4}>4 \end{cases}$

3.3. Resolução de problemas que envolvam inequações lineares e sistemas de inequações lineares com uma variável

O procedimento da resolução de problemas usando inequações é o seguinte:

1.º Definição por escrito do significado da variável (incógnita);
2.º Formulação da inequação ou inequações que traduzem o problema;
3.º Resolução da inequação ou das inequações;
4.º Análise da solução em relação à definição da incógnita;
5.º Formulação da resposta no contexto do problema.

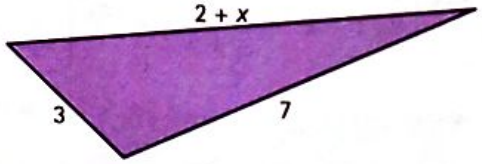
EXEMPLOS:

1. Determine os três menores números que verificam a inequação:

$$\frac{1+2x}{2} > \frac{2x+2}{8} - \frac{3}{4}$$

2. Determine o maior número inteiro que aumentado da sua terça parte é menor que a sua metade aumentada de duas unidades.

3. Considere o seguinte triângulo:

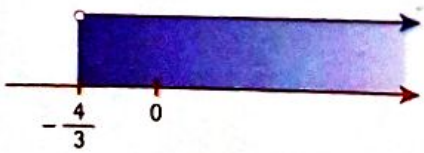


Dentro das condições de existência do triângulo, quais os valores possíveis para x?

4. Por uma mensagem dos Estados Unidos da América para Moçambique, via fax, a empresa Correios de Moçambique cobra 1,37 dólares americanos pela primeira página e 0,67 dólares pelas restantes, completas ou não.
Qual é o número máximo de páginas de uma dessas mensagens, para que o seu preço não ultrapasse os 10 dólares americanos?

Resolução

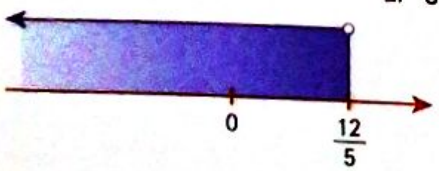
1. Seja x um número inteiro.



$$\frac{1+2x}{2} > \frac{2x+2}{8} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(1+2x) > 2x+2-6 \Leftrightarrow 4+8x > 2x+2-6$$
$$\Leftrightarrow 8x-2x > 2-6-4 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{6} \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$$

R.: Os três menores números inteiros de x são: -1, 0 e 1.

2. Seja x um número inteiro.

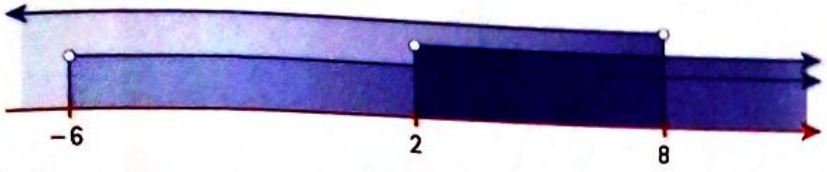


$$\frac{x}{1} + \frac{1}{3}x < \frac{1}{2}x + \frac{2}{1} \Leftrightarrow 6x+2x < 3x+12 \Leftrightarrow 5x < 12 \Leftrightarrow x < \frac{12}{5}$$

R.: O maior número inteiro é 2.

3. Para ser possível construir o triângulo, os seus lados têm de respeitar a desigualdade triangular.

$$\begin{cases} 2+x<3+7 \\ 3<2+x+7 \\ 7<2+x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3+7-2 \\ -x<2+7-3 \\ -x<2+3-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<8 \\ -x<6 \\ -x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<8 \\ x>-6 \\ x>2 \end{cases}$$



R.: Os valores possíveis são: $2<x<8$.

4. Seja x o número de mensagens.

$1{,}37+0{,}67x \leqslant 10 \Leftrightarrow 0{,}67x \leqslant 10-1{,}37 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{8{,}63}{0{,}67} \Leftrightarrow x \leqslant 12{,}9$

R.: O número máximo de mensagens é 12.

Exercício n.º 5

1. Determine os valores reais de x, de tal modo que a expressão $\frac{5-4x}{2}$ seja:

   a) positiva;

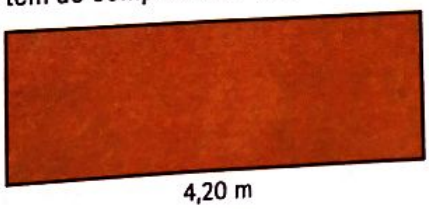
   b) não negativa mas inferior a 1.

2. Determine:

   a) os maiores dois números pares consecutivos cuja soma é menor que 100;

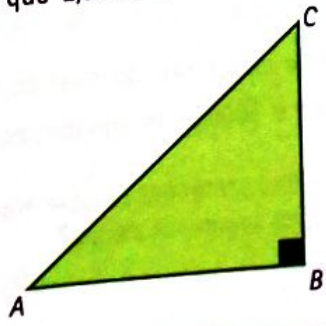
   b) os menores dois números ímpares consecutivos cuja soma é maior que 500.

3. Um dos lados de uma sala rectangular tem de comprimento 4,20 metros.



Qual deve ser o comprimento do outro lado, de modo que a área da sala esteja compreendida entre 35 e 40 m²?

4. Num triângulo rectângulo $[ABC]$, sabe-se que $2{,}5\text{ cm} < \overline{AB} < 2{,}6\text{ cm}$ e que $3{,}1\text{ cm} < \overline{BC} < 3{,}2\text{ cm}$.



Determine entre que valores pode variar o comprimento da hipotenusa.

5. A Rita e a Inês tinham o mesmo número de tiras de medula para fazer uma esteira.

A Rita deu a sexta parte e ficou com menos de 61 tiras e a Inês deu a oitava parte das suas e ficou com mais de 63.

Quantas tiras de medula tinham cada uma?

6. O Carlos trabalha como *disc-jockey* (DJ) e para animar a festa cobra uma taxa fixa de 100,00 Mt e 20,00 Mt por hora. O Daniel, na mesma função, cobra uma taxa fixa de 55,00 Mt e 35,00 Mt por hora.

   a) Defina uma expressão que represente o custo da contratação em função do número de horas de trabalho do Carlos e do Daniel.

   b) Qual deve ser o tempo máximo de duração de uma festa para que a contratação do Daniel não fique mais cara que a do Carlos?

7. Três planos de telefone móvel são apresentados na tabela abaixo.

Plano	Custo fixo mensal	Custo adicional por minuto
A	35,00 Mt	0,50 Mt
B	20,00 Mt	0,80 Mt
C	0,00 Mt	1,20 Mt

   a) Qual é o plano mais vantajoso para uma pessoa que utilize o telemóvel 25 minutos por mês?

   b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano **A** é mais vantajoso que os outros dois?

8. O Manuel está à procura de um emprego de modo que, do total do salário que receber, possa gastar $\frac{1}{4}$ com a alimentação, $\frac{2}{5}$ com o arrendamento da casa e 3000,00 Mt em roupas e lazer.

Se descontadas todas essas despesas, ele ainda pretender que lhe sobrem no mínimo 850,00 Mt, quanto deve ser o seu salário mínimo para que as suas pretensões sejam satisfeitas?

AVALIAÇÃO FORMATIVA 2

I

Para cada questão são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.

Escreva a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder à questão.

1. Dos seguintes conjuntos, qual pode ser representado sob a forma de intervalos de números reais?

(A) $\{1\ ,\ 3\}$

(B) $\{x \in \mathbb{Q} :\ x > 1\}$

(C) $\{x \in \mathbb{R} :\ 0 < x \leqslant 5\}$

(D) $\{x \in \mathbb{N} :\ x > 2\}$

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) O intervalo $]1\ ,\ 3[$ só tem um elemento.

(B) O maior número inteiro que pertence ao intervalo $]-2\ ,\ +\infty[$ é -1.

(C) O menor número inteiro que pertence ao intervalo $]1\ ,\ 5]$ é 1.

(D) O maior número inteiro que pertence ao intervalo $]-\infty\ ;\ -2{,}5]$ é -3.

3. Dados os conjuntos $M =]-\infty\ ,\ 3[$, $N = [3\ ,\ +\infty[$ e $P = [3\ ,\ 5]$, então:

(A) $M \cap N = \{3\}$;

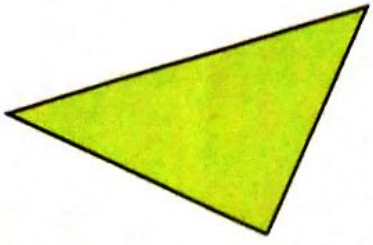
(B) $M \cap P = \{3\}$;

(C) $N \cap P = P$;

(D) $M \cup P =]-\infty\ ,\ 5[$.

4. Dois lados de um triângulo medem 5 cm e 7 cm.

Então, o terceiro lado mede x cm, tal que:



(A) $x > 7$;

(B) $x > 5$;

(C) $x \in]2\ ,\ 12]$;

(D) $x \in]2\ ,\ 12[$.

5. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

Se $a < b$, então:

(A) $a + 3 < b - 3$;

(B) $-2a > -2b$;

(C) $a + 5 \geqslant b + 5$;

(D) $2a \leqslant 2b$.

6. Considere a inequação $\frac{x}{2} < 0{,}2 + \frac{3x}{5}$.

(A) A inequação dada é equivalente a $3x - 2 < -8$.

(B) O menor número inteiro que é solução da inequação é -1.

(C) A solução da inequação é igual a -3.

(D) Não há nenhum número natural que seja solução da inequação.

II

1. Dados os seguintes conjuntos A e B, indique os seus conjuntos reunião e intersecção.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2{,}3\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant -1\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$;

d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2} \leqslant -\frac{1}{3}\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2}x > 0\right\}$.

2. Resolva as seguintes inequações e apresente a solução sob a forma de intervalos.

a) $1 - 2(x - 3) \geqslant \frac{1}{2}$

b) $1 \leqslant \frac{3}{2} - \frac{x-1}{5}$

c) $\frac{x-1}{6} - 2(x+1) < \frac{3x-4}{9}$

d) $\frac{2x+1}{3} - (x+1) > \frac{2x+1}{2}$

3. Resolva os sistemas de inequações lineares seguintes.

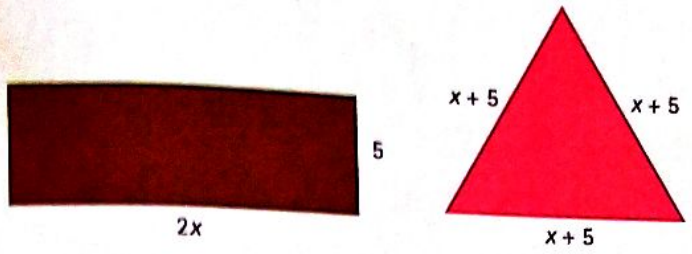
a) $\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 < 5 - \frac{2x}{3} \\ \frac{3}{2}(x+1) \geqslant x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |x| \leqslant 2 \\ \frac{x+3}{2} < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - (3x + 4) \leqslant 2 \\ \frac{7}{2}x - 3(x-2) \geqslant 2x - \frac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 - \frac{x-1}{3} \leqslant x - \frac{1}{2} \\ \frac{1-(2x-1)}{2} - x > 1 \end{cases}$

4. Na figura estão representados um rectângulo e um triângulo.

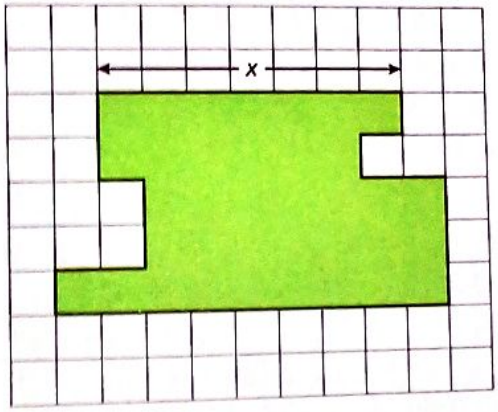


Determine o valor de x de modo que:

a) o perímetro do rectângulo seja igual ao perímetro do triângulo;

b) o perímetro do rectângulo seja menor ou igual ao perímetro do triângulo.

5. Observe a figura seguinte.



a) Calcule o perímetro da figura em função de x.

b) Apresente um enquadramento do perímetro, supondo que $1{,}2 \text{ cm} < x < 1{,}4 \text{ cm}$.

6. A Maria tem 7 anos e o seu pai tem 30 anos. Daqui a quantos anos a idade do pai é superior ao dobro e inferior ao triplo da idade da sua filha Maria?

7. Um rectângulo tem de largura 10 cm. Qual deve ser a medida do comprimento tal que:

a) a área seja superior a 30 cm^2?

b) o perímetro seja superior a 60 cm e não superior a 82 cm?

3

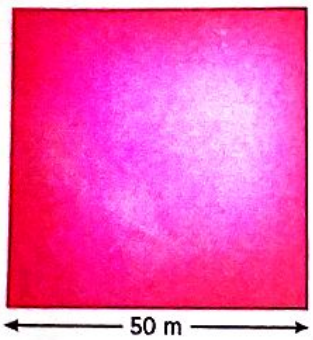
MONÓMIOS E POLINÓMIOS

1. MONÓMIOS
2. POLINÓMIOS
3. CASOS NOTÁVEIS DA MULTIPLICAÇÃO
4. FACTORIZAÇÃO DE UM POLINÓMIO

3 MONÓMIOS E POLINÓMIOS

1. Monómios

1.1. Noção de monómio

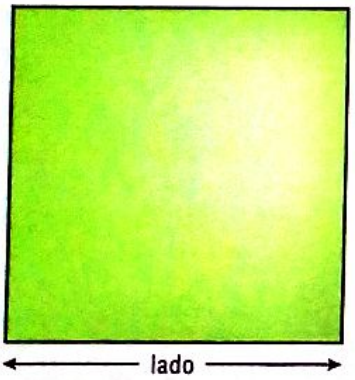


Consideremos um terreno com a forma de um quadrado de lado igual a 50 metros.

Quantos metros de rede são necessários para vedar o terreno?

$$50 + 50 + 50 + 50 = 4 \times 50 = 200$$

São necessários 200 metros de rede.



Para um terreno quadrado de lado ℓ, o número de metros de rede que se gasta é dado pela expressão:

$$\ell + \ell + \ell + \ell = 4 \times \ell$$

que representa o **perímetro**, em metros, de um quadrado de lado ℓ, onde 4 é a **constante** e ℓ a **variável**. A expressão que representa o perímetro do quadrado pode tomar diversos valores:

ℓ	10	5	100
$4 \times \ell = 4\ell$	$4 \times 10 = 40$	$4 \times 5 = 20$	$4 \times 100 = 400$

As expressões 4ℓ, x, 3, 14, $-y$, $\frac{1}{3}x$ e $-\frac{20}{3}$ designam-se por **monómios**.

Nestas expressões aparecem apenas números, letras e produtos entre números e letras.

Um monómio é uma expressão onde só figuram produtos de números, podendo alguns desses factores ser representados por letras.

OBSERVAÇÃO:

Em vez da expressão $4 \times \ell$ utiliza-se, simplesmente, 4ℓ, suprimindo o sinal "×" colocado entre o número e a variável. No entanto, quando se substitui a variável por um número é absolutamente necessário escrever o sinal "×", pois 4×10 é diferente de 410.

EXEMPLOS:

$2x$; $-\frac{x}{2}$; $3xy$; $-\frac{x^2y}{4}$; 7; $-\frac{1}{3}$; $2xyz$ e ax^2 são exemplos de monómios.

A **parte numérica** de um monómio designa-se por **coeficiente** e as **letras** constituem a **parte literal.**

EXEMPLOS:

Monómio	$2x$	$-\frac{x}{2}$	$3xy$	$-\frac{x^2y}{4}$	7	$-\frac{1}{3}$	$2xyz$	ax^2
Coeficiente	2	$-\frac{1}{2}$	3	$-\frac{1}{4}$	7	$-\frac{1}{3}$	2	1
Parte literal	x	x	xy	x^2y			xyz	ax^2

O **grau** de um monómio é a soma dos expoentes da parte literal.

EXEMPLO:

Indique o grau dos seguintes monómios:

$2x$; $-\frac{x}{2}$; $3xy$; $-\frac{x^2y}{3}$; 7; $-\frac{1}{3}$; $2xyz$ e $xyzw$.

Resolução

Monómio	$2x$	$-\frac{x}{2}$	$3xy$	$-\frac{x^2y}{4}$	7	$-\frac{1}{3}$	$2xyz$	$xyzw$
Grau	1	1	2 $(1+1)$	3 $(2+1)$	0	0	3 $(1+1+1)$	4 $(1+1+1+1)$

OBSERVAÇÃO:
$a^0 = 1$ para qualquer número real a não nulo.

1.2. Monómios semelhantes

Dois monómios que têm a mesma parte literal dizem-se **monómios semelhantes.**

EXEMPLOS:

x e $\frac{1}{3}x$; $3xy$ e $-5xy$; xy e $-xy$ são exemplos de monómios semelhantes.

Dois monómios semelhantes com coeficientes simétricos dizem-se **monómios simétricos.**

EXEMPLOS:

xy e $-xy$; $\frac{x^2y}{3}$ e $-\frac{x^2y}{3}$; $\sqrt{2}\,ab$ e $-\sqrt{2}\,ab$ são exemplos de monómios simétricos.

Exercício n.º 1

1. Traduza para linguagem matemática as seguintes situações.

   a) Qual a idade do Pedro daqui a três anos?

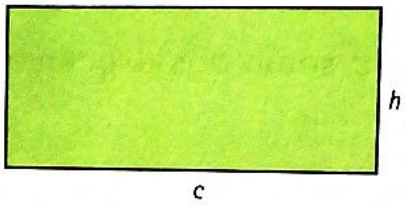
   b) O Rui tem 14 anos. Qual era a sua idade há y anos?

   c) A Ana viajou a uma velocidade média (v) de 50 km/h. Qual a expressão que representa a distância (d), em quilómetros, que a Ana percorreu em t horas?

   Note que $v = \frac{d}{t}$.

   d) A Eva emprestou, do seu dinheiro, 20 Mt ao João e a terça parte do restante à Rita. Quanto dinheiro restou à Eva?

2. Considere o seguinte rectângulo onde c representa o comprimento e h a largura.



   a) Escreva uma expressão que represente o perímetro do rectângulo e indica as constantes e as variáveis.

   b) Calcule o perímetro para $c = 12$ e $h = 5$.

3. Escreva dois monómios semelhantes ao monómio $-2xy^2$, sendo um deles simétrico ao dado.

4. Determine o grau dos monómios seguintes.

   a) $2x^3$ b) $\frac{xy}{2}$ c) 3^2x^2y d) $-\frac{1}{3}axy^2$

5. Complete a tabela seguinte.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau	Monómio simétrico
	$\frac{1}{3}$			
6				$-\frac{xyz}{3}$
	2^2	xy		
$\frac{7}{3}x$				$-\frac{3x^2y}{4}$
				$\frac{1}{3}x^2yz^3$

1.3. Adição algébrica de monómios

A soma de monómios semelhantes é um monómio resultante da soma algébrica dos coeficientes desses monómios.

OBSERVAÇÃO:
A adição algébrica de monómios **não** semelhantes não é possível.

EXEMPLO:

Na expressão $3x+5y$, não é possível adicionar os dois monómios pois não têm a mesma parte literal, ou seja, não são semelhantes.

EXEMPLO:

Simplifique as seguintes expressões.

a) $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}x-3x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-3\right)x=\left(\frac{5}{6}-3\right)x=\frac{5-18}{6}x=-\frac{13}{6}x$

b) $3-(x-3y+2)=3-x+3y-2=3-2-x+3y=1-x+3y$

c) $3x^2y+\frac{1}{3}x^2y-\frac{1}{2}x^2y=\left(3+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)x^2y=\frac{18+2-3}{6}x^2y=\frac{17}{6}x^2y$

d) $-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}y-\left(\frac{3}{4}x^2-5+\frac{7}{2}y\right)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}y-\frac{7}{2}y+5=-x^2-2y+5$

Exercício n.º 2

1. Simplifique os termos semelhantes.

   a) $5x-3x+2x+3x$

   b) $\frac{1}{2}y-y-\frac{1}{4}y-3y$

   c) $4z-3t-z+2t$

   d) $2{,}3x-5{,}2y+3-x+y-1$

   e) $-2b+5a-3a+10b$

   f) $\frac{5}{3}a-\frac{1}{2}b+\frac{7}{2}a+2$

2. Simplifique as seguintes expressões reduzindo os termos semelhantes.

   a) $5-(x-4)$

   b) $4+(3x-2)-(4-2x)$

   c) $3(y-4)+10$

   d) $4+\frac{3}{2}(4-2a)$

   e) $2m-3(2-n)+2(2n-3m)$

   f) $5(1-2t)-3(t-2)$

3. Determine a soma algébrica de:

   a) $\frac{3}{2}x^3-\frac{5}{2}x^3+\frac{7}{2}x^3-\frac{1}{2}x^3+2x^3$;

   b) $\frac{3}{2}x^2-1+\frac{1}{3}+3-\frac{7}{2}x^2+\frac{4}{3}x+2x^2+\frac{2}{3}x$;

   c) $(3x^2+5x-3)-(x^2+2x-3)-(x^2-5x-6)$;

   d) $2x-1+(x^2-1)-2(x^2+1)+x^2+2x+3$;

   e) $-\frac{1}{2}x^2+3-\left(-\frac{1}{4}x+5x^2\right)+\frac{3}{2}$;

   f) $-\frac{x-5}{2}+\frac{4}{3}-(-x^2+2x+1)+3$.

1.4. Multiplicação de monómios

A **multiplicação de dois monómios** é um monómio cujo coeficiente é o produto dos coeficientes dos factores e a parte literal é o produto das partes literais dos factores.

EXEMPLO:

Efectue as seguintes operações.

a) $\left(-\frac{2}{3}ab\right)\times(3a^2b)=\left(-\frac{2}{3}\right)\times 3\times a\times a^2\times b\times b=-2a^3b^2$

b) $(\sqrt{2}\,x^3yz^2)\times\left(\frac{2}{3}xy^3z\right)=\frac{2}{3}\sqrt{2}\,x^4y^4z^3$

1.5. Divisão de monómios

A **divisão de dois monómios** é um monómio cujo coeficiente é o quociente dos coeficientes dividendo e divisor e a parte literal é o quociente das partes literais que formam o dividendo e o divisor.

EXEMPLO:

Efectue as seguintes operações.

a) $(8x^2y):(3xy)=\frac{8x^2y}{3xy}=\frac{8}{3}x$

b) $\left(-\frac{1}{5}x^3\right):\frac{5}{2}=\left(-\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\right)x^3=-\frac{2}{25}x^3$

1.6. Potenciação de monómios

A **potência de um monómio** é igual à potência de cada um dos factores que o constituem.

EXEMPLO:

Efectue as seguintes operações.

a) $\left(\frac{1}{2}xy\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times x^3\times y^3=\frac{1}{8}x^3y^3$

b) $\left(-\sqrt{5}\,x^3yz^4\right)^2=\left(-\sqrt{5}\right)^2\times(x^3)^2\times y^2\times(z^4)^2=5x^6y^2z^8$

Exercício n.º 3

1. Efectue e simplifique as seguintes operações.

   a) $(-3x)\times(4x^2)$ b) $\left(\frac{1}{2}x^2y\right)\times(-2xy)$ c) $(3abx)\times\left(\frac{1}{2}ax^2\right)$ d) $(-2a^2b^3)^3$

2. Efectue e simplifique as seguintes operações.

   a) $\left(-\frac{1}{2}a^2b^2\right):\left(\frac{1}{2}ab^2\right)$ b) $(-20x^3y^3):(-100y)$ c) $(2x^4b^3):(-8x^2b)$ d) $(-5ab^2):(5b^2a)$

3. Qual o monómio do produto de $3xy^2$ por $3x^2y$?

   (A) $-6xy^2$ (B) $\frac{1}{3}x^3y^4$ (C) $9x^2y^2$ (D) $9x^3y^3$

2. Polinómios

2.1. Noção de polinómio

Um **polinómio** é a soma algébrica de monómios não semelhantes, cujo **grau** é dado pelo maior dos graus dos seus monómios.

OBSERVAÇÃO:
Um polinómio com dois termos chama-se **binómio**.
Um polinómio com três termos chama-se **trinómio**.

EXEMPLOS:

$\frac{5}{2}x+\frac{4}{3}x^2$; $\frac{5}{6}x^2-4x+3$ e $x^4+\frac{1}{3}x^3y+x^2y^2+y^4$ são exemplos de polinómios.

Um polinómio diz-se **completo** se tiver todos os termos desde o de mais alto grau até ao termo de grau zero, caso contrário, diz-se **incompleto**.

EXEMPLOS:

$-3x^2+7x+1$ é um polinómio completo e $-9y^3-5y$ é um polinómio incompleto.

Um polinómio diz-se **ordenado** quando está escrito segundo as potências crescentes ou decrescentes de uma das suas variáveis.

EXEMPLO:

$1+2a+\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{3}a^3$ é um polinómio ordenado e completo.

Dois polinómios são **simétricos** quando os termos de um deles são simétricos dos termos do outro polinómio.

EXEMPLO:

O polinómio $3a^3-5$ é simétrico de $-(3a^3-5)=-3a^3+5$.

EXEMPLOS:

a) $\frac{37}{12}x^2y$ é um monómio de grau 3;

b) $\frac{5}{2}x+\frac{4}{3}x^2$ é um binómio de grau 2 e incompleto;

c) $\frac{5}{6}x^2-4x+3$ é um trinómio de grau 2, completo e ordenado;

d) $x^3+3x^2-\frac{5}{3}x+5$ é um polinómio de grau 3, completo e ordenado.

Exercício n.º 4

1. Indique o grau dos seguintes polinómios e verifique se são completos, ordenando-os.

   a) x^3-2x+x^2-1 b) $x^2y+3xy^2+x^3$ c) $1-x^4$

   d) $x+x^2-1$ e) $x^4+3x^3+x^2-x$ f) x^2-2x

2. Calcule o valor numérico de cada polinómio para $x=2$.

   a) $3x^2+5x$ b) $9x^3+4x^2+5$ c) $\frac{7}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+2$

2.2. Adição algébrica de polinómios

Na **adição de polinómios**, ordenam-se os monómios e somam-se os termos semelhantes obtendo-se um **polinómio reduzido** (polinómio que já não se pode simplificar mais).

EXEMPLO:

$$(x^3+5x-2x^2-1)+(1-x+x^3)+(x-x^2+2x^3)=$$
$$=(x^3+x^3+2x^3)+(-2x^2-x^2)+(5x-x+x)+(-1+1)=$$
$$=4x^3-3x^2+5x$$

OBSERVAÇÃO:

Outro procedimento para adicionar polinómios é dispôr os polinómios ordenados e completos na forma vertical:

$$\begin{array}{r} x^3-2x^2+5x-1 \\ x^3+0x^2-x+1 \\ \hline 2x^3-x^2+x+0 \\ \hline 4x^3-3x^2+5x+0 \end{array}$$

Na **subtracção de polinómios** converte-se a subtracção numa adição somando ao polinómio aditivo o simétrico do polinómio subtractivo.

EXEMPLO:

$$\left(x^4-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\right)+(1-2x-4x^3)+\left(x^4+x^3-2x+\frac{1}{2}\right)-\left(2x^4-2x^3-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)=$$
$$=x^4+x^4-2x^4-4x^3+x^3+2x^3-\frac{1}{2}x^2-2x-2x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=$$
$$=-x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}$$

OBSERVAÇÃO:

$$\begin{array}{r} x^4+0x^3-\frac{1}{2}x^2+0x-\frac{3}{2} \\ 0x^4-4x^3+0x^2-2x+1 \\ x^4+x^3+0x^2-2x+\frac{1}{2} \\ -2x^4+2x^3+0x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \\ \hline -x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2} \end{array}$$

Exercício n.º 5

1. Considere os polinómios:

   $A(x)=x^4-3x^2+5x+1$; $B(x)=2x^3-5x^2+6$; $C(x)=-2x^4+2x^3+2x+1$; $D(x)=3x^2-6x+2$.

   Calcule $A-B-C+D$.

2. Efectue as seguintes operações.

   a) $(-0{,}3y^3+y^2+2)+\left(-\frac{1}{2}y^2-y\right)+(y^3-5)$

   b) $(3x^2-2x+5)-(7-x^2-5x)$

   c) $(3x-1)+\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}x^2+x-2\right)$

   d) $(2x^2y-xy^2+xy+5)+(2xy^2-x^2y+y)$

3. Complete as seguintes afirmações.

   a) O polinómio $(x^2+2x-1)-(2x^2-2)-(x^2+1)$ é igual a:

   (A) $-2x^2-2x$; (B) $-2x^2+2x$; (C) $-2x^2+2x-2$; (D) $2x^2+2x$.

   b) O polinómio $(x+1)+(x+1)-(x+1)$ é igual a:

   (A) $3x+1$; (B) $x-1$; (C) $3x+3$; (D) $x+1$.

2.3. Multiplicação de polinómios

2.3.1. Multiplicação de um monómio por um polinómio

Na multiplicação de um monómio por um polinómio, multiplicamos o monómio por todos os termos do polinómio (aplica-se a propriedade distributiva).

EXEMPLO:

$$2a\left(-3a^3+2a^2+\frac{1}{2}a+\frac{5}{2}\right)=2a\times(-3a^3)+2a\times 2a^2+2a\times\frac{1}{2}a+2a\times\frac{5}{2}=$$
$$=-6a^4+4a^3+a^2+5a$$

2.3.2. Multiplicação de um binómio por um polinómio

Na multiplicação de um binómio por um polinómio, multiplicamos o binómio por todos os termos do polinómio.

OBSERVAÇÃO:
O **grau** do polinómio produto é igual à soma dos graus dos polinómios factores.

EXEMPLO:

$$(2x+3)\times(x^2-4x+5)=(2x+3)\times x^2+(2x+3)\times(-4x)+(2x+3)\times 5=$$
$$=2x^3+3x^2-8x^2-12x+10x+15=2x^3-5x^2-2x+15$$

Exercício n.º 6

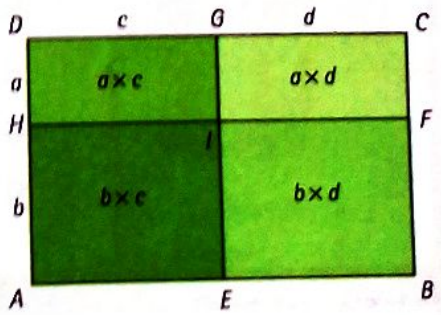
1. Efectue as seguintes operações.

a) $(3x-x^2)2x$ b) $3xy(2x^2y+x^3-xy^2)$ c) $(3xy)\times(-2y^2)\times(3x^2y)$ d) $\left(\frac{3}{2}x^2y\right)\times\left(-\frac{2}{3}xy^2\right)\times(2xy)$

e) $(3x^2+x-1)\times(2x-3)$ f) $(1-x)\times(x-x^3)$ g) $(x+3x^2-x^3)\times(2x^2-5)$ h) $(3-2x)\times(1-x+2x^3)$

2.3.3. Multiplicação de binómios

Consideremos um rectângulo cujos lados medem $a+b$ e $c+d$.



A área do rectângulo $[ABCD]$ é igual a:

$$(a+b)\times(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Dividindo o rectângulo em quatro rectângulos cuja soma das áreas é igual à área de $[ABCD]$, obtemos o mesmo resultado.

$$A_{[ABCD]}=A_{[HIGD]}+A_{[IFCG]}+A_{[AEIH]}+A_{[EBFI]}=ac+ad+bc+bd$$

Assim, na **multiplicação de binómios**, basta aplicar a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição e à subtracção.

EXEMPLO:

$$(2a+3)\times(b+5)=2a\times b+2a\times 5+3\times b+3\times 5=2ab+10a+3b+15$$

2.4. Divisão de um polinómio por um monómio

OBSERVAÇÃO:
O **grau** do polinómio quociente é menor que o grau do polinómio dividendo.

Na divisão de um polinómio por um monómio, dividimos todos os termos do polinómio pelo monómio.

EXEMPLOS:

a) $(x^2+4x):x=\frac{x^2}{x}+\frac{4x}{x}=x+4$

b) $(x^5-4x^4+5x):x=\frac{x^5}{x}-\frac{4x^4}{x}+\frac{5x}{x}=x^4-4x^3+5$

3. Casos notáveis da multiplicação

3.1 Diferença de quadrados

Consideremos dois binómios em que um representa a soma de duas quantidades e o outro a diferença dessas mesmas quantidades: $a+b$ e $a-b$.

Efectuando o produto dos dois binómios:

$(a+b)\times(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$

A diferença dos quadrados de duas quantidades é igual ao produto da soma das bases pela sua diferença, ou seja,

$$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$$

para quaisquer números reais a e b.

EXEMPLOS:

a) $(3x+1)\,(3x-1)=(3x)^2-(1)^2=9x^2-1$

b) $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)\,(x-2)$

c) $9x^2-5=(3x)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(3x+\sqrt{5}\right)\left(3x-\sqrt{5}\right)$

Exercício n.º 7

1. Efectue as seguintes operações.

   a) $(2x-3)\,(2x-3)\,(2x-3)$ **b)** $(-2x+3)\left(y-\sqrt{2}\right)$ **c)** $(3x^3-4x^2-x):(2x)$

2. Efectue os seguintes produtos.

   a) $(2x+3)\,(3-2x)$ **b)** $(2x^2-3)\,(2x^2+3)$ **c)** $(5x+4)\,(5x-4)$

3. Decomponha num produto de factores os seguintes binómios.

   a) $9-4x^2$ **b)** $81-36x^2$ **c)** $\frac{25}{4}x^2-\frac{4}{9}$

3.2. Quadrado de um binómio

Consideremos o binómio $x+5$ e o seu quadrado, $(x+5)^2$. Para procedermos à sua simplificação, basta aplicar a noção de potência e a propriedade distributiva da multiplicação.

$$(x+5)^2 = (x+5)(x+5) = x^2+5x+5x+5^2 = x^2+\underbrace{10x}_{2\times x\times 5}+25$$

Quadrado de uma soma

Para quaisquer números reais a e b,

$$\underset{1.^\circ}{(a}+\underset{2.^\circ}{b)^2} = \underset{\text{quadrado do 1.º}}{a^2} + \underset{\text{dobro do produto do 1.º pelo 2.º}}{2ab} + \underset{\text{quadrado do 2.º}}{b^2}$$

EXEMPLOS:

a) $(a+3)^2 = a^2+2\times a\times 3+3^2 = a^2+6a+9$

b) $(a^2+1)^2 = a^4+2a^2+1$

No caso do quadrado do binómio $x-4$, temos que:

$$(x-4)^2 = (x-4)(x-4) = x^2-4x-4x+4^2 = x^2-8x+16.$$

Quadrado de uma diferença

Para quaisquer números reais a e b,

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2.$$

EXEMPLOS:

a) $(a-5)^2 = a^2-2\times a\times 5+5^2 = a^2-10a+25$

b) $(2x-y)^2 = (2x)^2-2\times 2x\times y+y^2 = 4x^2-4xy+y^2$

c) $x^6+2x^3y+y^2 = (x^3)^2+2\times x^3\times y+y^2 = (x^3+y)^2$

d) $a^6-6a^3+9 = (a^3)^2-2\times 3\times a^3+3^2 = (a^3-3)^2$

Recorrendo aos casos notáveis da multiplicação, certas operações podem ser resolvidas com maior simplicidade.

EXEMPLOS:

a) $19\times 21 = (20-1)(20+1) = 20^2-1 = 400-1 = 399$

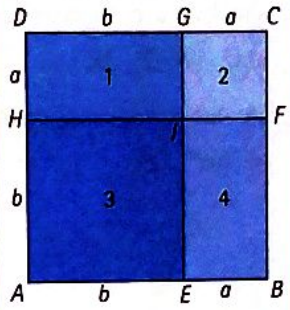
b) $38\times 42 = (40-2)(40+2) = 40^2-2^2 = 1600-4 = 1596$

c) $21^2 = (20+1)^2 = 20^2+2\times 20\times 1+1^2 = 400+40+1 = 441$

d) $39^2 = (40-1)^2 = 40^2-2\times 40\times 1+1^2 = 1600-80+1 = 1521$

OBSERVAÇÃO:

Interpretação geométrica do quadrado de uma soma:



$A_{[ABCD]} = (a+b)\times(a+b) = (a+b)^2$

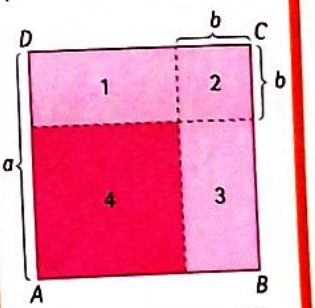
Por outro lado,

$A_{[ABCD]} = A_1+A_2+A_3+A_4$
$= ab+a^2+b^2+ab$
$= a^2+2ab+b^2$

Assim, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

OBSERVAÇÃO:

Interpretação geométrica do quadrado de uma diferença:



$A_4 = (a-b)(a-b) = (a-b)^2$

Por outro lado,

$A_4 = A_{[ABCD]}-A_1-A_2-A_3$
$= a^2-(a-b)b-b^2-(a-b)b$
$= a^2-ab+b^2-b^2-ab+b^2$
$= a^2-2ab+b^2$

Assim, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.

Exercício n.º 8

1. Efectue as seguintes operações.
   a) $(5+m)^2$ b) $(-5+2a)^2$ c) $(4x+3)^2$ d) $(x^2+3x)^2$
2. Simplifique as seguintes operações.
   a) $(2-3x)(2-3x)$ b) $(2x+5)(3x-0{,}4)$ c) $4x-(2x+1)(2x-1)$ d) $(2x-5)(2x-5)+(3x+2)$
3. Efectue as seguintes operações.
   a) $(10x^{10}-2)^2$ b) $(3x^2-2x^3)^2$ c) $\left(\frac{2}{3}x^3-y\right)\left(\frac{2}{3}x^3-y\right)$ d) $(3x+2)(3x-2)$

4. Factorização de um polinómio

Aplicando os conhecimentos adquiridos, podemos transformar o seguinte produto numa soma algébrica.

$$\underbrace{(3a+2)}_{\text{factores}} \times \underbrace{4a}_{\text{factores}} = 3a \times 4a + 2 \times 4a = \underbrace{12a^2}_{\text{parcelas}} + \underbrace{8a}_{\text{parcelas}}$$

Como transformar somas algébricas em produtos?

1.º caso: Usando a propriedade distributiva da multiplicação

factor a distribuído pelas parcelas

$$a \times (b+c) = ab + ac$$

factor a em evidência

Quando se transforma uma adição ou uma subtracção em produtos, diz-se que a expressão está **factorizada**.

EXEMPLOS:

a) $2a^2+4a+6 = 2a^2+2\times 2a+2\times 3 = 2(a^2+2a+3)$

Os três termos são divisíveis por 2, isto é, existe o factor 2 que é comum a todos os termos do polinómio.

b) $2x^3y^2-x^2y^3+x^2y^2 = x^2y^2(2x-y+1)$ (factor comum x^2y^2)

c) $ac+ad+bc+bd = a(c+d)+b(c+d) = (c+d)(a+b)$

2.º caso: Usando os casos notáveis da multiplicação

Relembrando os casos notáveis da multiplicação:

- $a^2-b^2 = \underbrace{(a-b)\times(a+b)}_{\text{produto de factores}}$
- $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2 = \underbrace{(a+b)\times(a+b)}_{\text{produto de factores}}$

EXEMPLOS:

a) $4 - x^2 = (2)^2 - (x)^2 = (2 - x)(2 + x)$

b) $9x^2 - 16 = (3x)^2 - (4)^2 = (3x - 4)(3x + 4)$

c) $a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$
Note-se que $6a = 2 \times a \times 3$.

d) $b^2 - 4b + 4 = (b - 2)^2$
Note-se que $4b = 2 \times b \times 2$.

3.º caso: Usando a propriedade distributiva e os casos notáveis da multiplicação

Uma factorização da expressão $8a^3 - 24a^2 + 18a$ é a seguinte:

$$8a^3 - 24a^2 + 18a = 2a(4a^2 - 12a + 9)$$

No entanto, ainda é possível proceder a uma nova factorização, visto que:

$$4a^2 - 12a + 9 = (2a)^2 - 2 \times 2a \times 3 + 3^2 = (2a - 3)^2,$$

ou seja:

$$8a^3 - 24\,a^2 + 18a = 2a(4a^2 - 12a + 9) = 2a(2a - 3)(2a - 3)$$

EXEMPLOS:

a) $a^3 + 2a^2b + ab^2 = a(a^2 + 2ab + b^2) = a(a + b)^2 = a(a + b)(a + b)$

b) $8a^3 - 24a^2 + 18a = 2a(4a^2 - 12a + 9) = 2a(2a - 3)^2 = 2a(2a - 3)(2a + 3)$

c) $x^3 + 6x^2y + 9xy^2 = x(x^2 + 6xy + 9y^2) = x(x + 3y)^2 = x(x + 3y)(x + 3y)$

d) $4x^2 - 16xy + 16y^2 = 4(x^2 - 4xy + 4y^2) = 4(x - 2y)^2 = 4(x - 2y)(x - 2y)$

Exercício n.º 9

1. Indique a factorização correcta dos seguintes polinómios.

a) $x^2 + 22x + 121$

(A) $(x - 11)^2$ **(B)** $(x + 11)^2$ **(C)** $(x + 11)(x - 11)$ **(D)** $(-x + 11)^2$

b) $4y^2 - 1$

(A) $(2y^2 - 1)(2y + 1)$ **(B)** $(4y - 1)(4y + 1)$ **(C)** $(2y - 1)^2$ **(D)** $(2y - 1)(2y + 1)$

c) $4y^2 + 4y + 1$

(A) $(2y + 1)^2$ **(B)** $(-2y + 1)^2$ **(C)** $(-2y - 1)^2$ **(D)** $(-1 + 2y)^2$

2. Considere o polinómio $a^3 + a^2b - a - b$.

a) O polinómio $a(a^2 - 1) + b(a^2 - 1)$ é equivalente ao dado?

b) Atendendo à expressão apresentada na alínea anterior, transforme o polinómio dado num produto de dois binómios.

3. Decomponha em factores os seguintes polinómios.

a) $2y^2 - 4y$ b) $49 - 9x^2$ c) $a^2 - 20a + 100$; d) $25 - (x + 1)^2$

3 AVALIAÇÃO FORMATIVA

1. Complete a tabela seguinte.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau	Monómio simétrico	Monómio semelhante
$-xy$					
	-3				$10xyz^3$
				$-4ab^2c$	
	6	$abcd$			

2. Escreva um monómio que satisfaça as seguintes condições:

a) seja do 4.º grau, tenha duas variáveis e o coeficiente seja um número fraccionário negativo;

b) seja do 3.º grau e o seu coeficiente seja o maior número inteiro inferior a $-5{,}4$;

c) seja do 5.º grau e o seu coeficiente seja o menor número inteiro superior a 3π .

3. Indique a letra correspondente à alternativa correcta em cada questão.

a) A expressão $(a-1)(2a-3)$ é igual a:

(A) $2a^2-5a+3$ (B) $2a^2+5a+3$

(C) $2a^2-5a-3$ (D) $2a^2+5a-3$

b) A expressão $-(3x-1)(-2x+5)$ é igual a:

(A) $6x-17x^2+5$ (B) $6x^2-17x-5$

(C) $6x^2-17x+5$ (D) $6x^2+17x+5$

c) A expressão $-3x+\frac{1}{2}(x^2-x)-x^2$ é igual a:

(A) $-\frac{1}{2}x^2+7x$ (B) $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x$

(C) $\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x$ (D) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x$

d) A expressão $-a\left(a-\frac{1}{2}a^2\right)-3a\left(\frac{1-a}{2}\right)$ é igual a:

(A) $\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a$ (B) $\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a$

(C) $\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a$ (D) $\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a$

4. Efectue a divisão de:

a) $-2x^5+\sqrt{2}\,x^2-\frac{4}{3}x$ por x;

b) $x^4+3x^3+8x^2-x$ por x;

c) $-\sqrt{3}\,x^7+\frac{1}{2}x^6-6x^4+x^2$ por $2x^2$.

5. Escreva um monómio cujo quadrado seja:

a) a^2b^4; b) $4a^2b^2$; c) $\frac{1}{25}a^{10}$.

6. Considere os polinómios seguintes.

$A(x)=4x^3-2x+3x^2-5$ $B(x)=-x^2+3x^3-5x+3$

$C(x)=2-5x^3+4x-x^2$

Calcule:

a) $A+B+C$; b) $A-B-C$; c) $-3A+B-2C$.

7. Escreva na forma de um polinómio reduzido cada uma das seguintes expressões.

a) $(2x+5)^2$ b) $(2x-x^2)^2$ c) $(x^3-3x)^2$

d) $(2x-3)(2x+3)$ e) $(3x-5)^2-9x^2$ f) $(2x+3)^2-(2x-3)^2$

8. Calcule, recorrendo aos casos notáveis da multiplicação:

a) 99^2; b) 102^2; c) $1{,}03^2$.

9. Factorize os seguintes polinómios.

a) $\frac{4a}{3}-\frac{7}{3}$ b) $8x^3-20x^4-8x^2$ c) $\frac{3a^2}{2}-\frac{5a^2b}{2}$

d) $9x^2-121$ e) $3x^3-6x^2y$ f) $3x^3y-9xy^2+3x^2y^2$

g) $4x^2-12xy+9y^2$ h) $\frac{x^2}{4}+3x+9$ i) $12a^3-3a$

4 EQUAÇÃO QUADRÁTICA

1.
EQUAÇÃO QUADRÁTICA

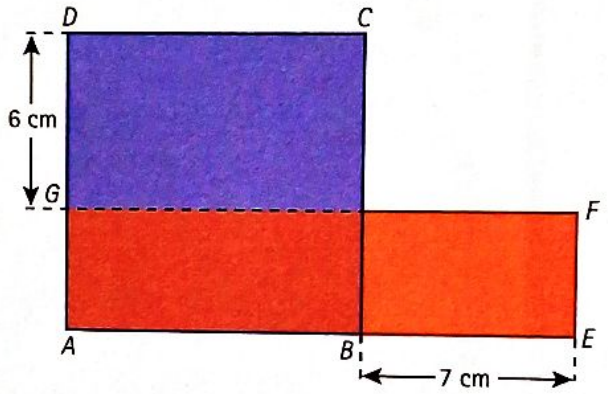
2.
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

3.
PROBLEMAS DO 2.º GRAU

4 EQUAÇÃO QUADRÁTICA

1. Equação quadrática

Considere a seguinte figura onde $[ABCD]$ é um quadrado e $[AEFG]$ é um rectângulo com $72\ cm^2$ de área.



Qual é a medida de $[AB]$?

Resolução

Sendo $x = \overline{AB}$, a expressão da área do rectângulo $[AEFG]$ é dada por $(x+7) \times (x-6)$. Como a área é igual a $72\ cm^2$, para calcular o valor de x temos de resolver a seguinte equação:

$$(x+7)(x-6) = 72 \iff x^2 - 6x + 7x - 42 = 72$$
$$\iff x^2 + x - 114 = 0$$

O primeiro membro da equação obtida é um **polinómio quadrático** (polinómio do 2.º grau) e, portanto, a equação diz-se **quadrática** ou do **2.º grau**.

Uma **equação quadrática** ou **equação do 2.º grau** é uma equação que, pela aplicação dos princípios de equivalência, pode ser reduzida à forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a , b e c números reais e $a \neq 0$ e que se designa por **forma canónica, típica** ou **geral**.

Para qualquer equação quadrática:

- ax^2, bx e c são os **termos** da equação;
- ax^2 é o **termo quadrático** (termo do 2.º grau) e a é o **coeficiente** do termo quadrático;
- bx é o **termo linear** (termo do 1.º grau) e b é o **coeficiente** do termo linear;
- c é o **termo independente**.

Se numa equação quadrática, os coeficientes a, b e c são todos não nulos, a equação diz-se completa, caso contrário, diz-se incompleta.

EXEMPLO:

Quais das seguintes equações são equações quadráticas completas?

a) $(x-1)^2-9=2-x^2$

b) $49-(x+3)^2=-x^2$

c) $5(x^2-x)-8=2(x-2)(x+2)$

e) $\frac{3(x-2)}{4}-(x-1)^2=\frac{11x-10}{4}$

Resolução

a) $(x-1)^2-9=2-x^2 \iff x^2-2x+1-9=2-x^2$
$\iff x^2+x^2-2x-8-2=0$
$\iff 2x^2-2x-10=0$
$\iff x^2-x-5=0$

A equação é uma equação quadrática completa porque tem os coeficientes do termo quadrático, linear e independente não nulos.

b) $49-(x+3)^2=-x^2 \iff 49-(x^2+6x+9)+x^2=0$
$\iff 49-x^2-6x-9+x^2=0$
$\iff -x^2+x^2-6x+49-9=0$
$\iff -6x+40=0$

A equação não é uma equação quadrática completa porque o termo quadrático é nulo. Trata-se de uma equação linear.

c) $5(x^2-x)-8=2(x-2)(x+2) \iff 5x^2-5x-8=2(x^2-4)$
$\iff 5x^2-5x-8=2x^2-8$
$\iff 5x^2-2x^2-5x-8+8=0$
$\iff 3x^2-5x=0$

A equação é uma equação quadrática incompleta porque o termo independente é igual a zero.

d) $\frac{3(x-2)}{4}-(x-1)^2=\frac{11x-10}{4} \iff \frac{3x-6}{4}-(x^2-2x+1)=\frac{11x-10}{4}$
$\iff 3x-6-4(x^2-2x+1)=11x-10$
$\iff 3x-6-4x^2+8x-4-11x+10=0$
$\iff -4x^2=0$

A equação é uma equação quadrática incompleta porque os coeficientes do termo linear e do termo independente são nulos.

2. Resolução de equações quadráticas

Resolver uma equação é determinar as suas raízes ou soluções usando os princípios da adição e multiplicação relembrados na unidade temática 2 .

Na classe anterior, foi abordado o processo de resolução de uma equação linear e que passamos a relembrar:

1.º Desembaraçar de parêntesis.

2.º Desembaraçar de denominadores.

3.º Juntar os termos com incógnita num dos membros e os que não têm incógnita no outro membro utilizando o princípio da adição.

4.º Efectuar os cálculos para simplificar as expressões em cada membro.

5.º Dividir ambos os membros pelo coeficiente da incógnita utilizando o princípio da multiplicação para a obtenção do valor da incógnita.

EXEMPLO:

Resolva as seguintes equações lineares.

a) $3x+6=7x-2$ b) $-2(x+5)+4=3+4(x-1)$ c) $\frac{1}{2}-2(1-x)=\frac{3}{4}+x$

Resolução

a) $3x+6=7x-2 \iff 3x-7x=-2-6 \iff -4x=-8 \iff x=\frac{8}{4} \iff x=2$

b) $-2(x+5)+4=3+4(x-1) \iff -2x-10+4=3+4x-4$

$\iff -2x-4x=3-4+10-4 \iff -6x=5 \iff x=-\frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{2}-2(1-x)=\frac{3}{4}+x \iff \underset{(2)}{\frac{1}{2}}-\underset{(4)}{\frac{2}{1}}+\underset{(4)}{\frac{2x}{1}}=\underset{(1)}{\frac{3}{4}}+\underset{(4)}{\frac{x}{1}} \iff$

$\iff 2-8+8x=3+4x \iff 8x-4x=3-2+8 \iff 4x=9 \iff x=\frac{9}{4}$

2.1. Lei do anulamento do produto

Lei do anulamento do produto

Se o produto de dois factores (ou mais) é nulo, então pelo menos um deles é nulo, ou seja:

$$xy=0 \iff x=0 \vee y=0 .$$

Para aplicar a lei do anulamento do produto, o primeiro membro da equação deve estar decomposto em factores. Tal como foi feito na unidade anterior, para procedermos à decomposição é útil recorrer aos casos notáveis da multiplicação ou, simplesmente, colocar os factores comuns em evidência.

EXEMPLO:

Que valores devem ter x e y nas seguintes equações?

a) $4x=0$ b) $x(y-1)=0$

c) $8(x+2)(y+1)=0$ d) $y(x-2)+(x-2)=0$

Resolução

a) $4x=0 \iff x=0$

b) $x(y-1)=0 \iff x=0 \vee y-1=0 \iff x=0 \vee y=1$

c) $8(x+2)(y+1)=0 \iff 8(x+2)=0 \vee y+1=0$
$\iff x+2=0 \vee y+1=0 \iff x=-2 \vee y=-1$

d) $y(x-2)+(x-2)=0 \iff (x-2)(y+1)=0$
$\iff x-2=0 \vee y+1=0 \iff x=2 \vee y=-1$

O passo inicial na resolução de uma equação quadrática é reduzir a equação à sua forma canónica para, posteriormente, decidir qual o método mais eficaz para a sua resolução.

2.2. Resolução de equações do tipo $ax^2=0$ com $a\neq 0$

Para todo o número real a não nulo:

$$ax^2=0 \iff x=0\,.$$

Neste tipo de equações e independentemente do valor de a, a solução é sempre nula.

EXEMPLO:

Resolva as seguintes equações.

a) $2(x^2+1)=2$ b) $5x^2+3=\frac{1}{2}x^2+3$ c) $5(2-x)(2+x)-(x-2)^2=4(4+x)$

Resolução

a) $2(x^2+1)=2 \iff 2x^2+2-2=0 \iff 2x^2=0 \iff x^2=0 \iff x=0$

b) $5x^2+3=\frac{1}{2}x^2+3 \iff \frac{5}{1}x^2+\frac{3}{1}=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{1} \iff 10x^2+6=x^2+6 \iff$
(2) (2) (1) (2)

$\iff 10x^2-x^2+6-6=0 \iff 9x^2=0 \iff x^2=0 \iff x=0$

c) $5(2-x)(2+x)-(x-2)^2=4(4+x) \iff 5(4-x^2)-(x^2-4x+4)=16+4x \iff$
$\iff 20-5x^2-x^2+4x-4=16+4x \iff -5x^2-x^2+4x-4x+20-4-16=0 \iff$
$\iff -6x^2=0 \iff x^2=0 \iff x=0$

Exercício n.º 1

Resolva as equações seguintes.

a) $\frac{(x-1)^2}{2}=\frac{1}{2}-x$ b) $\frac{10x^2+23}{6}-2(x+1)^2=\frac{19-8x}{2}$ c) $\frac{x(x-2)+5}{2}-\frac{x(x-4)}{4}=\frac{5}{2}$

2.3. Resolução de equações do tipo $ax^2 = c$ com a e c não nulos

OBSERVAÇÃO:
Sejam a e c números reais não nulos,
$ax^2 = c \iff x^2 = \frac{c}{a}$
$\iff x = +\sqrt{\frac{c}{a}} \vee x = -\sqrt{\frac{c}{a}}$

Para todo o número real a e c não nulos,

$$ax^2 = c \iff x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Um método alternativo para a resolução deste tipo de equações é recorrer ao caso notável da **diferença de quadrados** para posteriormente, aplicar a lei do anulamento do produto.

EXEMPLO:

Resolva as equações seguintes por dois processos diferentes.

a) $x^2 - 6 = 0$ b) $(4+x)^2 = 4(2x+8)$ c) $\frac{x(x-2)}{2} + \frac{x(x+3)}{3} = -\frac{5}{6}$

Resolução

OBSERVAÇÃO:
O quadrado de uma raiz quadrada é igual ao seu radicando, ou seja, para $a \in \mathbb{R}_0^+$, $(\sqrt{a})^2 = a$.

a) **1.º processo:** Aplicando a lei do anulamento do produto

$x^2 - 6 = 0 \iff x^2 - (\sqrt{6})^2 = 0 \iff (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0 \iff$

$\iff x - \sqrt{6} = 0 \vee x + \sqrt{6} = 0 \iff x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$

2.º processo: Aplicando a definição de raiz quadrada

$x^2 - 6 = 0 \iff x^2 = 6 \iff x = \pm\sqrt{6} \iff x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$

b) **1.º processo:** Aplicando a lei do anulamento do produto

$(4+x)^2 = 4(2x+8) \iff 16 + 8x + x^2 = 8x + 32 \iff x^2 + 8x - 8x + 16 - 32 = 0 \iff$

$\iff x^2 - 16 = 0 \iff x^2 - 4^2 = 0 \iff (x-4)(x+4) = 0 \iff x = 4 \vee x = -4$

2.º processo: Aplicando a definição de raiz quadrada

$(4+x)^2 = 4(2x+8) \iff x^2 - 16 = 0 \iff x^2 = 16 \iff x = \pm\sqrt{16} \iff$

$\iff x = 4 \vee x = -4$

c) $\frac{x(x-2)}{2} + \frac{x(x+3)}{3} = -\frac{5}{6} \iff \frac{x^2 - 2x}{2} + \frac{x^2 + 3x}{3} = -\frac{5}{6} \iff$

(3) (2) (1)

$\iff 3x^2 - 6x + 2x^2 + 6x = -5 \iff 5x^2 = -5 \iff x^2 = -1 \iff x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$
(aplicando a definição de raiz quadrada).

A equação não tem soluções reais.

Exercício n.º 2

Resolva as equações seguintes pelo processo que entender mais simples.

a) $(3x+1)(3x-1) - 4x = 4(2-x)$

b) $\frac{2x^2 - 5}{2} - \frac{2x^2 + 2}{5} = -2$

c) $3\left(\frac{2x-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x+9}{2}\right)^2 = 63$

d) $(-\sqrt{5} + 2x)(2x + \sqrt{5}) = 11$

2.4. Resolução de equações do tipo $ax^2+bx=0$ com a e b não nulos

Para todo o número real a e b não nulos,

$$ax^2+bx=0 \iff x=0 \vee x=-\frac{b}{a}.$$

Estas equações incompletas são resolvidas pela **lei do anulamento do produto** colocando inicialmente em evidência o factor comum das parcelas.

OBSERVAÇÃO:

Sejam a e b números reais não nulos,

$ax^2+bx=0 \iff x(ax+b)=0$
$\iff x=0 \vee ax+b=0$
$\iff x=0 \vee ax=-b$
$\iff x=0 \vee x=-\frac{b}{a}$

EXEMPLO:

Resolva as equações seguintes.

a) $x^2+\frac{x+15}{3}=5$ b) $\frac{5(2x-6)}{4}=\frac{x^2-15}{2}$ c) $\frac{x^2-1}{2}-\frac{4x-3}{3}=\frac{3-5x^2}{6}$

Resolução

a) $x^2+\frac{x+15}{3}=5 \iff 3x^2+x+15=15 \iff 3x^2+x+15-15=0 \iff$
$\iff 3x^2+x=0 \iff x(3x+1)=0 \iff x=0 \vee 3x+1=0 \iff x=0 \vee x=-\frac{1}{3}$

b) $\frac{5(2x-6)}{4}=\frac{x^2-15}{2} \iff \frac{10x-30}{4}=\frac{x^2-15}{2} \iff 10x-30=2x^2-30 \iff$
$\iff 10x-30-2x^2+30=0 \iff 10x-2x^2=0 \iff 2x(5-x)=0 \iff$
$\iff 2x=0 \vee 5-x=0 \iff x=0 \vee -x=-5 \iff x=0 \vee x=5$

c) $\frac{x^2-1}{2}-\frac{4x-3}{3}=\frac{3-5x^2}{6} \iff 3(x^2-1)-2(4x-3)=3-5x^2 \iff$
$\iff 3x^2-3-8x+6=3-5x^2 \iff 3x^2+5x^2-8x-3+6-3=0 \iff$
$\iff 8x^2-8x=0 \iff 8x(x-1)=0 \iff 8x=0 \vee x-1=0 \iff x=0 \vee x=1$

Exercício n.º 3

Resolva as seguintes equações.

a) $2x-\left(7+\frac{6-2x}{3}\right)=2x^2-9$ b) $\frac{2(x-1)(x+1)}{5}+\frac{3x}{2}=\frac{x^2}{10}-\frac{2}{5}$ c) $\frac{x(x-1)}{3}-\frac{x+2}{4}=\frac{x^2-1}{2}$

2.5. Resolução de equações do tipo $ax^2+bx+c=0$ com a, b e c não nulos

Se uma equação do 2.º grau se apresentar na forma canónica, devemos analisar o 1.º membro para decidir o melhor procedimento para a sua resolução. No caso de ser um caso notável, tal como foi visto anteriormente, um processo simples é o apresentado de seguida para a equação $x^2-2x+1=0$.

Aplicando o caso notável do **quadrado de um binómio** e usando a **lei do anulamento do produto**:

$x^2-2x+1=0 \iff (x-1)^2=0 \iff (x-1)(x-1)=0 \iff$
$\iff x-1=0 \vee x-1=0 \iff x=1$

EXEMPLO:

Resolva as seguintes equações.

a) $x^2-4x+4=0$ b) $x^2-10x+25=0$ c) $2x^2+12x+18=0$

Resolução

a) $x^2-4x+4=0 \iff (x-2)^2=0 \iff (x-2)(x-2)=0 \iff$
$\iff x-2=0 \vee x-2=0 \iff x=2$

b) $x^2-10x+25=0 \iff (x-5)^2=0 \iff (x-5)(x-5)=0 \iff$
$\iff x-5=0 \vee x-5=0 \iff x=5$

c) $2x^2+12x+18=0 \iff x^2+6x+9=0 \iff (x+3)^2=0 \iff$
$\iff (x+3)(x+3)=0 \iff x+3=0 \vee x+3=0 \iff x=-3$

Alternativamente ao processo referido, para resolver equações completas transforma-se o 1.º membro da equação $ax^2+bx=-c$ no caso notável do **quadrado do binómio**.

EXEMPLO:

Resolva as seguintes equações.

a) $x^2-6x+8=0$ b) $2x^2-5x+2=0$ c) $x^2-7x+12=0$

Resolução

a) $x^2-6x+8=0 \iff x^2-6x=-8 \iff x^2-6x+9=-8+9 \iff (x-3)^2=1$

1.º processo: Aplicando a lei do anulamento do produto

$x^2-6x+8=0 \iff (x-3)^2-1^2=0 \iff (x-3-1)(x-3+1)=0 \iff$
$\iff (x-4)(x-2)=0 \iff x-4=0 \vee x-2=0 \iff x=4 \vee x=2$

2.º processo: Aplicando a definição de raiz quadrada

$x^2-6x+8=0 \iff (x-3)^2=1 \iff x-3=\pm\sqrt{1} \iff x=3\pm1 \iff$
$\iff x=3+1 \vee x=3-1 \iff x=4 \vee x=2$

b) $2x^2-5x+2=0 \iff 2x^2-5x=-2 \iff x^2-\frac{5}{2}x=-1 \iff$

$\iff x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}=\frac{25}{16}-1 \iff \left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ $\quad\left|\left(-\frac{5}{2}:2\right)^2=\left(-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}\right.$

1.º processo: Aplicando a lei do anulamento do produto

$2x^2-5x+2=0 \iff \left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}=0 \iff \left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2=0 \iff$

$\iff \left(x-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)=0 \iff \left(x-\frac{8}{4}\right)\left(x-\frac{2}{4}\right)=0 \iff$

$\iff (x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \iff x-2=0 \vee x-\frac{1}{2}=0 \iff x=2 \vee x=\frac{1}{2}$

2.º processo: Aplicando a definição de raiz quadrada

$2x^2-5x+2=0 \iff \left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16} \iff x-\frac{5}{4}=\pm\sqrt{\frac{9}{16}} \iff$

$\iff x-\frac{5}{4}=\pm\frac{3}{4} \iff x=\frac{5}{4}+\frac{3}{4} \vee x=\frac{5}{4}-\frac{3}{4} \iff x=2 \vee x=\frac{1}{2}$

OBSERVAÇÃO:

Na equação $x^2-6x+8=0$, o coeficiente do termo quadrático é unitário, pelo que é necessário analisar somente qual é o número que devemos adicionar a x^2-6x para construir um quadrado perfeito. Esse número é o **quadrado da metade do coeficiente do termo linear**, isto é, $\left(-\frac{6}{2}\right)^2=9$.

OBSERVAÇÃO:

A equação $2x^2-5x+2=0$ difere da anterior por o coeficiente do termo quadrático não ser unitário. Assim, dividimos ambos os membros da equação pelo coeficiente do termo quadrático e procedemos como na alínea anterior.

c) $x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow x^2-7x=-12$

$\Leftrightarrow x^2-7x+\frac{49}{4}=\frac{49}{4}-12$ $\quad \left|\left(-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}\right.$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

1.º processo: Aplicando a lei do anulamento do produto

$x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-\frac{8}{2}=0 \vee x-\frac{6}{2}=0$

$\Leftrightarrow x=4 \vee x=3$

2.º processo: Aplicando a definição de raiz quadrada

$x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x-\frac{7}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow x-\frac{7}{2}=\pm\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}+\frac{1}{2} \vee x=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=4 \vee x=3$

Exercício n.º 4

Resolva as equações seguintes pelo processo que entender mais simples.

a) $4x(x+6)=-36$

b) $(x+2)^2=4(5+x)$

c) $\frac{3x-1}{4}-\frac{x(x+1)}{8}=0$

d) $\frac{2x^2-x}{2}=\frac{x^2-1}{3}$

2.6. Fórmula resolvente de uma equação quadrática

Existe uma fórmula que permite determinar as soluções de qualquer equação quadrática, nomeadamente, as equações do 2.º grau completas.

Fórmula resolvente de uma equação quadrática

Para a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

OBSERVAÇÃO:

Uma **demonstração da fórmula resolvente** para as equações quadráticas é a seguinte:

$ax^2+bx+c=0$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$

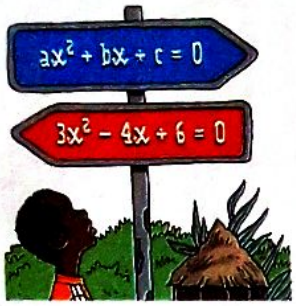
$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$



EXEMPLO:

Resolva as seguintes equações usando a fórmula resolvente.

a) $x^2+6x+9=0$ **b)** $x^2+x+1=0$

c) $x^2+2x-5=0$ **d)** $3x^3+3x^2-18x=0$

Resolução

$a=1$, $b=6$ e $c=9$

a) $x^2+6x+9=0 \iff x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-36}}{2} \iff x=\dfrac{-6\pm 0}{2} \iff x=-3$

(raiz dupla)

$a=1$, $b=1$ e $c=1$

b) $x^2+x+1=0 \iff x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \iff x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

(raízes não reais)

$a=1$, $b=2$ e $c=-5$

c) $x^2+2x-5=0 \iff x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+20}}{2} \iff x=\dfrac{-2\pm\sqrt{24}}{2} \iff$

$\iff x=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{6}}{2} \iff x=-1\pm\sqrt{6} \iff x=-1+\sqrt{6} \vee x=-1-\sqrt{6}$

(raízes reais e diferentes)

$a=1$, $b=1$ e $c=-6$

d) $3x^3+3x^2-18x=0 \iff 3x(x^2+x-6)=0 \iff 3x=0 \vee x^2+x-6=0 \iff$

$\iff x=0 \vee x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \iff x=0 \vee x=\dfrac{-1\pm 5}{2}$

$\iff x=0 \vee x=\dfrac{-1+5}{2} \vee x=\dfrac{-1-5}{2} \iff x=0 \vee x=2 \vee x=-3$

2.6.1. Binómio discriminante e a natureza das raízes

Se na fórmula resolvente das equações quadráticas considerarmos $\Delta = b^2 - 4ac$, temos que:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

A expressão $\Delta = b^2 - 4ac$ designa-se por **binómio discriminante** e representa-se pela letra grega maiúscula Δ que se lê "delta".

No caso de:

- $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e diferentes;
- $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais e iguais (raiz dupla);
- $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

EXEMPLO:

Estude o sinal de Δ relativamente às equações quadráticas do exemplo anterior.

Resolução

a) Para $a=1$, $b=6$ e $c=9$, $\Delta = 6^2-4\times1\times9=0$ e, por isso, a equação tem a raiz dupla igual a -3.

b) Para $a=1$, $b=1$ e $c=1$, $\Delta = 1^2-4\times1\times1=-3<0$, pelo que a equação não tem raízes reais.

c) Para $a=1$, $b=2$ e $c=-5$, $\Delta = 2^2-4\times1\times(-5)=24>0$ e, por isso, a equação tem duas raízes reais diferentes, $-1+\sqrt{6}$ e $-1-\sqrt{6}$.

2.6.2. Simplificação da fórmula resolvente

A fórmula resolvente de uma equação quadrática simplifica-se no caso do coeficiente do termo linear ser um número par, ou seja, $b=2k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Neste caso, $ax^2+bx+c=0 \iff x=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$ para $b=2k$.

Para $a=1$, obtemos um caso particular da expressão simplificada:

$$x=-k\pm\sqrt{k^2-c}.$$

OBSERVAÇÃO:

Se substituirmos $b=2k$ na fórmula resolvente obtemos a seguinte expressão:

$ax^2+bx+c=0$

$\iff x=\dfrac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}$

$\iff x=\dfrac{-2k\pm\sqrt{4(k^2-ac)}}{2a}$

$\iff x=\dfrac{-2k\pm 2\sqrt{k^2-ac}}{2a}$

$\iff x=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$

EXEMPLO:

Resolva as equações seguintes.

a) $(4x-1)^2=(x-1)(x+1)$ b) $\dfrac{x^2-8}{3}=\dfrac{x^2-4}{2}-\dfrac{2x}{3}$ c) $x-\dfrac{3}{4}=(x-1)^2-\dfrac{1}{2}$

Resolução

a) $(4x-1)^2=(x-1)(x+1) \iff 16x^2-8x+1=x^2-1 \iff 15x^2-8x+2=0$

Como $b=-8=2\times(-4)$, então $k=-4$ pelo que:

$15x^2-8x+2=0 \iff x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-30}}{15} \iff x=\dfrac{4\pm\sqrt{-14}}{15} \notin \mathbb{R}$

b) $\dfrac{x^2-8}{3}=\dfrac{x^2-4}{2}-\dfrac{2x}{3} \iff 2x^2-16=3x^2-12-4x \iff x^2-4x+4=0$

Como $b=-4=2\times(-2)$, então $k=-2$ e, usando o caso particular da expressão simplificada porque $a=1$:

$x^2-4x+4=0 \iff x=2\pm\sqrt{4-4} \iff x=2$

c) $x-\dfrac{3}{4}=(x-1)^2-\dfrac{1}{2} \iff 4x-3=4(x^2-2x+1)-2 \iff 4x^2-12x+5=0$

Como $b=-12=2\times(-6)$, então $k=-6$, pelo que:

$4x^2-12x+5=0 \iff x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-20}}{4} \iff x=\dfrac{6\pm\sqrt{16}}{4} \iff$

$\iff x=\dfrac{6\pm 4}{4} \iff x=\dfrac{5}{2} \vee x=\dfrac{1}{2}$

2.7. Relação entre as raízes e os coeficientes da equação quadrática

As raízes de uma equação quadrática $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$ são da forma:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta=b^2-4ac$.

Procedendo a uma simplificação da expressão da soma das raízes obtemos a seguinte relação:

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

Analogamente, a expressão do produto das raízes é a seguinte:

$$P=x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

OBSERVAÇÃO:

Soma das raízes de uma equação quadrática:

$S=x_1+x_2$

$=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$

Produto das raízes de uma equação quadrática:

$P=x_1\times x_2$

$=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$=\dfrac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2}$

$=\dfrac{b^2-\Delta}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$

Desta forma, uma equação quadrática pode ser escrita na forma:

$x^2 - Sx + P = 0$, onde $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

sendo a, b e c os coeficientes dos termos quadrático, linear e independente e x_1 e x_2 as raízes da equação.

EXEMPLOS:

1. Considere a equação $2x^2 - (m-1)x + 8 = 0$. Determine m tal que:
   a) a equação seja incompleta;
   b) a equação tenha raízes reais e iguais;
   c) a equação tenha raízes simétricas;
   d) uma das raízes seja igual a -1.

2. Dada a equação $x^2 - 3(m-1)x + m^2 + 8m + 15 = 0$, determine o número real m tal que $\frac{x_1 x_2 - 24}{x_1 + x_2} = 2$, sendo x_1 e x_2 as raízes da equação dada.

3. Determine uma equação quadrática que admita:
   a) as raízes -4 e 7;
   b) a raiz dupla igual a -4.

Resolução

1. a) Para a equação ser incompleta não pode ter o termo linear já que os restantes não dependem de nenhuma variável. Assim, $m-1=0 \iff m=1$.

   b) Para a equação ter raízes reais e iguais, Δ tem de ser necessariamente nulo.
   $\Delta = [-(m-1)]^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0 \iff (m-1)^2 - 64 = 0 \iff (m-1)^2 = 64 \iff$
   $\iff m-1 = \pm\sqrt{64} \iff m = 1 \pm 8 \iff m = 1+8 \vee m = 1-8 \iff$
   $\iff m = 9 \vee m = -7$

   c) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação: $x_1 = -x_2 \iff x_1 + x_2 = 0 \iff S = 0$.
   Na equação $x^2 - \frac{m-1}{2}x + 4 = 0$, $S = \frac{m-1}{2}$, pelo que:
   $\frac{m-1}{2} = 0 \iff m-1=0 \iff m=1$.

   d) Sendo uma das raízes igual a -1, então, substituindo na equação descobrimos o valor de m.
   $2(-1)^2 - (m-1)(-1) + 8 = 0 \iff 2 + m - 1 + 8 = 0 \iff m + 9 = 0 \iff m = -9$

2. Na equação dada, $P = x_1 x_2 = m^2 + 8m + 15$ e $S = x_1 + x_2 = 3(m-1)$.
   Substituindo na expressão temos que:
   $\frac{m^2 + 8m + 15 - 24}{3(m-1)} = 2 \iff m^2 + 8m - 9 = 6m - 6 \iff m^2 + 8m - 6m - 9 + 6 = 0 \iff$
   $\iff m^2 + 2m - 3 = 0 \underset{k=1}{\iff} m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2} \iff m = 1 \vee m = -3$

3. a) $S = x_1 + x_2 = -4 + 7 = 3$; $P = x_1 x_2 = -4 \times 7 = -28$
   Como $x^2 - Sx + P = 0$, então uma equação quadrática poderá ser $x^2 - 3x - 28 = 0$.
   b) $S = x_1 + x_2 = -4 - 4 = -8$; $P = x_1 x_2 = -4(-4) = 16$
   Uma equação quadrática poderá ser $x^2 + 8x + 16 = 0$.

2.8. Factorização do trinómio quadrático

Conhecidas as raízes de uma equação quadrática, podemos factorizar o polinómio $ax^2 + bx + c$ da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

onde x_1 e x_2 são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

EXEMPLO:

Simplifique as fracções seguintes.

a) $\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x - 2}$ b) $\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$ c) $\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x - 2}$

Resolução

a) As raízes da equação quadrática do numerador são 2 e $\frac{1}{2}$, enquanto que as do denominador são -1 e 2.

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x-1}{x+1}$$

b) As raízes da equação quadrática do numerador são $-\frac{2}{3}$ e 1, enquanto que as do denominador são -2 e 1.

$$\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3x-1}{x-1}$$

d) As raízes da equação quadrática do numerador são $\frac{1}{2}$ e 2, enquanto que as do denominador são -1 e 2.

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{(x+1)(x-2)} = \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x+1}$$

Exercício n.º 5

1. Resolva as seguintes equações, utilizando o método mais conveniente.

a) $(x-2)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = -4x$ b) $(-2x-1)^2 = 3 + (x+2)^2$ c) $(x+5)^2 = (1-x)(1+x) + 24$

d) $(2x+1) + (4x^2 - 1) = 0$ e) $-(-x-3)^2 = 6(-x^2 - x)$ f) $-2x(1-x)(2x+1) = 0$

2. Dada a equação $x^2 + (k+1)x + (2k-5) = 0$, determine o valor de k de modo que:

a) a equação seja incompleta; b) a soma das raízes seja 4;

c) admita duas raízes do mesmo sinal; d) admita a raiz -2.

3. Simplifique as fracções seguintes.

a) $\frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 2x - 1}$ b) $\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 8x + 16}$ c) $\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 4x + 3}$

4. Determine uma equação quadrática que admita:

a) raiz dupla -3; b) raízes 0 e $\sqrt{2}$; c) raiz dupla $\sqrt{5}$.

3. Problemas do 2.º grau

OBSERVAÇÃO:

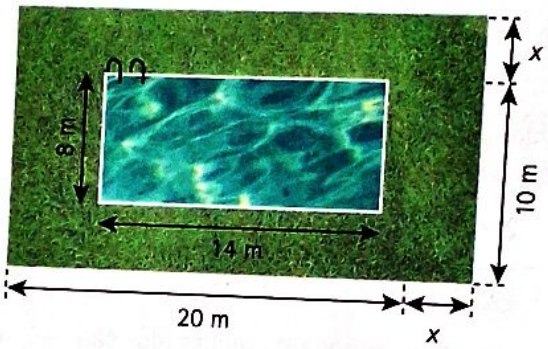
Em qualquer problema e após a sua **compreensão** devemos sempre:

- identificar a **incógnita** e explicar o seu significado;
- traduzir o problema por uma **equação** (por vezes, fazer um desenho ou um esquema pode ajudar à sua formulação);
- resolver a equação pelo processo mais conveniente;
- interpretar **a(s) solução(ões)** da equação e verificar se também são do problema;
- formular a **resposta** de acordo com o problema proposto.

A estratégia mais adequada na resolução de vários problemas é escrever uma equação que o traduza. No caso dessa equação ser quadrática, o problema designa-se por **problema do 2.º grau.**

EXEMPLOS:

1. Na figura seguinte está representada uma piscina com a forma de um rectângulo inserida num recinto relvado também rectangular.



A área da parte relvada é de $187\ m^2$. Determine o valor de x.

2. A soma dos quadrados de três números inteiros consecutivos é 50. Quais são os números?

Resolução

1. Seja x o comprimento da medida desconhecida. Sabendo que a área da parte relvada é de $187\ m^2$ dado pela expressão $(20+x)(10+x)-8\times 14$ então o problema pode ser traduzido pela equação $(20+x)(10+x)-8\times 14=187$.

$$(20+x)(10+x)-8\times 14=187 \iff 200+20x+10x+x^2-112-187=0 \iff$$
$$\iff x^2+30x-99=0 \iff$$
$$\underset{k=15}{\iff} x=-15\pm\sqrt{15^2+99} \iff x=-33 \vee x=3$$

Como uma medida de comprimento não pode ser um valor negativo, $x=-33$ não é solução do problema.

R.: O valor da medida desconhecida é de 3 metros.

2. Sejam x, $x+1$, $x+2$ os três números inteiros consecutivos e, x^2, $(x+1)^2$ e $(x+2)^2$ os seus quadrados, respectivamente.

R.: Como a soma dos quadrados é igual a 50, a equação que traduz o problema é:

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=50.$$

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=50 \iff x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4-50=0 \iff$$
$$\iff 3x^2+6x-45=0 \iff x^2+2x-15=0 \iff$$
$$\underset{k=1}{\iff} x=-1\pm\sqrt{1^2+15} \iff x=3 \vee x=-5$$

R.: Os números são -5, -4 e -3 ou 3, 4 e 5.

Exercício n.º 6

1. A altitude h, em metros, atingida por um corpo que é lançado verticalmente para o ar, ao fim de t segundos com uma velocidade inicial de 200 m/s, é dada pela fórmula:

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 200t + 50$$

a) A que altitude se encontra o corpo ao fim de 2 segundos?

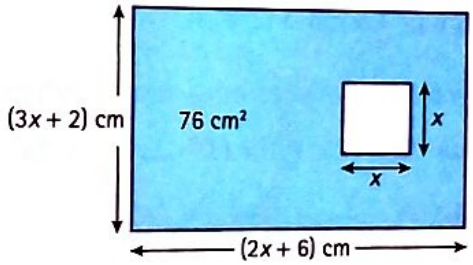
b) Qual é a altura da plataforma onde estava o corpo antes de ser lançado?

c) Quanto tempo demorou o corpo a atingir o solo?

2. Uma caixa de alfinetes tem a forma de um bloco, como se mostra na figura.

A caixa tem 24 cm de altura e a largura é inferior ao comprimento em 2 cm. Sabendo que o volume da caixa é de 1,512 dm^3, calcule as suas dimensões.

3. A um rectângulo de cartolina retirou-se um quadrado de lado x. A área da parte colorida é de 76 cm^2.



De acordo com os restantes lados constantes na figura, determine as dimensões do rectângulo.

4. Comprou-se um certo número de rebuçados por 6 meticais. Se cada rebuçado custasse menos 10 centavos poder-se-ia ter comprado mais 2 rebuçados.

a) Quantos rebuçados se compraram?

b) Quanto custou cada rebuçado?

5. No Parque Nacional da Gorongosa andam macacos a brincar em dois grupos.

Num grupo os macacos gritam alegremente enquanto que no outro alimentam-se de vegetação.

A soma do quadrado da oitava parte do grupo que se alimenta com 12 dos que com gritos alegres atroam os amigos é 28.

Quantos macacos são no total?

6. Determine dois números ímpares consecutivos, sendo que a soma dos seus quadrados é igual a 2050.

4 AVALIAÇÃO FORMATIVA

1. Considere a equação $x^2 + (2m - 1)x = -m$.

a) Resolva a equação para $m = 2$.

b) Para que valores de m a equação é incompleta?

c) Determine o valor de m para que a equação admita a raiz -2.

d) Para que valores de m a equação admite raiz dupla?

e) Obtenha o valor de m para que a soma das raízes seja -3.

2. Sem recorrer à fórmula resolvente, resolva as equações seguintes.

a) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(3x + \frac{1}{4}\right) = 0$

b) $16x^2 - (x + 1)^2 = 0$

c) $(2 + x)^2 = 5(2 + x)$

3. Resolva as seguintes equações pelo método mais conveniente.

a) $2x^2 - 2x + 1 = (1 - 2x)(1 + 2x)$

b) $x^2 - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x$

c) $\frac{x - 2}{2} - x(x + 1) = -19$

4. Numa equação quadrática, a soma das raízes é 7 e uma delas é 3.

a) Calcule o valor da outra raiz.

b) Escreva uma equação quadrática que admita as raízes em estudo.

5. Comente cada uma das seguintes afirmações.

a) Todas as equações $ax^2 = 0$ com $a \neq 0$ têm duas soluções simétricas.

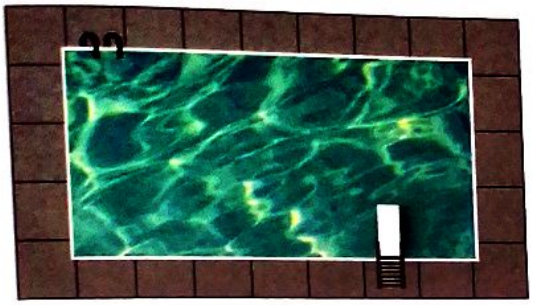
b) Uma equação do tipo $ax^2 = c$ com a e c não nulos é sempre possível.

c) As equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ com a e b não nulos têm uma solução nula.

d) Qualquer equação completa do 2.º grau tem duas raízes reais distintas.

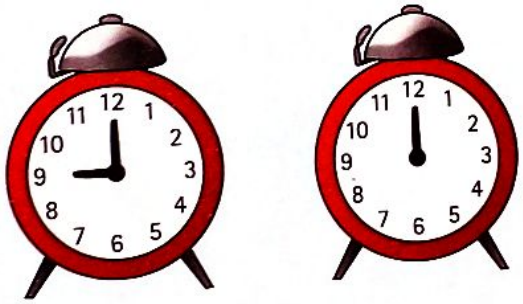
6. **A soma da diferença dos quadrados de dois números ímpares consecutivos com a 96 é igual ao quadrado do número par compreendido entre eles. Quais são os números?**

7. **Em torno de uma piscina rectangular com 8 m de comprimento e 4 m de largura, construiu-se um passeio de largura constante.**



Sabendo que a área do passeio é de $28\ m^2$, determine a sua largura.

8. **Às 9 horas, as extremidades dos ponteiros de um relógio distam 20 cm e ao meio-dia tal distância é de 4 cm.**



Determine o comprimento dos ponteiros do relógio.

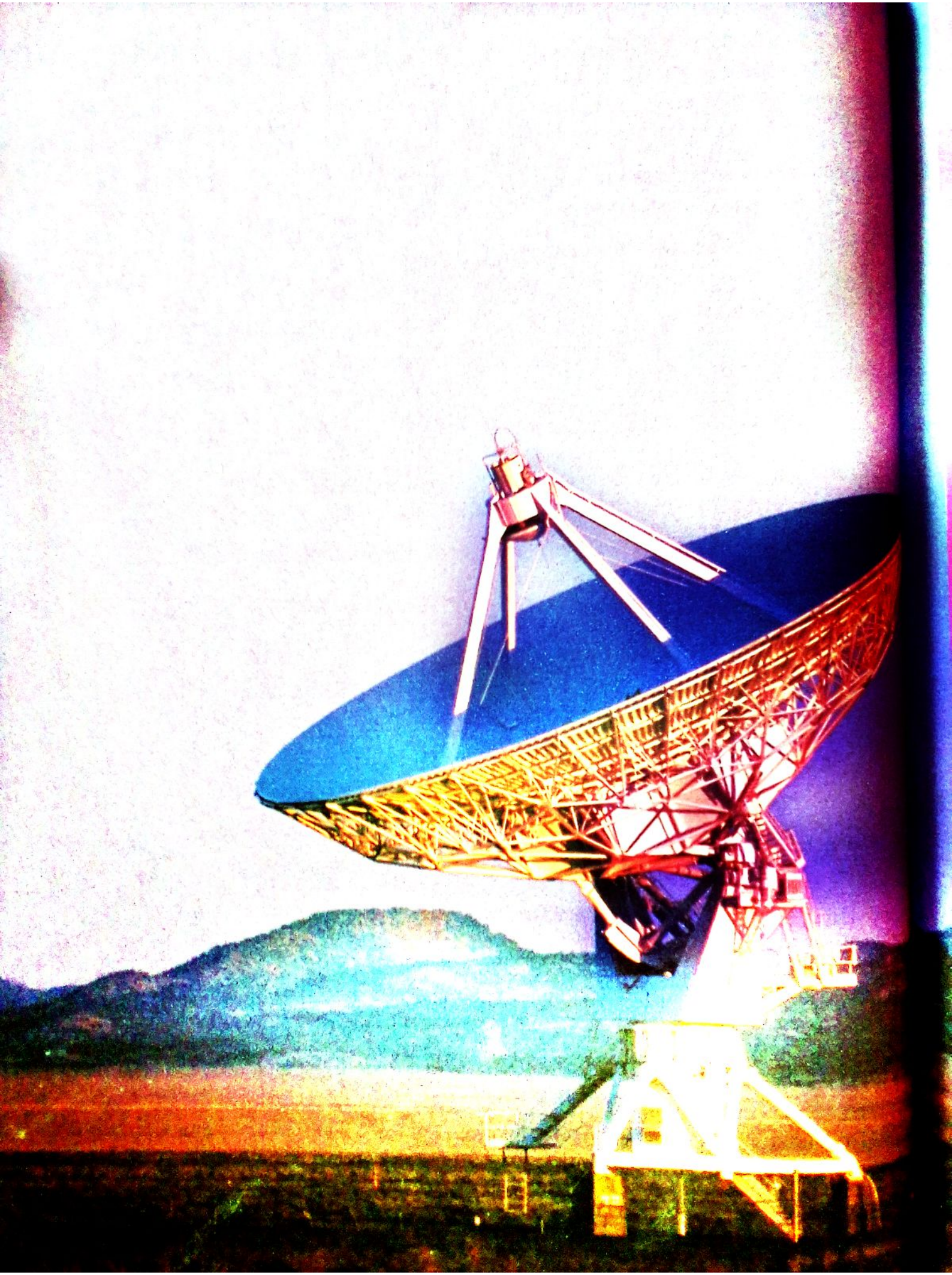
9. **Um quadro com 30 cm de comprimento e 20 cm de largura foi encaixilhado numa moldura de largura uniforme.**

A área da moldura é precisamente igual à área da tela.

a) Qual é a área total da tela com moldura?

b) Qual é a largura da moldura?

10. **A dona de um supermercado comprou 160,00 Mt de iogurtes mas antes de os vender passaram de prazo 20 iogurtes. Vendeu os outros com o lucro de 1,00 Mt em cada um, ganhando no negócio apenas 20,00 Mt. Quantos iogurtes comprou?**



5 FUNÇÃO QUADRÁTICA

1. FUNÇÃO QUADRÁTICA

2. PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES QUADRÁTICAS

5 FUNÇÃO QUADRÁTICA

UM POUCO DE HISTÓRIA...

O termo matemático "função" foi introduzido pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) para designar qualquer váriável associada a uma curva. No entanto, a definição de função surge mais tarde com Leonard Euler (1707-1783), matemático suíço que escreveu "Se x é uma quantidade variável, então toda a quantidade que depende de x de qualquer maneira, ou que seja determinada por aquela, chama-se função da dita variável".

Euler utilizou pela primeira vez a notação $f(x)$.

1. Função quadrática

1.1. Noção de função quadrática

Na classe anterior estudámos funções do 1.º grau e suas representações no sistema cartesiano ortogonal.

EXEMPLO:

Esboce o gráfico da função do 1.º grau $y=3x-2$ num sistema cartesiano ortogonal.

Resolução

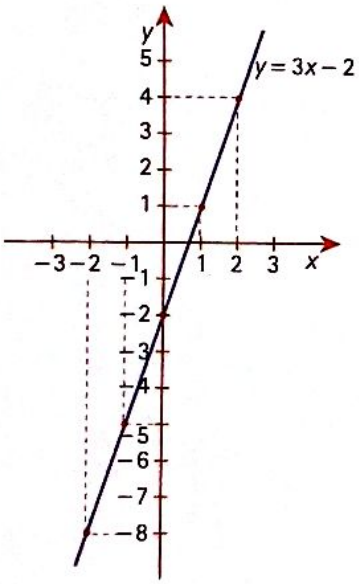
Para representarmos graficamente a função escolhemos alguns valores de x (números inteiros próximos de zero) e calculamos as suas imagens.

x	$y=3x-2$
-2	$3\times(-2)-2=-6-2=-8$
-1	$3\times(-1)-2=-3-2=-5$
0	$3\times0-2=0-2=-2$
1	$3\times1-2=3-2=1$
2	$3\times2-2=6-2=4$

Os pares ordenados que satisfazem a relação $y=3x-2$ são:

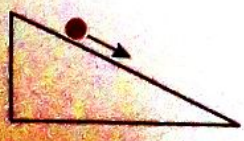
$(-2, -8)$; $(-1, -5)$; $(0, -2)$; $(1, 1)$ e $(2, 4)$.

Representando num sistema cartesiano ortogonal os pares ordenados referidos e unindo-os, obtemos uma recta, como podemos observar na representação ao lado.



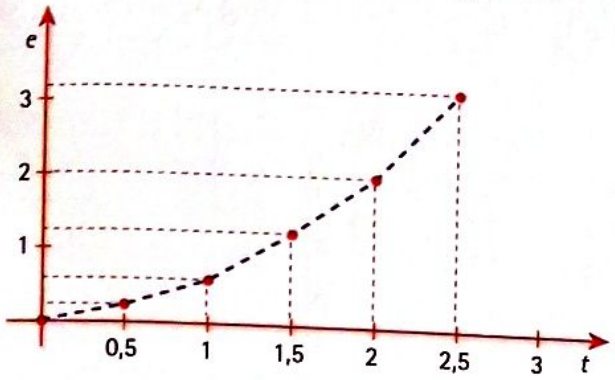
O gráfico de uma função do 1.º grau é uma linha recta e, por isso, é designada por **função afim.**

Registou-se na tabela seguinte o espaço percorrido (e) por uma bola que desce livremente num plano inclinado.



t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
e	0	0,125	0,5	1,125	2	3,125

Um esboço do gráfico da função é o seguinte:



O modelo matemático para a situação apresentada é traduzido pela expressão analítica $e(t) = 0{,}5t^2$, $t \geqslant 0$. Esta função é designada por **função quadrática** ou **função do 2.º grau** e é muito usada para descrever situações da vida real.

Uma **função quadrática** é uma função do 2.º grau da forma $y = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$ e a, b e c são números reais.

EXEMPLO:

Verifique se $y = (2x-1)^2 - 2(2x^2 - x)$ é uma função quadrática.

Resolução

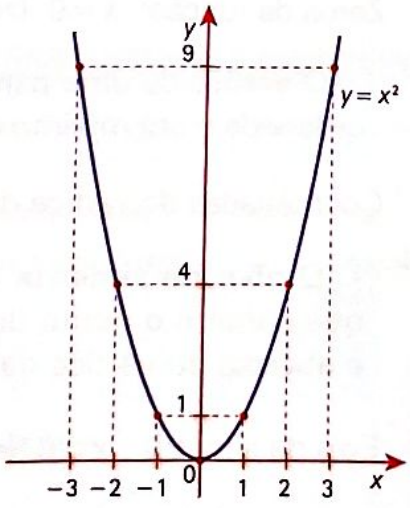
$y = (2x-1)^2 - 2(2x^2 - x) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 2x = -2x + 1$

Trata-se de uma função afim e não quadrática.

1.2. Estudo da função $y = ax^2$, $a \neq 0$

Consideremos a função $y = x^2$ em que $a = 1$. Para procedermos à sua representação gráfica num sistema cartesiano ortogonal, temos de determinar alguns pares ordenados que satisfaçam a função.

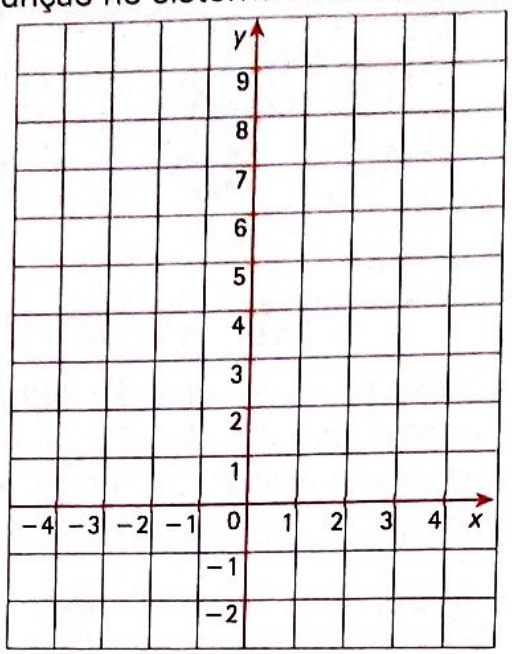
x	$y = x^2$
-3	$(-3)^2 = 9$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
3	$3^2 = 9$



A representação gráfica de uma função quadrática é uma linha curva designada por **parábola**.

Relativamente à função $y = 0{,}5x^2$, complete a tabela ao lado e represente a função no sistema cartesiano ortogonal seguinte.

x	$y = 0{,}5x^2$
-4	$0{,}5 \times (-4)^2 = 0{,}5 \times 16 = 8$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



Com base nas representações gráficas das funções quadráticas $y = 0{,}5x^2$ e $y = x^2$, estudaremos algumas características importantes das funções $y = ax^2$, com $a \neq 0$ e $a > 0$.

a) O **domínio** de uma função é o conjunto formado pelos objectos e representa-se por D.

Domínio da função: $D = \mathbb{R}$;

b) Concavidade da parábola: voltada para cima;

c) Os **zeros** de uma função são as abcissas dos pontos cujas ordenadas são nulas, ou seja, onde a função corta o eixo das abcissas.

Zeros da função: $x = 0$ (zero duplo);

d) O **vértice** de uma parábola é o ponto do gráfico cuja ordenada é um mínimo ou máximo absoluto da função.

Coordenadas do vértice da função: $V \curvearrowright (0\ ,\ 0)$;

e) O **eixo de simetria** da parábola é a recta vertical que contém o ponto de coordenadas $(a\ ,\ 0)$ onde a é abcissa do vértice da parábola.

Eixo de simetria: $x = 0$ (eixo das ordenadas);

f) O **contradomínio** de uma função é o conjunto das imagens e representa-se por CD ou D'.

Contradomínio da função: $D' = [0\ ,\ +\infty[$;

OBSERVAÇÃO:
Cálculo dos zeros da função:
Para $y = 0$,
$0 = x^2 \iff x^2 = 0$
$\iff x = \pm\sqrt{0}$
$\iff x = 0$

g) **Uma função monótona é uma função que é crescente ou decrescente em todo o seu domínio.**

Nas funções em estudo, podendo verificar que se $a > 0$ a função é crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$; se $a < 0$ a função é decrescente para $x > 0$ e crescente para $x < 0$. Ambas as funções têm o vértice no ponto $(0\ ,\ 0)$. É o **ponto de mudança** da variação da função. Esta informação pode ser resumida na seguinte tabela, designada por **tabela de variação da função:**

	$a > 0$			$a < 0$		
x	$]-\infty\ ,\ 0[$	0	$]0\ ,\ +\infty[$	$]-\infty\ ,\ 0[$	0	$]0\ ,\ +\infty[$
y	↘	0	↗	↗	0	↘

Assim, diz-se que a função é **monótona decrescente** de $]-\infty\ ,\ 0]$ e **monótona crescente** de $[0\ ,\ +\infty[$. O vértice $(0\ ,\ 0)$ é o **ponto de mudança** da variação da função.

h) **Sinal** da função:

Para qualquer valor de x à excepção do ponto $(0\ ,\ 0)$, o sinal da função (sinal dos valores das ordenadas) é sempre positivo para $a > 0$ e sempre negativo para $a < 0$, como podemos verificar na tabela seguinte designada **por tabela de variação de sinal:**

	$a > 0$			$a < 0$		
x	$]-\infty\ ,\ 0[$	0	$]0\ ,\ +\infty[$	$]-\infty\ ,\ 0[$	0	$]0\ ,\ +\infty[$
y	$+$	0	$+$	$-$	0	$-$

Assim, diz-se que a função é positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

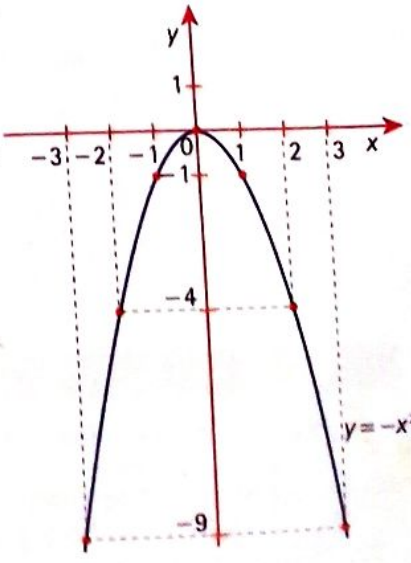
x	$y = -x^2$
-3	$-(-3)^2 = -9$
-2	$-(-2)^2 = -4$
-1	$-(-1)^2 = -1$
0	$0^2 = 0$
1	$-1^2 = -1$
2	$-2^2 = -4$
3	$-3^2 = -9$

EXEMPLO:

Considere a função $y = -x^2$. Represente a função num sistema cartesiano ortogonal e indique:

a) o domínio; **b)** a concavidade; **c)** os zeros;

d) as coordenadas do vértice; **e)** o eixo de simetria; **f)** o contradomínio.



Resolução

a) $D = \mathbb{R}$

b) A concavidade da função é voltada para baixo.

c) O zero da função é $x = 0$ (zero duplo).

d) $V \curvearrowright (0\ ,\ 0)$

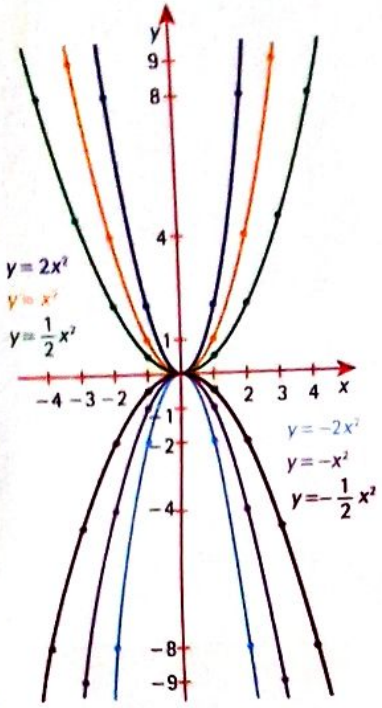
e) $x = 0$ (eixo dos yy)

f) $D' =]-\infty\ ,\ 0]$

Exercício n.º 1

Para cada uma das seguintes funções, represente-as num sistema cartesiano ortogonal e indique o seu domínio, concavidade, zeros, vértice, eixos de simetria, contradomínio, monotonia e variação de sinal da função.

a) $y=2x^2$ b) $y=-2x^2$ c) $y=\frac{1}{2}x^2$ d) $y=-\frac{1}{2}x^2$



1.2.1. Significado do coeficiente *a* de uma função quadrática

Consideremos a representação gráfica ao lado de seis funções do tipo $y=ax^2$, $a\neq 0$, num só sistema cartesiano ortogonal.

A partir do gráfico, o que podemos concluir sobre:

a) a relação do **coeficiente** a com a **concavidade** da parábola?

- Se a for **positivo** $(a>0)$, a concavidade está voltada para **cima**;
- Se a for **negativo** $(a<0)$, a concavidade está voltada para **baixo**.

b) a relação do **coeficiente** a com a **abertura da parábola**?

Quanto **maior** for o valor de $|a|$ (valor absoluto de a), **menor** será a abertura da parábola.

Por exemplo, a representação gráfica de $y=2x^2$ tem menor abertura do que a de $y=x^2$ e a de $y=\frac{1}{2}x^2$, porque $2>1$ e $2>\frac{1}{2}$, respectivamente.

Também a representação gráfica de $y=-2x^2$ tem menor abertura do que a de $y=-x^2$ e a de $y=-\frac{1}{2}x^2$, já que:

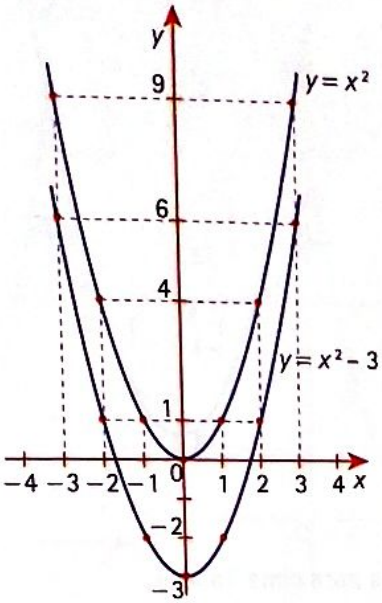
$|-2|>|-1|$ e $|-2|>\left|-\frac{1}{2}\right|$, respectivamente.

c) a relação do **coeficiente** a com o **contradomínio** da parábola?

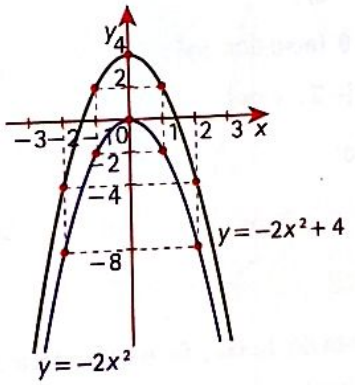
Como nos gráficos deste tipo de funções, o vértice coincide com a origem do sistema cartesiano, se $a>0$ então $D'=[0\,,+\infty[$ e se $a<0$ então $D'=]-\infty\,,0]$.

1.3. Estudo da função $y = ax^2 + c$, com a e c não nulos

Representando os gráficos das funções $y = x^2$ e $y = x^2 - 3$ no mesmo sistema cartesiano ortogonal, concluímos que $y = x^2 - 3$ está transladado 3 unidades para baixo relativamente a $y = x^2$.



Relativamente às representações gráficas das funções $y = -2x^2 + 4$ e $y = -2x^2$ concluímos que $y = -2x^2 + 4$ está transladado 4 unidades para cima no eixo vertical que $y = -2x^2$.



A principal diferença entre as representações gráficas das funções dos tipos $y = ax^2$ e $y = ax^2 + c$ com a e c não nulos é que este está transladado c unidades **verticalmente** (para cima se $c > 0$ e para baixo se $c < 0$) em relação à função $y = ax^2$.

Exercício n.º 2

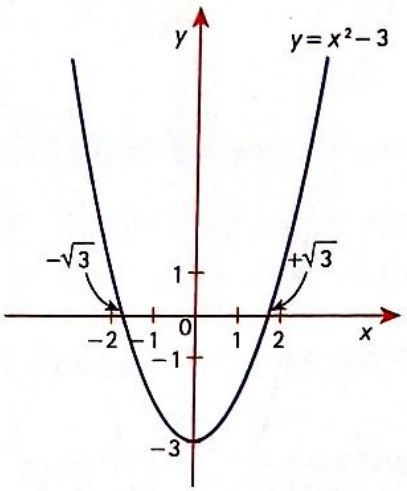
1. Represente graficamente as funções $y = x^2 - 5$ e $y = -x^2 + 6$ a partir de $y = x^2$ num só sistema cartesiano ortogonal.
2. Calcule alguns valores correspondentes de x e y para a função $y = 3x^2$ e represente-a graficamente. De seguida, no mesmo sistema cartesiano ortogonal, trace a representação gráfica da função $y = 3x^2 + 4$.

EXEMPLO:

Faça um estudo da função $y = x^2 - 3$.

Resolução

• Representação gráfica da função $y = x^2 - 3$:



• Domínio: $D = \mathbb{R}$;

• Concavidade voltada para cima ($a > 0$);

• Zeros da função:

$x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$

Os zeros da função são $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

• Vértice: $V \curvearrowright (0, -3)$;

• Eixo de simetria: $x = 0$ (eixo dos yy);

• Contradomínio: $D' = [-3, +\infty[$

• Monotonia da função:

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, +\infty[$
y	↘	-3	↗

A função é **decrescente** de $]-\infty, 0]$ e **crescente** de $[0, +\infty[$.

O ponto $(0, -3)$ é o ponto de mudança da variação da função.

• Variação do sinal da função:

x	$]-\infty, -\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$]\sqrt{3}, +\infty[$
y	+	0	−	0	+

O sinal da função é **positivo** nos intervalos de $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e de $]\sqrt{3}, +\infty[$ e **negativo** no intervalo de $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

Exercício n.º 3

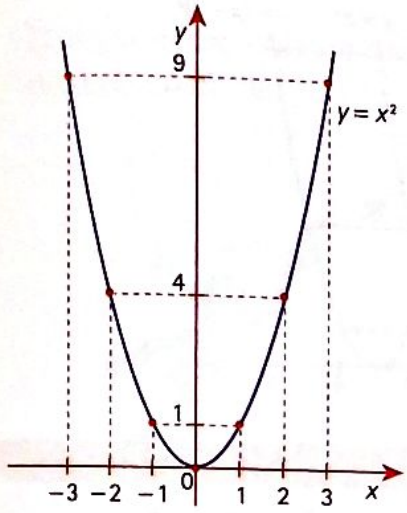
Faça o estudo das seguintes funções.

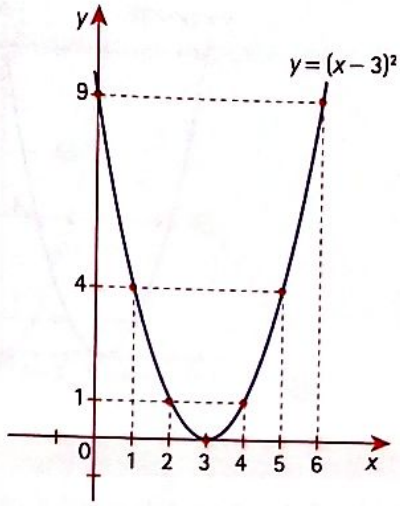
a) $y = x^2 - 4$ b) $y = -2x^2 + 6$ c) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

1.4. Representação gráfica da função $y = a(x - p)^2 + c$ a partir de $y = ax^2$ com a não nulo

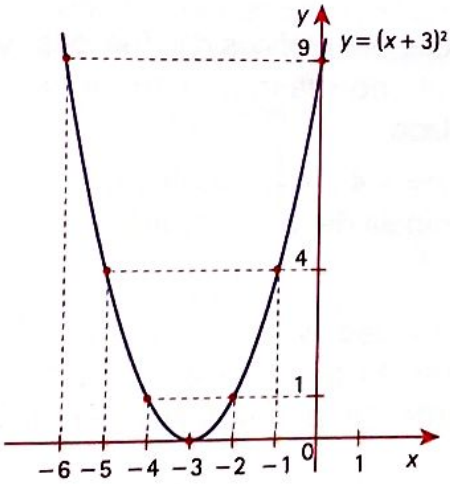
Consideremos a função $y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Comparando as representações gráficas das funções $y = (x - 3)^2$ e $y = x^2$, podemos concluir que a primeira sofre uma deslocação para a **direita** de 3 unidades.





A representação gráfica da função $y = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ é a seguinte:



Comparativamente à representação gráfica da função $y = x^2$, o gráfico de $y = (x + 3)^2$ sofre uma deslocação para a **esquerda** de 3 unidades.

Desta forma, qual a conclusão que podemos tirar sobre o parâmetro "p" nas funções do tipo $y = a(x - p)^2$?

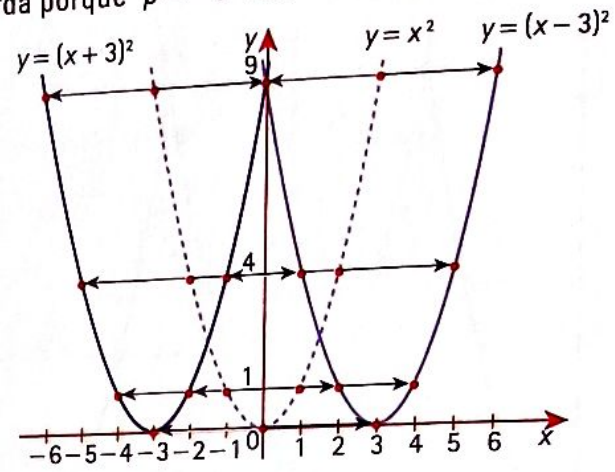
O parâmetro p na função $y = a(x - p)^2$, com $a \neq 0$, exprime uma translação horizontal de p unidades da parábola em comparação com a função $y = ax^2$. Se $p > 0$ então o gráfico desloca-se p unidades para a direita, se $p < 0$ então o gráfico desloca-se p unidades para a esquerda.

EXEMPLO:

A partir do gráfico da função $y=x^2$, construa os gráficos de $y=(x-3)^2$ e $y=(x+3)^2$.

Resolução

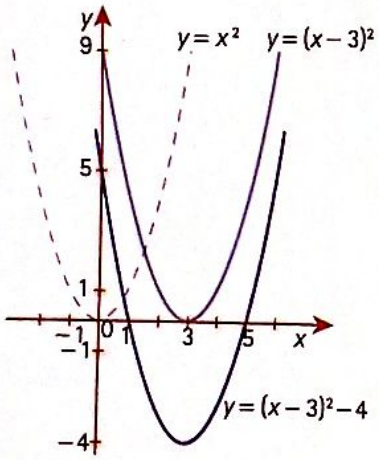
O gráfico da função $y=(x-3)^2$ desloca-se 3 unidades para a direita porque $p=3>0$, enquanto que o de $y=(x+3)^2=(x-(-3))^2$ desloca-se 3 unidades para a esquerda porque $p=-3<0$.



Exercício n.º 4

Represente os gráficos das seguintes funções sem o uso da tabela e indique os eixos de simetria.

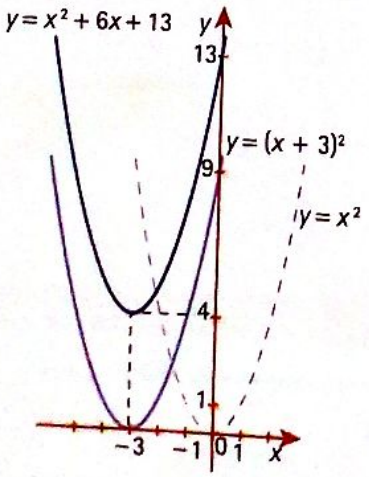
a) $y=(x-5)^2$ **b)** $y=x^2+8x+16$



As representações dos gráficos das funções $y=x^2$, $y=(x-3)^2$ e $y=(x-3)^2-4$ no mesmo sistema cartesiano ortogonal encontram-se ao lado.

Para $p=3$ e $c=-4$, o gráfico da função $y=x^2$ sofre uma deslocação da parábola de 3 unidades para a direita e 4 unidades para baixo.

O gráfico da função $y=a(x-p)^2+c$ com a não nulo obtém-se a partir do gráfico de $y=ax^2$ deslocando-o c unidades na vertical e p unidades na horizontal.



EXEMPLO:

Represente graficamente a função $y=x^2+6x+13$ e indique o seu domínio, zeros, vértice, eixo de simetria e contradomínio.

Resolução

$$y=x^2+6x+13=x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2+13=x^2+6x+9-9+13=(x+3)^2+4$$

O gráfico da função $y=x^2+6x+13=(x+3)^2+4$ obtém-se do gráfico de $y=x^2$ através de uma deslocação de 3 unidades para a esquerda $(p=-3)$ e de 4 unidades para cima, como se pode verificar no gráfico ao lado.

Pela análise do gráfico concluímos que $D=\mathbb{R}$, não tem zeros, $V=(-3, 4)$, o eixo de simetria é $x=-3$ e que $D'=[4, +\infty[$.

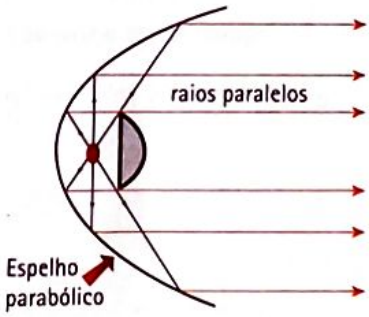
2. Problemas envolvendo a função quadrática

A função quadrática é um modelo matemático muito utilizado nas ciências assim como em inúmeras situações do quotidiano.

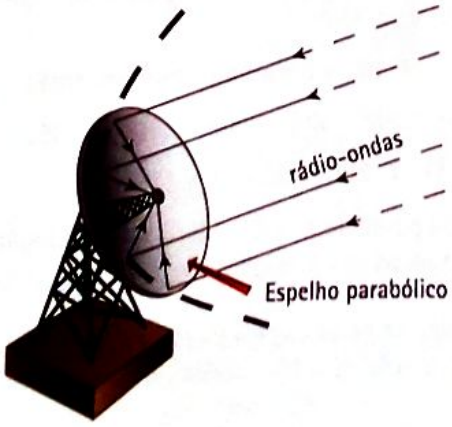
De seguida, estão presentes alguns exemplos de aplicação deste tipo de modelo matemático.

- O lançamento oblíquo de uma pedra pelo ar pode ter a forma de uma parábola.

- O reflector do farol de um carro tem a forma parabólica para reflectir paralelamente os raios da lâmpada.



- Na radioastronomia usam-se grandes espelhos parabólicos para focar as ondas oriundas do Universo.



EXEMPLO:

Um foguete é lançado verticalmente para o ar. A altitude A, em metros, que o foguete atinge ao fim de t segundos é dada por:

$$A(t) = 50t - 5t^2$$

a) A que altitude está o foguete ao fim de 5 segundos?

b) Em que instante o foguete atinge o solo?

c) Determine em que instantes o foguete se encontra a uma altitude igual a 80 metros.

d) Qual a altitude máxima atingida pelo foguete?

e) Durante quanto tempo o foguete esteve no ar?

Resolução

a) $A(5) = 50 \times 5 - 5 \times 5^2 = 250 - 125 = 125$

Ao fim de 5 segundos, o foguete está a uma altitude igual a 125 metros.

b) O foguete atinge o solo para $A(t) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} A(t) = 0 &\iff 50t - 5t^2 = 0 \\ &\iff 5t(10 - t) = 0 \\ &\iff 5t = 0 \vee 10 - t = 0 \\ &\iff t = 0 \vee t = 10 \end{aligned}$$

O foguete atinge o solo ao fim de 10 segundos.

c) $A(t) = 80 \iff 50t - 5t^2 = 80$

$$\iff -5t^2 + 50t - 80 = 0$$

$$\iff t = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - (-5) \times (-80)}}{-5}$$

$$\iff t = \frac{-25 \pm 15}{-5}$$

$$\iff t = 2 \vee t = 8$$

O foguete encontra-se a uma altitude de 80 metros ao fim de 2 e 8 segundos.

d) Para determinar a altitude máxima atingida pelo foguete, necessitamos de calcular o vértice da parábola.

Como $A(t) = 50t - 5t^2$ não é um produto notável, então:

$A(t) = -5t^2 + 50t = -5(t^2 - 10t) = -5(t^2 - 10t + 25 - 25) =$

$= -5(t - 5)^2 + (-5) \times (-25) = -5(t - 5)^2 + 125$

Como o vértice da parábola é $V(5, 125)$, então o foguete atinge uma altitude máxima de 125 metros aos 5 segundos.

e) O foguete encontra-se no ar entre o instante inicial, $t = 0$, e o instante em que toca novamente o solo, $t = 10$. Assim, o projéctil esteve no ar durante 10 segundos.

1. A distância ao solo de um helicóptero em função do tempo, em segundos, é dada por:

$$s(t)=\frac{1}{2}g\,t^2$$

onde g representa a aceleração de gravidade que se considera igual a $9{,}8\ m/s^2$.

a) Represente graficamente a situação apresentada.

b) Determine o instante em que o helicóptero lançou uma caixa de alimentos pelo ar sabendo que o fez quando se encontrava a uma distância do solo igual a 300 metros.

2. Lança-se uma flecha para o ar a partir de um ponto situado a 2 metros do solo. Durante o movimento, a distância ao solo, h, da flecha no instante t é dada por:

$$h(t)=-5t^2+20t+2$$

As unidades utilizadas são o segundo para o tempo e o metro para a distância ao solo.

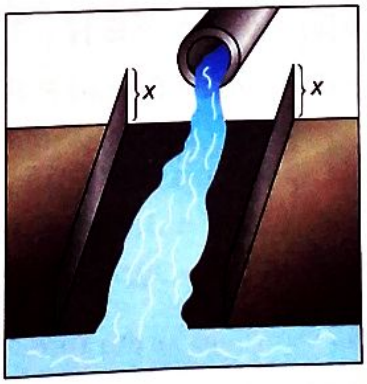
a) Em que momentos a flecha está a uma distância do solo de 2 metros?

b) Qual a altura máxima atingida pela flecha? Em que instante a atingiu?

c) A flecha atingirá a altura de 60 metros? Justifique apresentando todos os cálculos.

d) Quanto tempo esteve a flecha no ar?

3. Pretende-se produzir uma peça para conduzir a água de uma conduta de águas pluviais. Para tal, numa "folha" de metal com 50 cm de largura dobraram-se dois dos seus lados, como mostra a figura seguinte. Para que a quantidade de água transportada seja máxima, qual deve ser o valor de x?



4. Um cabo suspenso por dois pilares com a mesma altura faz uma curva com a forma de uma parábola de equação:

$$h(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+10$$

onde h é a altura do cabo ao solo em função de x que representa, em metros, a distância ao primeiro dos pilares.

a) Qual é a altura dos pilares e a que distância se encontram um do outro?

b) Determine a altura mínima do cabo ao chão.

5 AVALIAÇÃO FORMATIVA

I

Para cada questão são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta. Escreva a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder à questão.

1. Acerca da função quadrática $f(x) = 2x^2 - 4$, pode-se afirmar que:

(A) o vértice da parábola que representa graficamente f é o ponto de coordenadas $(2\ ,\ 4)$;

(B) a função é negativa em todo o seu domínio;

(C) o eixo de simetria é $x = 2$;

(D) o contradomínio de f é $[-4\ ,\ +\infty[$.

2. De uma função quadrática h, sabe-se que 1 é um zero e que $(2\ ,\ 3)$ são as coordenadas do vértice da parábola.

Então, pode afirmar-se que:

(A) o contradomínio da função é $[3\ ,\ +\infty\ [$;

(B) a concavidade da parábola está voltada para cima;

(C) $h(x) > 0 \iff x \in]1\ ,\ 3[$;

(D) o domínio da função é $\mathbb{R}^+$.

3. O João atirou uma bola ao ar com uma velocidade inicial de 30 m/s. A altura dada pela bola ao fim de t segundos é dada pela expressão $h(t) = 30t - 4{,}9t^2$.

A bola esteve no ar durante:

(A) 6,12 s;

(B) 6 s;

(C) mais que 6,12 s;

(D) menos que 6 s.

4. A função $g(x) = a(x - h)^2 - k$ não tem zeros e $a > 0$.

Nestas condições:

(A) $k > 0$;

(B) $k = 0$;

(C) $k < 0$;

(D) $k \geqslant 0$.

1. **O modelo matemático do arco de uma ponte é dado por $y = -\frac{1}{2}x^2$.**

a) Complete a seguinte tabela.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

b) Represente graficamente a função para $-3 \leqslant x < 3$.

2. **Faça um estudo das funções seguintes.**

a) $y = (x-4)^2 + 2$

b) $y = (x+7)^2 - 1$

c) $y = x^2 + 12x + 33$

d) $y = x^2 - 20x + 105$

3. **Represente graficamente a função $y = (x+2)^2 - 4$ e responda às seguintes perguntas.**

a) Qual o eixo de simetria da parábola?

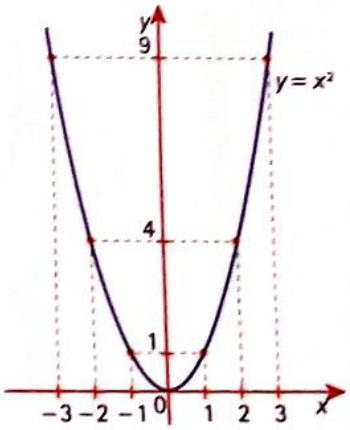
b) Quais as coordenadas do vértice da função?

c) Qual o contradomínio da função?

d) Em que intervalo é que a função é crescente?

e) Em que intervalo é que o sinal da função é negativo?

4. **Na figura ao lado, está uma representação gráfica da função $y = x^2$.**
Descreva como pode, partindo do gráfico da figura, obter o gráfico de $y = -2x^2 + 2$.



5. **As figuras mostram representações gráficas de três funções quadráticas.**

Gráfico *A*

Gráfico *B*

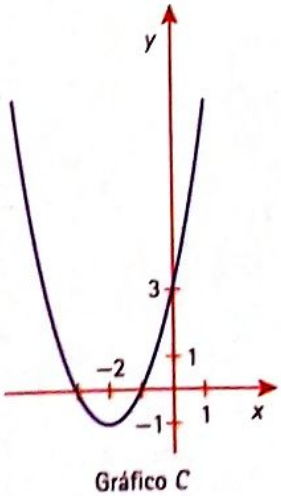


Gráfico *C*

Indique, para cada uma das funções:

a) o seu eixo de simetria;

b) as coordenadas do vértice;

c) a expressão analítica.

6 QUADRILÁTEROS

1.
QUADRILÁTEROS

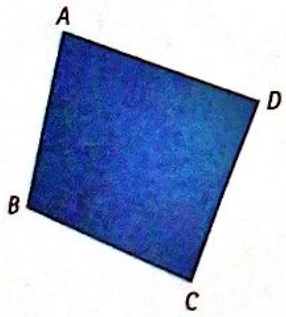
2.
CONCEITOS E PROPRIEDADES DOS QUADRILÁTEROS

6 QUADRILÁTEROS

1. Quadriláteros

1.1. Noção de quadrilátero

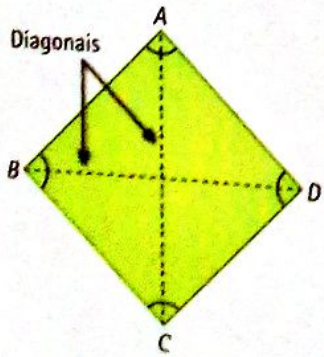
Os quadriláteros são polígonos com quatro lados. No nosso quotidiano, encontramos vários exemplos de quadriláteros: numa porta, numa capa de um CD, numa janela, no vidro de um carro, no ecrã de um televisor e de um computador, etc.



Os elementos de um quadrilátero $[ABCD]$ são:

- os vértices: A, B, C e D;
- os lados: $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[AD]$;
- os ângulos internos ou, simplesmente, ângulos: $\measuredangle BAD$, $\measuredangle CBA$, $\measuredangle DCB$ e $\measuredangle ADC$.

Num quadrilátero, dois lados ou dois ângulos não consecutivos são chamados opostos, caso contrário dizem-se adjacentes.



No quadrilátero $[ABCD]$ mencionado, podemos verificar que:

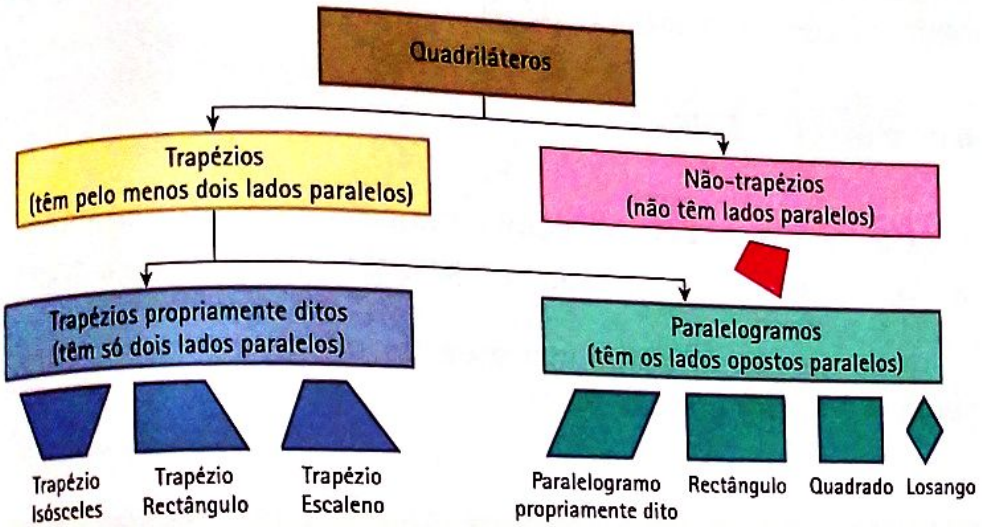
- os lados opostos são: $[AB]$ e $[CD]$; $[BC]$ e $[AD]$;
- os ângulos opostos são: $\measuredangle BAD$ e $\measuredangle DCB$; $\measuredangle CBA$ e $\measuredangle ADC$;
- os ângulos adjacentes são: $\measuredangle BAD$ e $\measuredangle CBA$; $\measuredangle CBA$ e $\measuredangle DCB$; $\measuredangle DCB$ e $\measuredangle ADC$; $\measuredangle ADC$ e $\measuredangle BAD$.

Unindo os vértices A a C e B a D da figura ao lado, obtemos os segmentos de recta $[AC]$ e $[BD]$ que se designam por **diagonais**.

Todo o quadrilátero tem quatro vértices, quatro lados, quatro ângulos e duas diagonais.

1.2. Classificação de quadriláteros

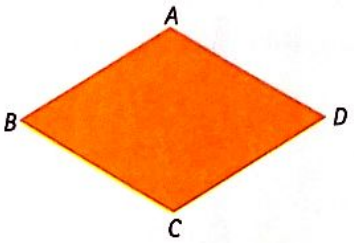
Os quadriláteros classificam-se em **trapézios** e **não-trapézios**. Os trapézios subdividem-se em **trapézios propriamente ditos** e em **paralelogramos**.



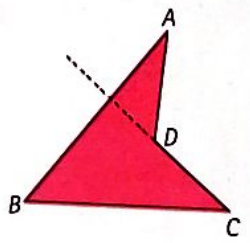
Em qualquer trapézio, pelo menos dois lados são paralelos e em qualquer paralelogramo os lados opostos são paralelos.

Os quadriláteros classificam-se em **convexos** ou côncavos.

Se o prolongamento dos lados de um quadrilátero não o intersectar, então diz-se que o quadrilátero é **convexo**, caso contrário, designa-se por **côncavo**.



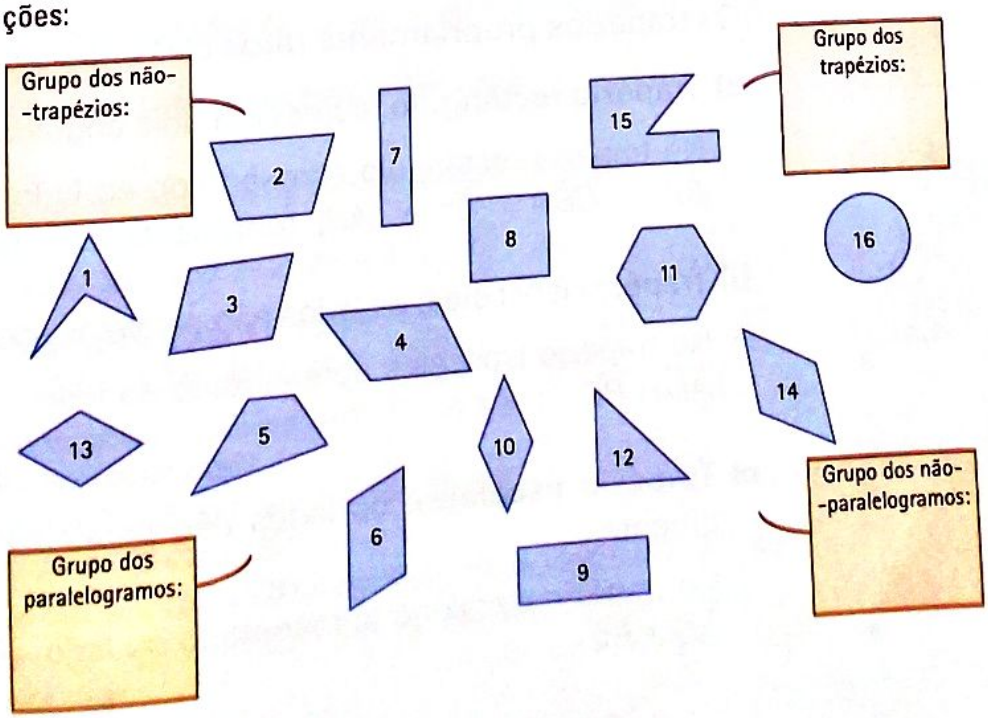
Quadrilátero **convexo**



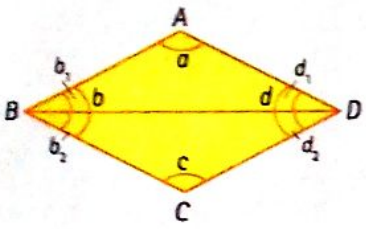
Quadrilátero **côncavo**

Exercício n.º 1

Entre as figuras seguintes, escolha as que representam quadriláteros e divida-os por grupos, de acordo com as seguintes instruções:



1.3. Ângulos internos de um quadrilátero



Consideremos o quadrilátero convexo ao lado dividido em dois triângulos por uma diagonal.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, então, no triângulo $[ABD]$,

$$a + b_1 + d_1 = 180°$$

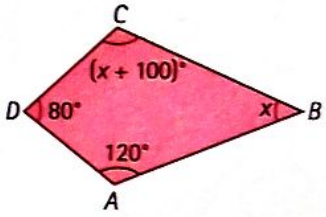
e no triângulo $[BCD]$,

$$c + b_2 + d_2 = 180°.$$

Adicionando as duas relações anteriores membro a membro:

$$a + b_1 + d_1 + c + b_2 + d_2 = 180° + 180° \iff a + b + c + d = 360°.$$

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é sempre igual a $360°$.



EXEMPLO:

Determine a amplitude dos ângulos do quadrilátero representado ao lado.

Resolução

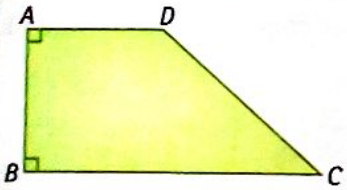
Como o quadrilátero é convexo, a soma dos ângulos internos é igual a $360°$, pelo que:

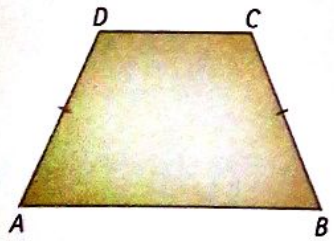
$120° + x + x + 100° + 80° = 360° \iff 2x = 60° \iff x = \frac{60°}{2} \iff x = 30°$.

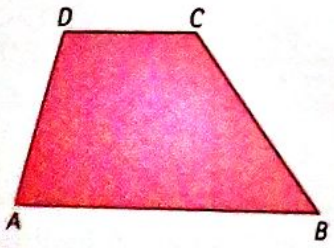
Assim, $B\hat{A}D = 120°$, $C\hat{B}A = 30°$, $D\hat{C}B = 130°$ e $A\hat{D}C = 80°$.

2. Conceitos e propriedades dos quadriláteros

Um **trapézio propriamente dito** é um quadrilátero que apresenta apenas dois lados paralelos chamados **bases.**







Os trapézios propriamente ditos classificam-se em:

a) Trapézio rectângulo: apresenta dois ângulos rectos.

No trapézio rectângulo apresentado ao lado, $[AD] \,//\, [BC]$, $B\hat{A}D = C\hat{B}A = 90°$ e $[AB]$ representa a altura do trapézio.

b) Trapézio isósceles: os lados não paralelos são congruentes.

No trapézio isósceles apresentado ao lado, $[AB] \,//\, [DC]$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$.

c) Trapézio escaleno: os lados não paralelos não são congruentes.

No trapézio escaleno apresentado ao lado, $[AB] \,//\, [DC]$ e $\overline{AD} \neq \overline{BC}$.

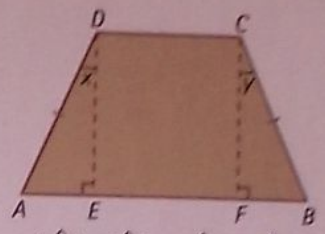
2.1. Propriedades dos trapézios isósceles

Propriedade 1

Num trapézio isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Justificação:

Passos		Justificação
1	$\overline{DE} = \overline{CF}$	Altura do trapézio
2	$\overline{AD} = \overline{BC}$	Definição de trapézio isósceles
3	$\overline{AE} = \overline{FB}$	Consequência dos passos anteriores
4	$\triangle[AED] \cong \triangle[BFC]$	Critério de congruência LLL
5	$B\hat{A}D = C\hat{B}A$	Ângulos correspondentes em triângulos congruentes
6	$D\hat{C}B = A\hat{D}C$	$D\hat{C}B = (y+90)^\circ$; $A\hat{D}C = (x+90)^\circ$



$B\hat{A}D = C\hat{B}A$; $D\hat{C}B = A\hat{D}C$

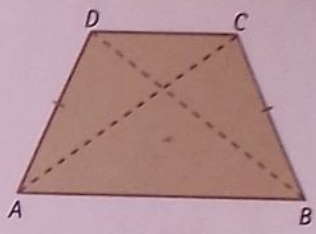
Propriedade 2

Num trapézio isósceles, as diagonais são congruentes.

Justificação:

Consideremos os triângulos $[ABD]$ e $[ABC]$ do trapézio $[ABCD]$.

Passos		Justificação
1	$B\hat{A}D = C\hat{B}A$	Propriedade 1
2	$\overline{AB} = \overline{AB}$	Lado comum aos triângulos $[ABD]$ e $[ABC]$
3	$\overline{AD} = \overline{BC}$	Definição de trapézio isósceles
4	$\triangle[ABD] \cong \triangle[ABC]$	Critério de congruência LAL
5	$\overline{AC} = \overline{BD}$	Lados correspondentes em triângulos congruentes



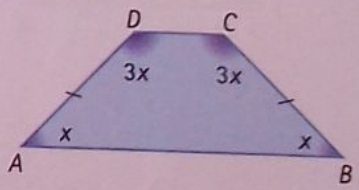
$\overline{AC} = \overline{BD}$

EXEMPLOS:

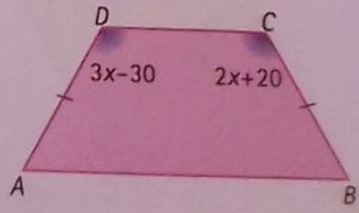
1. Num trapézio isósceles, os ângulos de uma base são três vezes maior que os ângulos da outra base. Determine a amplitude de cada um dos ângulos do trapézio.
2. Num trapézio isósceles, os ângulos adjacentes da base menor são representados por $(2x+20)^\circ$ e $(3x-30)^\circ$.
   Determine a amplitude de cada um dos ângulos do trapézio.

Resolução

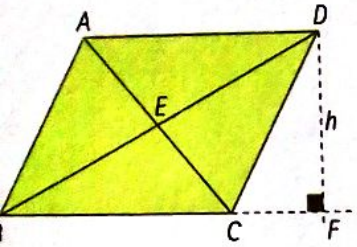
1. Seja $[ABCD]$ um trapézio isósceles tal que $B\hat{A}D = C\hat{B}A = x$ e $D\hat{C}B = C\hat{D}A = 3x$.
   Como se trata de um polígono convexo,
   $$x + x + 3x + 3x = 360^\circ \iff 8x = 360^\circ \iff x = \frac{360^\circ}{8} \iff x = 45^\circ.$$
   Assim, as amplitudes dos ângulos do trapézio são:
   $$B\hat{A}D = C\hat{B}A = 45^\circ \text{ e } D\hat{C}B = C\hat{D}A = 135^\circ.$$



2. Consideremos o trapézio isósceles $[ABCD]$ tal que $D\hat{C}B = (2x+20)^\circ$ e $A\hat{D}C = (3x-30)^\circ$. Pela propriedade 1:
   $$3x - 30 = 2x + 20 \iff 3x - 2x = 30 + 20 \iff x = 50.$$
   Assim, $D\hat{C}B = A\hat{D}C = 2 \times 50 + 20 = 120^\circ$.
   Como num trapézio isósceles, $B\hat{A}D = C\hat{B}A$ e a soma dos ângulos internos é igual a 360°:
   $$B\hat{A}D + C\hat{B}A + D\hat{C}B + A\hat{D}C = 360 \iff 2B\hat{A}D + 240 = 360 \iff B\hat{A}D = \frac{120}{2} \iff B\hat{A}D = 60^\circ.$$
   Assim, $B\hat{A}D = C\hat{B}A = 60^\circ$.



2.2. Propriedades dos paralelogramos



Um paralelogramo é um quadrilátero que tem os lados opostos paralelos dois a dois.

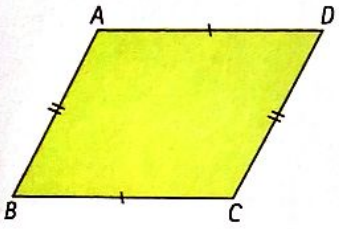
No paralelogramo representado ao lado, as diagonais são $[AC]$ e $[BD]$ e a altura é h.

Propriedades dos paralelogramos

Propriedade 1

Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

Justificação:



Consideremos o paralelogramo representado ao lado.

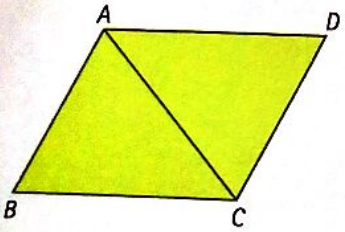
Pretende-se mostrar que $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$.

Passos		Justificação
1	$\overline{AB} = \overline{DC}$	Lados paralelos entre os lados paralelos $[AD]$ e $[BC]$.
2	$\overline{BC} = \overline{AD}$	Lados paralelos entre os lados paralelos $[AB]$ e $[DC]$.

Propriedade 2

Cada diagonal do paralelogramo divide-o em dois triângulos congruentes.

Justificação:



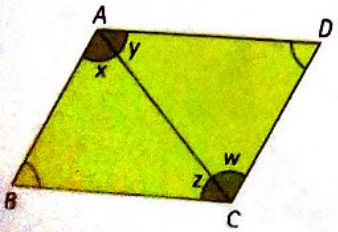
Consideremos o paralelogramo representado ao lado, dividido pela diagonal $[AC]$. Pretendemos mostrar que $\Delta[ABC] \cong \Delta[CDA]$.

Passos		Justificação
1	$\overline{AB} = \overline{DC}$	Propriedade 1
2	$\overline{AD} = \overline{BC}$	Propriedade 1
3	$\overline{AC} = \overline{AC}$	Lado comum aos dois triângulos
4	$\Delta[ABC] \cong \Delta[CDA]$	Critério de congruência LLL

Propriedade 3

Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Justificação:



Consideremos o paralelogramo representado ao lado onde $[AC]$ é uma das suas diagonais. Pretendemos mostrar que $B\hat{A}D = D\hat{C}B$ e $C\hat{B}A = A\hat{D}C$.

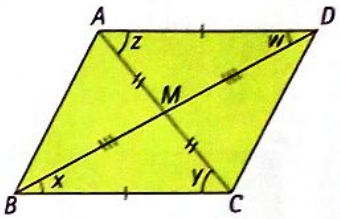
Passos		Justificação
1	$\Delta[ABC] \cong \Delta[CDA]$	Propriedade 2
2	$C\hat{B}A = A\hat{D}C$	Ângulos correspondentes em triângulos congruentes
3	$x = w$ e $z = y$	Ângulos de lados paralelos
4	$x + y = z + w$	Consequência do ponto anterior
5	$B\hat{A}D = D\hat{C}B$	$x + y = B\hat{A}D$ e $z + w = D\hat{C}B$

Propriedade 4

As diagonais de um paralelogramo bissectam-se (cortam-se ao meio).

Justificação:

Consideremos o paralelogramo representado ao lado onde $[AC]$ e $[BD]$ são as suas diagonais. Pretendemos mostrar que $\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BM} = \overline{MD}$.



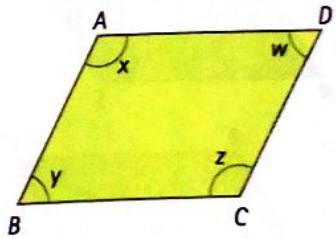
Passos		Justificação
1	$y = z$	Ângulos de lados paralelos
2	$\overline{AD} = \overline{BC}$	Propriedade 1
3	$x = w$	Ângulos de lados paralelos
4	$\Delta[AMD] \cong \Delta[CMB]$	Critério de congruência ALA
5	$\overline{AM} = \overline{MC}$ e $\overline{BM} = \overline{MD}$	Lados correspondentes em triângulos congruentes

Propriedade 5

Num paralelogramo, a soma dos ângulos adjacentes é 180° (ângulos adjacentes suplementares).

Justificação:

Consideremos o paralelogramo representado ao lado. Pretendemos mostrar que $B\hat{A}D + C\hat{B}A = 180°$ e $D\hat{C}B + A\hat{D}C = 180°$.

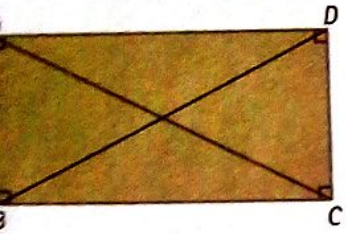


Passos		Justificação
1	$x + y + z + w = 360°$	Soma dos ângulos internos de um quadrilátero
2	$x = z$ e $y = w$	Propriedade 3
3	$x + y = B\hat{A}D = C\hat{B}A = 180°$	Simplificação do passo 1

De forma análoga, mostra-se que $D\hat{C}B + A\hat{D}C = 180°$.

Num paralelogramo:
- os lados opostos são congruentes;
- cada diagonal divide-o em dois triângulos congruentes;
- os ângulos opostos são congruentes;
- as diagonais bissectam-se (cortam-se ao meio);
- os ângulos adjacentes são suplementares.

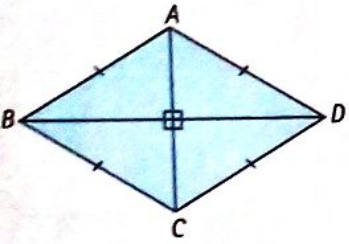
Os paralelogramos a destacar são os **rectângulos**, os **losangos** e os quadrados.



Um rectângulo é um paralelogramo em que os quatro ângulos são congruentes e iguais a 90°.

No rectângulo representado ao lado:

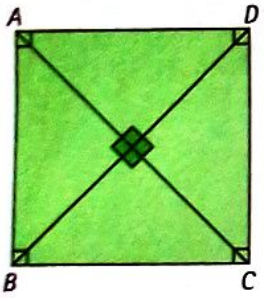
- $\overline{AC} = \overline{BD}$;
- $B\hat{A}D = C\hat{B}A = D\hat{C}B = A\hat{D}C = 90°$.



Um losango é um paralelogramo em que os quatro lados são congruentes.

No losango representado ao lado:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$;
- $[AC] \perp [BD]$.

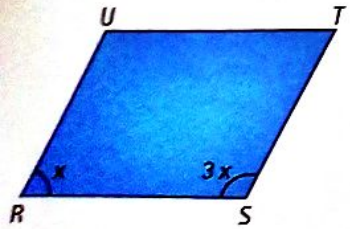


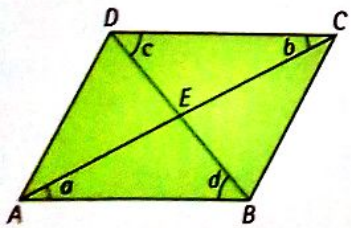
Um quadrado é um paralelogramo em que os quatro lados são congruentes e os quatro ângulos são iguais a 90°.

No quadrado representado ao lado:

- $[AC] \perp [BD]$ e $\overline{AC} = \overline{BD}$;
- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$;
- $B\hat{A}D = C\hat{B}A = D\hat{C}B = A\hat{D}C = 90°$.

Note que: O quadrado é o único quadrilátero regular que é, simultaneamente, rectângulo e losango.





EXEMPLOS:

1. Determine as medidas dos ângulos internos do paralelogramo $[RSTU]$ da figura ao lado.
2. Considere o paralelogramo $[ABCD]$ ao lado e justifique as seguintes afirmações.
   a) $\overline{BC} = \overline{AD}$ b) $b = a$ e $c = d$.
   c) $\Delta[BEC] \cong \Delta[DEA]$ d) $\overline{BE} = \overline{ED}$ e $\overline{CE} = \overline{EA}$.

Resolução

1. Pela propriedade 5 dos paralelogramos, os ângulos adjacentes são suplementares, pelo que:

$$x + 3x = 180° \iff 4x = 180° \iff x = \frac{180°}{4} \iff x = 45°.$$

Assim, os ângulos internos do paralelogramo têm de amplitude: $S\hat{R}U = U\hat{T}S = 45°$ e $T\hat{S}R = R\hat{U}T = 135°$.

2. a) Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes (propriedade 1).
   b) Os ângulos alternos internos determinados em lados paralelos são iguais.
   c) Os triângulos são congruentes pelo critério ALA, porque $\overline{AD} = \overline{BC}$, $E\hat{A}D = B\hat{C}E$ e $E\hat{D}A = C\hat{B}E$.
   d) São lados de triângulos congruentes ou, por outro lado, pela propriedade 4 dos paralelogramos.

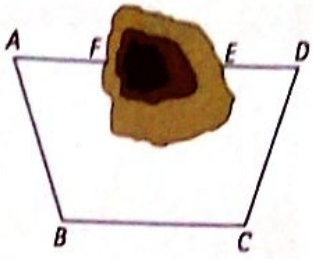
1. Num quadrilátero $[ABCD]$, $B\hat{A}D + D\hat{C}B = 210°$ e $C\hat{B}A = \frac{5}{7} D\hat{C}B$. Determine a amplitude dos ângulos internos do quadrilátero.

2. Num trapézio isósceles, um dos ângulos é 5 vezes maior que outro ângulo.
Determine a amplitude de cada um dos ângulos do trapézio.

3. Pretende-se abrir um túnel numa montanha de A para D, tendo sido determinada a direcção AF de tal forma que o seu prolongamento passa por D.
No entanto, pretendendo-se também trabalhar de D para A, determinaram-se as seguintes amplitudes:

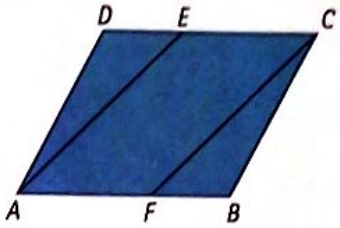
$$B\hat{A}F = 82°, \quad C\hat{B}A = 98° \text{ e } D\hat{C}B = 112°.$$

Qual a amplitude do ângulo EDC para que o prolongamento de DE passe por A?

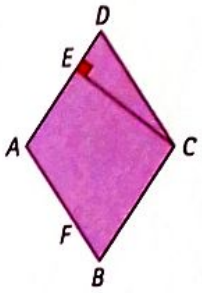


4. Considere o paralelogramo $[ABCD]$ representado ao lado.
Se $E\hat{A}D = 31°$ e $A\hat{E}C = 130°$, determine a amplitude de cada um dos ângulos.

5. A soma de dois ângulos opostos de um paralelogramo é $118°$.
Qual a amplitude de cada um dos ângulos do paralelogramo?



6. No losango $[ABCD]$ representado ao lado, $[CE] \perp [AD]$ e $D\hat{C}E = 20°$. Determine a amplitude de cada um dos ângulos do losango.



2.3. Construção de paralelogramos

É possível construir um paralelogramo se forem dadas, por exemplo, as seguintes condições:

- os comprimentos de dois lados consecutivos e o ângulo por eles formado;
- os comprimentos de dois lados consecutivos e o de uma diagonal;
- os comprimentos das diagonais e um ângulo determinado por elas.

Exercício n.º 3

1. Desenhe um paralelogramo $[ABCD]$ tal que $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm e $\overline{AC} = 4$ cm.
2. Desenhe um paralelogramo $[XYZW]$ tal que $\overline{XY} = 8$ cm, $\overline{YZ} = 3$ cm e $Y\hat{X}W = 62°$.
3. Construa um losango em que as suas diagonais meçam 6 cm e 4 cm.
4. Construa um rectângulo em que as diagonais tenham 6 cm de comprimento e formem um ângulo de $55°$.
5. Construa um quadrado em que as diagonais tenham 4 cm de comprimento.

6 AVALIAÇÃO FORMATIVA

1. Complete a seguinte tabela.

Quadriláteros	Propriedades						
	Lados opostos paralelos	Lados opostos iguais	Quatro lados iguais	Quatro ângulos rectos	Diagonais iguais	Diagonais intersectam-se no ponto médio	Diagonais perpendiculares

2. Para cada questão, são indicadas quatro alternativas de resposta, mas somente uma está correcta. Seleccione a letra correspondente à alternativa correcta.

a) Um losango é um:

(A) rectângulo; (B) paralelogramo;

(C) não-trapézio; (D) quadrado.

b) O quadrilátero cujas diagonais são iguais e formam com os lados dois triângulos congruentes e dois não congruentes é o:

(A) trapézio rectângulo; (B) rectângulo;

(C) trapézio isósceles; (D) paralelogramo.

c) Um rectângulo tem as diagonais:

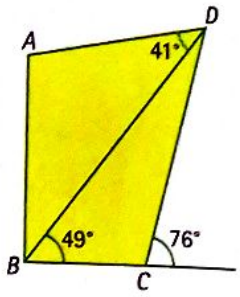
(A) perpendiculares; (B) paralelas;

(C) oblíquas; (D) desiguais.

d) O quadrilátero $[ABCD]$ em que $\overline{AB} = \overline{CD} = 8$ cm e $\overline{BC} = \overline{AD} = 6$ cm é sempre um:

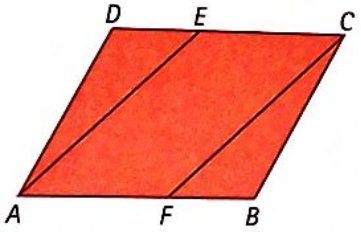
(A) losango; (B) paralelogramo;

(C) trapézio; (D) quadrado.

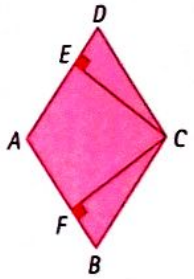


3. Determine a amplitude de cada um dos ângulos do quadrilátero representado ao lado sabendo que $[AB] \perp [BC]$.

4. Se a figura $[ABCD]$ for um paralelogramo, $[AE] \,//\, [CF]$ e $A\hat{E}C = 138°$, calcule a amplitude do ângulo BFC.



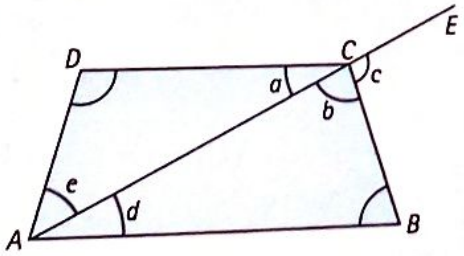
5. Consideremos o losango $[ABCD]$ tal que $[CE] \perp [AD]$ e $[CF] \perp [AB]$.



Qual a relação das amplitudes dos ângulos seguintes?

a) $E\hat{C}F$ e $B\hat{A}D$; b) $E\hat{C}F$ e $C\hat{B}A$.

6. Observe a figura seguinte.



a) Se $[ABCD]$ for um trapézio isósceles, $c = 80°$ e $d = 20°$, qual a amplitude de cada um dos ângulos do trapézio?

b) Se $[ABCD]$ for um trapézio escaleno, $e = 60°$, $A\hat{D}C = 110°$ e $[CB] \perp [AE]$, qual a amplitude de cada um dos ângulos do trapézio?

c) Se $[ABCD]$ é um trapézio em que $C\hat{B}A = 60°$, $c = 85°$ e $A\hat{D}C = 130°$, qual a amplitude do ângulo e?

7 NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA

1.
ESTATÍSTICA

2.
RECOLHA, ORGANIZAÇÃO E APRESENTAÇÃO DE DADOS ESTATÍSTICOS

3.
MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

7 NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA

1. Estatística

1.1. Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a sua evolução na vida moderna

A Estatística é uma ciência responsável por recolher, organizar e analisar a informação, permitindo tirar conclusões e prever acontecimentos futuros com mais segurança.

Todos os dias somos confrontados com informações que são transmitidas utilizando instrumentos próprios da Estatística, tais como tabelas e gráficos, pelo que é necessário estarmos aptos a saber ler e interpretar, assim como a utilizar convenientemente essas formas de partilhar as informações.

Até 1900, a Estatística resumia-se ao que hoje em dia se chama Análise de Dados. Apesar de tudo, esta ciência deu contribuições muito positivas em várias áreas científicas, tais como Física, Biologia, Medicina, Pedagogia, Geografia, etc.

Devido às facilidades computacionais e ao avanço tecnológico das últimas décadas, os estatísticos têm vindo a desenvolver novos métodos de análise e exploração de dados permitindo cada vez mais e melhor "deixar os dados falar por si" como mencionou o norte-americano John Tukey (1915-2000) nas suas contribuições para a evolução das representações gráficas em Estatística.

UM POUCO DE HISTÓRICA...

Em 1749, o professor Gottfried Achenwall da Universidade de Gottingen, Alemanha, usou pela primeira vez a palavra "estatística" que deriva da palavra latina "statu" que significa "estado".

Achenwall definiu a Estatística como "a ciência das coisas que pertencem ao Estado", pois "ela ocupa-se dos fenómenos que podem favorecer ou defender a propriedade do Estado".

Os governantes das civilizações antigas realizaram as primeiras estatísticas para obter conhecimento dos bens que o Estado possuía e como estavam distribuídos pela população. No Egipto, por exemplo, efectuou-se um estudo estatístico para obter informação sobre a disponibilidade de recursos humanos e económicos existentes para a construção das pirâmides.

1.2. Conceito de população e amostra

Como em todas as ciências, a Estatística utiliza uma linguagem própria pelo que há necessidade de conhecer conceitos como, por exemplo, **população, amostra e variável estatística**.

Consideremos as seguintes situações.

1. O professor de Educação Física pretende formar uma equipa de futebol para representar a sua escola. Para tal, irá escolher os melhores jogadores das várias turmas para formar a equipa.

Neste exemplo, os alunos que jogam futebol de todas as turmas constituem a **população** e os que forem escolhidos para formar a equipa constituem a **amostra**.

2. Para se saber qual o canal da televisão mais visto realizou-se um inquérito incidindo não em toda a população moçambicana, mas num grupo restrito de pessoas. A **população** é formada por todos os moçambicanos que possuem um aparelho de televisão e a **amostra** é o grupo de pessoas inquiridas.

Num estudo estatístico, a população é um conjunto de pessoas, objectos ou acontecimentos com uma característica em comum, enquanto que a amostra é um subconjunto finito da população.

Cada estudo estatístico é efectuado para atingir um certo objectivo determinando a realização do estudo sobre a população ou amostra relativamente a uma variável.

Imaginemos que para a formação da equipa de basquetebol da escola, o Director informou que o professor de Educação Física deveria escolher os alunos mais altos. Neste exemplo, a altura será determinante para a escolha dos elementos da equipa. Esta característica que se usou neste exemplo designa-se por **variável estatística**.

Por exemplo, num conjunto de alunos de uma turma podemos observar muitas características ou variáveis, tais como: cor dos olhos, altura, número de irmãos, idade, sexo, distância de casa à escola, etc.

As variáveis observadas podem ser **qualitativas** ou **quantitativas**.

As variáveis qualitativas estão relacionadas com uma qualidade, categoria ou característica não mensurável.

EXEMPLO:

A cor dos olhos, a profissão e o curso que um aluno pretende tirar são exemplos de variáveis estatísticas qualitativas.

As variáveis quantitativas são variáveis onde é possível atribuir uma medida e apresentam-se sob a forma de dados numéricos.

EXEMPLO:

A altura dos jogadores de uma equipa, a idade dos alunos de uma turma e a avaliação na disciplina de Matemática são exemplos de variáveis estatísticas quantitativas.

Exercício n.º 1

1. Num universo de 3000 habitantes de uma cidade, seleccionaram-se, ao acaso, 2000 para serem inquiridos sobre o canal de televisão preferido. Os resultados obtidos estão indicados na seguinte tabela.

Canal preferido	N.º de pessoas
TVM	800
STV	400
MIRAMAR	350
RTP	250
TIM	200

Indique a população, a amostra e a variável em estudo e sua classificação.

2. Um camponês de Manhiça pretende estabelecer o preço de venda da banana. Para tal, escolheu 10 cachos de bananas e determinou o seu peso médio.

Escolha a resposta correcta em cada alínea.

a) A população em estudo:

(A) é o peso de todas as bananas.
(B) são dez cachos de bananas.
• (C) são todas as bananas seleccionadas para venda.
(D) não existe.

b) A variável estatística:

(A) é a cor das bananas.
(B) são os dez cachos de bananas.
(C) são as bananas.
• (D) é o peso de cada banana.

3. Classifique as seguintes variáveis estatísticas.

a) O peso de um bebé.
b) A cor dos olhos de um gato.
c) O número de cães vacinados.
d) O comportamento de um aluno.

2. Recolha, organização e apresentação de dados estatísticos

2.1. Recolha e organização de dados estatísticos

A primeira etapa de um estudo estatístico é a **recolha dos dados** que pode ser feita através de um questionário, observação directa ou por uma pesquisa bibliográfica.

Posteriormente, procede-se à **organização dos dados** recolhidos que consiste na contagem e agrupamento dos dados de modo a facilitar a sua leitura e compreensão da situação em estudo.

Numa terceira etapa, a **apresentação dos dados** pode ser feita de duas formas diferentes que podem ser apresentados em simultâneo: por tabelas e por gráficos que permitem sintetizar grandes quantidades de dados, tornando mais fácil a sua compreensão e uma futura análise.

EXEMPLO:

As classificações do teste de Matemática obtidas pela turma A da 9.ª classe da Escola Secundária Samora Machel foram as seguintes:

8	10	9	19	7	9	8	18	8	10	7	12
8	14	6	16	16	15	10	11	13	10	9	6
9	8	10	10	12	13	17	7	8	6	10	11

Organize os dados numa tabela de contagem.

Resolução

Classificação dos testes de Matemática dos alunos da 9.ª A					
Notas	Contagem	N.º alunos	Notas	Contagem	N.º alunos
6	III	3	13	II	2
7	III	3	14	I	1
8	𝍸 I	6	15	I	1
9	IIII	4	16	II	2
10	𝍸 II	7	17	I	1
11	II	2	18	I	1
12	II	2	19	I	1

Total: 36

A **frequência absoluta** de um valor x_i de uma variável estatística é o número de vezes que esse valor aparece na lista de dados e representa-se por f_i.

A **frequência relativa** de um valor x_i da variável é o quociente entre a frequência absoluta de x_i, f_i, e o número total de dados, n, e representa-se por fr_i:

$$fr_i = \frac{f_i}{n}$$

Podemos organizar os dados do exemplo anterior e respectivas frequências numa **tabela de frequências**.

x_i	Contagem	f_i	fr_i	fr_i(%)	x_i	Contagem	f_i	fr_i	fr_i(%)
6	3	3	$\frac{3}{36} \approx 0{,}08$	8%	13	2	2	$\frac{2}{36} = 0{,}06$	6%
7	3	3	$\frac{3}{36} \approx 0{,}08$	8%	14	1	1	$\frac{1}{36} = 0{,}03$	3%
8	6	6	$\frac{6}{36} = 0{,}16$	16%	15	1	1	$\frac{1}{36} = 0{,}03$	3%
9	4	4	$\frac{4}{36} \approx 0{,}10$	10%	16	2	2	$\frac{2}{36} = 0{,}06$	6%
10	7	7	$\frac{7}{36} \approx 0{,}19$	19%	17	1	1	$\frac{1}{36} = 0{,}03$	3%
11	2	2	$\frac{2}{36} = 0{,}06$	6%	18	1	1	$\frac{1}{36} = 0{,}03$	3%
12	2	2	$\frac{2}{36} = 0{,}06$	6%	19	1	1	$\frac{1}{36} = 0{,}03$	3%
					Total:		36	1	100%

OBSERVAÇÃO:

A soma das frequências absolutas (f_i) é igual ao número das observações feitas (n) e a soma das frequências relativas (fr_i) é sempre igual a 1.

A **frequência absoluta acumulada**, F_i, e a **frequência relativa acumulada**, Fr_i, obtêm-se adicionando as frequências absolutas e relativas, respectivamente, até ao valor considerado da variável estatística.

EXEMPLO:

Numa amostra de 20 casais, inquiriu-se o número de filhos de cada casal. Os resultados encontram-se na seguinte tabela.

x_i	f_i	F_i	fr_i	$fr_i(\%)$	$Fr_i(\%)$
0	2	2	0,1	$0,1 \times 100 = 10$	10
1	6	$6 + 2 = 8$	0,3	$0,3 \times 100 = 30$	$30 + 10 = 40$
2	6	$6 + 8 = 14$	0,3	$0,3 \times 100 = 30$	$30 + 40 = 70$
3	4	$4 + 14 = 18$	0,2	$0,2 \times 100 = 20$	$20 + 70 = 90$
4	2	$2 + 18 = 20$	0,1	$0,1 \times 100 = 10$	$10 + 90 = 100$
n	20		1,0	100	

Exercício n.º 2

1. No Hospital José Macamo (HJM), registou-se o número de bebés nascidos no mês de Agosto, tendo-se obtido os seguintes valores:

1	3	3	2	2	1	3	4	2	4	2	3	2	1	0
2	3	2	1	3	3	4	2	2	3	0	0	4	2	1

Com estes dados, construa uma tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

2. Copie e complete a seguinte tabela de frequências.

Número de irmãos dos alunos da turma da Ana					
N.º de irmãos	f_i	F_i	fr_i	$fr_i(\%)$	$Fr_i(\%)$
0	4	4	0,16	16	16
1	10				
2		21			
3	3				
4		25			
n	25		1		100

3. Numas eleições autárquicas participaram 20 000 eleitores e estavam a concorrer 3 partidos: A, B e C. Sabendo que votaram 6800 eleitores no partido A, 30% no partido B e, dos restantes eleitores, 10% abstiveram-se:

a) quantos eleitores votaram no partido B?

b) qual a percentagem de eleitores que votaram no partido C?

c) quantos eleitores se abstiveram?

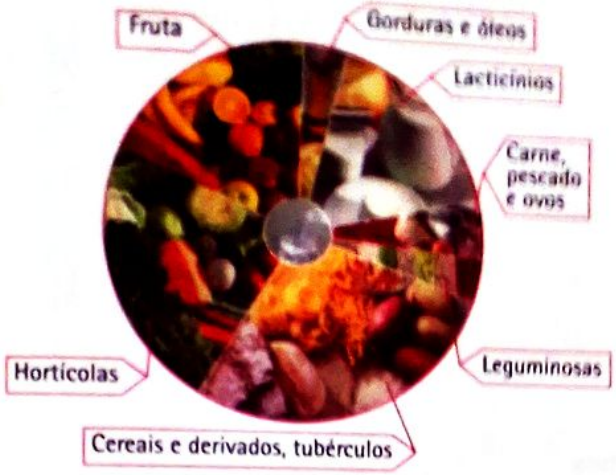
d) qual o partido que venceu as eleições?

2.2. Apresentação de dados estatísticos

As tabelas de frequências e os gráficos são formas de apresentar de modo organizado a informação recolhida.

2.2.1. Gráfico circular

O **gráfico circular** seguinte representa a Roda dos Alimentos constituído por sete sectores correspondendo cada um a um grupo de alimentos.



A Roda dos Alimentos foi construída com base nas seguintes frequências relativas percentuais:

Grupo alimentar	fr_i(%)
Cereais e derivados, tubérculos	28%
Hortícolas	23%
Fruta	20%
Lacticínios	18%
Carne, pescado e ovos	5%
Leguminosas	4%
Gorduras e óleos	2%

Como se constrói um gráfico circular?

Com base em cada frequência relativa percentual de cada grupo alimentar, calculam-se as amplitudes de cada sector circular.

Relativamente ao grupo alimentar **Cereais e derivados, tubérculos** e usando uma regra de três simples, temos que:

$$360° \text{ ——— } 100\%$$
$$x \text{ ——— } 28\%$$
$$x = \frac{360 \times 28}{100} = 100{,}8°$$

Usando o mesmo procedimento para os restantes grupos alimentares e recorrendo a um transferidor, traçam-se os sectores circulares correspondentes às amplitudes obtidas.

OBSERVAÇÃO

A representação gráfica da Roda dos Alimentos criada em 1977 no âmbito da campanha de educação alimentar "Saber comer é saber viver" ajuda-nos a melhor escolher e combinar os alimentos que devemos integrar na nossa alimentação do dia a dia.

OBSERVAÇÃO

Na construção de um **gráfico circular**, deve-se ter em conta que:
- o gráfico tem de ter um título e uma legenda;
- a amplitude de cada sector é proporcional à frequência que representa (f_i ou fr_i);
- devem-se usar cores diferentes para cada um dos sectores.

OBSERVAÇÃO

O círculo completo corresponde à totalidade dos dados, ou seja, 100% corresponde a 360°.

2.2.2. Gráfico de barras

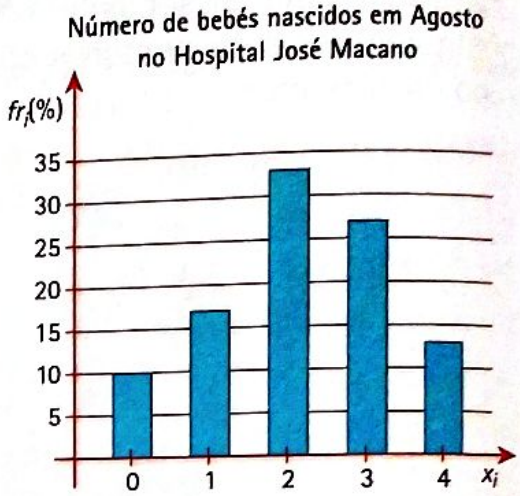
EXEMPLO:

Dada a tabela relativa aos bebés nascidos no mês de Agosto no Hospital José Macamo, construa um gráfico de barras usando a frequência relativa.

OBSERVAÇÃO:

Na construção de um **gráfico de barras** devemos ter em atenção os seguintes aspectos:
- o gráfico deve ter um título;
- as barras devem estar separadas umas das outras por espaços iguais;
- apenas a dimensão vertical das barras varia.

x_i	f_i	$fr_i(\%)$
0	3	10
1	5	17
2	10	33
3	8	27
4	4	13
n	30	100

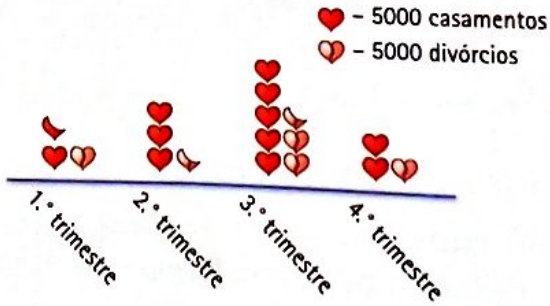


2.2.3. Pictogramas

Um **pictograma** é um gráfico que utiliza símbolos para apresentar a informação.

EXEMPLO:

Observe o pictograma com os dados referentes aos casamentos e divórcios num dado ano em cada trimestre.



a) Quantos foram os casamentos ao longo do 1.º semestre? E os divórcios?

b) Qual foi o trimestre em que se celebraram mais casamentos? E divórcios?

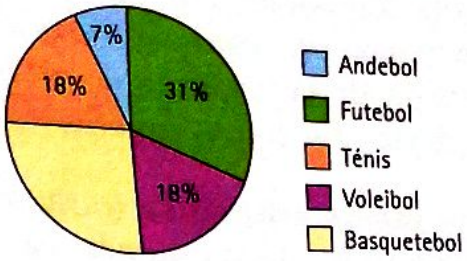
Resolução

a) O 1.º semestre corresponde a dois trimestres e tendo em conta a legenda, o número de casamentos é $4 \times 5000 + 2500 = 22\,500$ e o número de divórcios é igual a $5000 + 2500 = 7500$.

b) O trimestre em que se celebraram mais casamentos foi o terceiro com $5 \times 5000 = 25\,000$. Também foi no 3.º trimestre que se verificaram mais divórcios, $2 \times 5000 + 2500 = 12\,500$.

Exercício n.º 3

1. O gráfico circular seguinte representa a percentagem dos 103 participantes nos jogos desportivos escolares da Província de Cabo Delgado.



a) Quantos participantes praticam futebol?

b) Quantos alunos praticam basquetebol e qual é a sua percentagem?

2. No Banco de Socorros do HJM deram entrada os seguintes números de acidentes durante uma semana do mês de Dezembro.

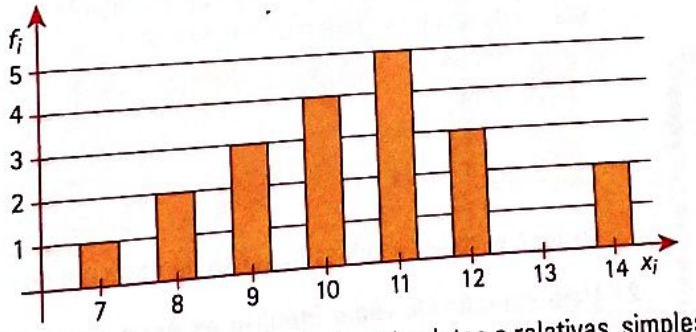
4	2	1	0	5	2	4	4	6	2
3	7	4	2	3	3	5	1	2	4
3	3	2	6	4	3	2	1	5	5
5	1	0	6	3	3	3	2	4	4
1	2	4	4	3	6	2	3	3	3
3	4	7	7	1	2	7	5	4	4

Com base numa tabela de frequências absolutas e relativas, construa um gráfico de barras usando a frequência relativa.

3. Com os seguintes dados construa um gráfico de barras relativo à pontuação de cada jogo de futebol.

N.º de jogos	8	7	7	8	9	5	4	8	3	2	2	8
N.º de pontos	5	6	15	10	9	7	11	12	13	14	15	16

4. Considere o seguinte gráfico.



Apresente os dados através de uma tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

5. Na tabela seguinte registaram-se estão registadas as classificações de 20 alunos num teste de Matemática.

Classificação	N.º de alunos
Mau	2
Medíocre	4
Suficiente	6
Bom	5
Muito Bom	3

Construa um gráfico circular que traduza a situação descrita.

3. Medidas de tendência central

As medidas de tendência central que estudaremos são a **média**, a **mediana** e a **moda**. Estas medidas são indicativas de informação contida nos gráficos ou tabelas. Para cada caso, dependendo do contexto do problema em estudo, estas medidas devem ser convenientemente utilizadas.

OBSERVAÇÃO:

A **média aritmética** apesar de ser uma medida bastante utilizada para representar um conjunto de dados tem a desvantagem de ser muito afectada por valores muito altos ou muitos baixos (designados por *outliers*), pois no seu cálculo têm-se em conta todas as observações.

A média aritmética (ou simplesmente **média**) de um conjunto de dados numéricos é o número que se obtém dividindo a soma dos valores de todos os dados pelo número de dados e representa-se por $\bar{x}$.

EXEMPLO:

Consideremos o exemplo relativo aos bebés nascidos no mês de Agosto no Hospital José Macamo, cuja tabela está representada ao lado.

Calcule a média do número de bebés nascidos nesse hospital.

x_i	f_i
0	3
1	5
2	10
3	8
4	4
n	30

Resolução

Como f_i traduz o número de vezes que ocorre x_i, a média é igual a:

$$\bar{x} = \frac{3 \times 0 + 5 \times 1 + 10 \times 2 + 8 \times 3 + 4 \times 4}{30} = \frac{65}{30} \approx 2{,}17$$

A moda de um conjunto de dados é o dado que ocorre com maior frequência e representa-se por M_o.

EXEMPLOS:

1. Numa escala de 10 a 20, as classificações dos testes de Matemática de dois alunos da 9.ª classe foram as seguintes:

Testes	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º
Ana	8	0	10	16	8	7
Hugo	12		15	12	8	13

Indique a moda das classificações de cada um dos amigos.

2. Uma estação de rádio inquiriu os seus ouvintes sobre as suas preferências musicais. Para isso procedeu-se a várias chamadas telefónicas e os resultados encontram-se na tabela seguinte.

Tipo de música	*pop*	*rap*	dança	*rock*
N.º de pessoas	53	25	30	12

Com base na tabela anterior, identifique a moda.

Resolução

1. Ana: $M_0 = 8$ Hugo: $M_0 = 12$
2. A moda é a música *pop*.

A mediana de um conjunto de dados numéricos ordenados é um número que ocupa a posição central da sequência ordenada (por ordem crescente ou decrescente) dos dados em estudo e representa-se por $\tilde{x}$.

Nos dados ordenados, a **mediana** é o valor central se o número de dados for ímpar ou a média dos dois valores centrais se esse número for par.

OBSERVAÇÃO:

A **mediana**, ao contrário da média, não é influenciada por *outliers* visto que é uma medida essencialmente vinculada à posição que ocupa o valor central no conjunto ordenado e não altera a ordem dos dados.

EXEMPLO:

Relativamente às classificações ordenadas dos testes de Matemática da Ana e do Hugo, a mediana é igual a:

Ana: 0 7 **[8 8]** 10 16 **Hugo:** 8 10 **[12]** 13 15

$\tilde{x}=\frac{8+8}{2}=\frac{16}{2}=8$ $\tilde{x}=12$

OBSERVAÇÃO:

No caso da variável estatística ser **qualitativa**, a única medida de tendência central aplicável é a moda. A média e a mediana só podem ser calculadas se os dados forem numéricos, ou seja, a variável estatística for quantitativa.

E se os dados estiverem contidos numa tabela de frequências, como calcular a mediana?

EXEMPLO:

Consideremos as classificações obtidas pelos alunos de uma turma da 9.ª classe na disciplina de Educação Física.

Baseado na tabela de frequências seguinte, pretende-se determinar as três medidas de tendência central.

x_i	f_i	F_i	$fr_i(\%)$	$Fr_i(\%)$	$f_i \times x_i$
7	2	2	7,4	7,4	14
8	3	5	11,1	18,5	24
9	3	8	11,1	29,6	27
10	4	12	14,8	44,4	40
11	5	17	18,6	63,0	55
12	3	20	11,1	74,1	36
13	3	23	11,1	85,2	39
14	4	27	14,8	100	56
n	27		100		291

Resolução

- **Moda:**

A moda é o valor que mais se repete, pelo que é igual a 11 (analisa-se a coluna correspondente a f_i).

- **Média:**

A coluna $f_i \times x_i$ traduz o número de vezes que o dado x_i se repete, pelo que:

$$\bar{x}=\frac{291}{27}=10{,}8$$

- **Mediana:**

A mediana que corresponde a 50% dos dados ordenados, será o valor de x_i correspondente a 50% de $Fr_i(\%)$. Assim, 50% das observações corresponde a $x_i=11$, logo $\tilde{x}=11$.

OBSERVAÇÃO:

Método alternativo para o cálculo da mediana

Num conjunto de n dados ordenados, a mediana é igual:

- ao valor da variável que ocupa a posição central, se n é ímpar:
  $\tilde{x}=x_k$ com $k=\frac{n+1}{2}$;
- à média dos dois valores centrais, se n é par:
  $\tilde{x}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$ com $k=\frac{n}{2}$.

No exemplo ao lado, $n=27$, pelo que $k=\frac{27+1}{2}=14$.

Assim, $\tilde{x}=x_{14}$ e pela coluna correspondente a F_i, $\tilde{x}=11$.

Exercício n.º 4

1. As classificações dos testes da Lufa às disciplinas de Português e Inglês são as seguintes:

Português	14	12	15	12	14	14
Inglês	10	11	12	10	10	

Para cada uma das disciplinas, calcule o valor das três medidas de tendência central.

2. No gráfico e na tabela seguintes são apresentadas as distribuições dos golos das equipas *A* e *B* nas dez primeiras jornadas.

Número de golos da equipa *B*	0	1	2	3	4
Frequência absoluta	1	2	3	3	1

Para cada uma das equipas, determine as três medidas de tendência central.

3. A Kelly comprou três bonecos *A*, *B* e *C*. O preço médio dos bonecos é de 5,00 Mt. Se a mediana dos preços dos bonecos é de 3,00 Mt, indique três possibilidades para o custo dos bonecos *A* e *C*.

A

B

C

4. Uma turma da 9.ª classe tem 24 alunos: 10 raparigas e 14 rapazes. O "peso" médio das raparigas é 48,2 kg e o "peso" médio dos rapazes é 50,6 kg.

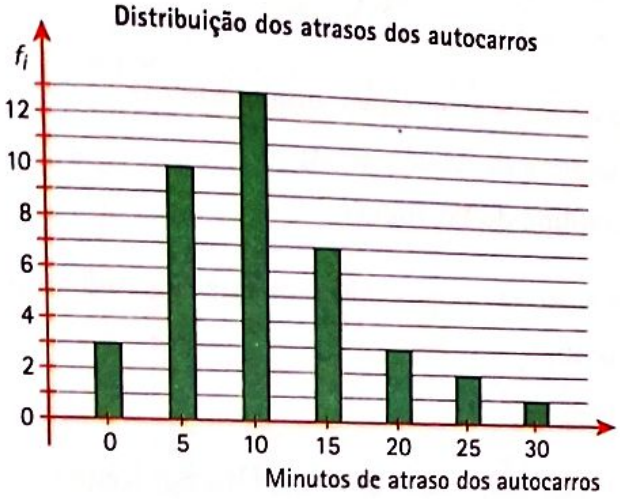
Calcule:

a) o "peso" total dos rapazes; **b)** o "peso" total das raparigas; **c)** o "peso" médio dos 24 alunos da turma.

5. Se nos dados 2, 3, 5, 5, 6, 9 e 46 substituirmos o último por 10, quais as medidas de tendência central que seriam mais afectadas com esta alteração?

AVALIAÇÃO FORMATIVA 7

1. O seguinte gráfico mostra os atrasos dos autocarros numa paragem movimentada da cidade da Beira entre as 7:00 e as 12:00.



a) Construa uma tabela de frequências absolutas e relativas.

b) Quantos autocarros passaram na paragem no período de tempo em estudo?

c) Quantos autocarros chegaram à hora prevista?

d) Quantos autocarros chegaram com mais de 10 minutos de atraso?

e) Indique a média e a moda.

2. Contou-se o número de passageiros que iam dentro de 15 carros, tendo-se registado os seguintes valores:

4	1	2	2	3
3	3	4	1	1
5	5	2	3	2

Com os dados construa:

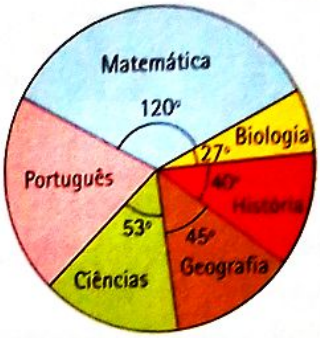
a) uma tabela de frequências absolutas e relativas;

b) um gráfico de barras usando a frequência absoluta;

c) um gráfico de barras usando a frequência relativa.

3. Perguntou-se a 240 alunos de uma escola qual a disciplina mais importante para o curso superior que pretendiam frequentar.

Com os dados obtidos foi construído o seguinte gráfico circular.



a) Calcule quantos estudantes indicaram:

i) a disciplina de Matemática;

ii) a disciplina de Português.

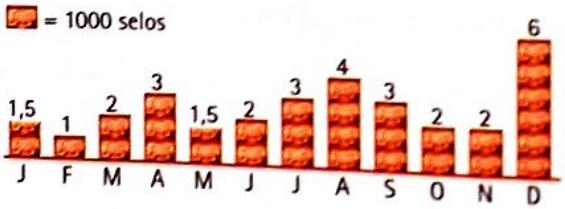
b) Calcule a percentagem de alunos que responderam:

i) Geografia;

ii) Ciências.

c) Construa um gráfico de barras relativo à frequência absoluta.

4. Observe o seguinte pictograma referente ao volume de selos vendidos durante um ano nas estações de Correios de uma cidade moçambicana.



a) Qual foi o total de selos vendidos em todo o ano?

b) Qual foi a média de selos vendidos por mês?

c) Em que mês se vendeu mais selos? Qual foi essa quantidade?

d) Qual a percentagem de selos vendidos no primeiro semestre do ano?

e) A mediana dos selos vendidos foi em que mês?

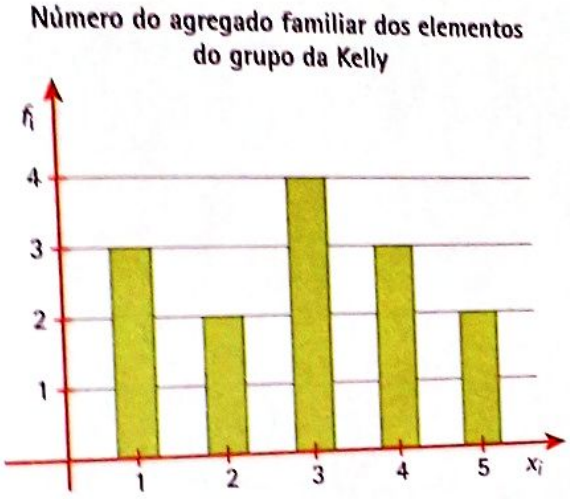
f) Qual foi a moda na compra de selos? Que percentagem de selos foi vendida nesse mês?

5. **A turma do Hugo obteve as seguintes classificações num teste de avaliação de Matemática.**

Classificação	7	8	9	10	11	12	13
Frequência	1	2	3	4	5	3	2

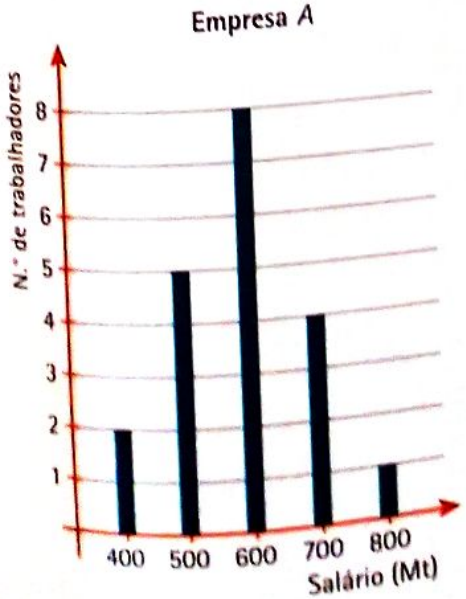
Calcule o valor das três medidas de tendência central.

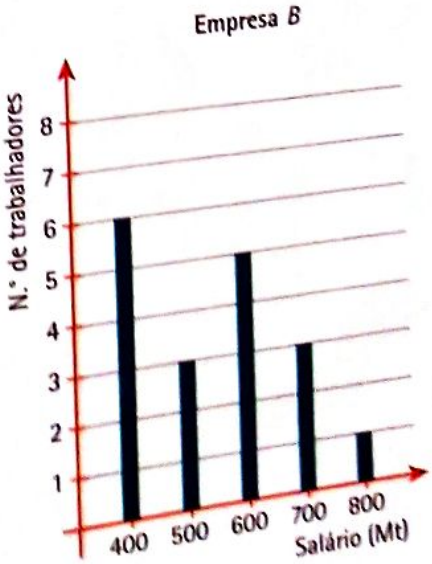
6. **Observe o seguinte gráfico.**

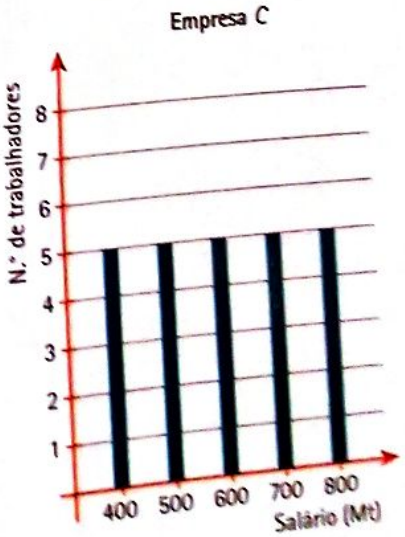


Calcule o valor das três medidas de tendência central.

7. **Calcule as três medidas de tendência central para cada uma das empresas *A*, *B* e *C*.**







8 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1.
HOMOTETIAS

2.
RAZÕES E PROPORÇÕES

3.
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

8 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1. Homotetias

1.1. Ampliação e redução de figuras planas

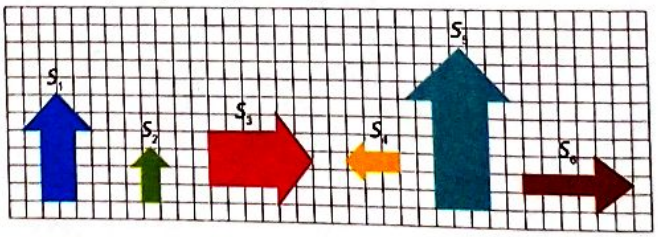
No dia-a-dia, encontramos vários objectos que apesar de terem dimensões diferentes têm a mesma forma.

Podemos observar ampliações, reduções e figuras geometricamente iguais e em todos estes casos as figuras dizem-se **semelhantes**. No entanto, as fotografias representadas ao lado são exemplos de figuras **não semelhantes** pois não têm a mesma forma.

Duas figuras são **semelhantes** se têm a mesma forma, ou seja, se uma é ampliação da outra ou se são geometricamente iguais.

EXEMPLO:

Observe as setas S_1 a S_6 da figura seguinte.



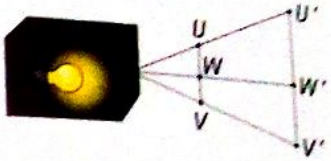
1. Complete usando as expressões **uma ampliação de, uma redução de** ou **geometricamente igual a**:
   a) S_1 é _____ S_2; b) S_2 é _____ S_4;
   c) S_1 é _____ S_5; d) S_5 é _____ S_1.
2. As setas S_4 e S_6 têm a mesma forma? Justifique a resposta.

Resolução

1. a) S_1 é uma ampliação de S_2; b) S_2 é geometricamente igual a S_4;
   c) S_1 é uma redução de S_5; d) S_5 é uma ampliação de S_1.
2. As setas S_4 e S_6 não têm a mesma forma porque não são geometricamente iguais ou uma não é ampliação da outra.

1.2. Homotetias

Imaginemos uma lâmpada dentro de uma caixa e um foco luminoso que passa através de um orifício C e que se vai reflectir em $[UV]$.



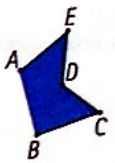
A imagem de $[UV]$ é o segmento $[U'V']$ paralelo a $[UV]$, tal que U' é a imagem de U e V' é a imagem de V.

A aplicação cuja correspondência estabelecida entre pontos é unívoca designa-se por homotetia e é baseada no princípio da projecção de um foco de luz.

O ponto O chama-se **centro da homotetia** e $r = \frac{\overline{U'V'}}{\overline{UV}}$ a **razão da homotetia** ou **razão de semelhança**.

À imagem de um ponto dá-se o nome de **homotético** desse ponto. Por exemplo, U' é homotético de U.

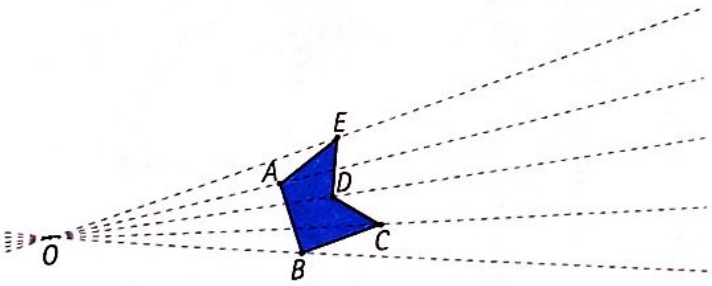
Como construir figuras semelhantes usando o método da homotetia?



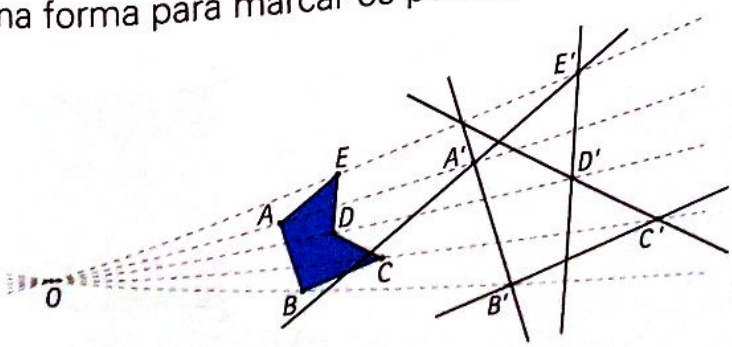
Pretende-se ampliar o polígono $[ABCD]$ representado ao lado.

1.º Marca-se um ponto O considerado como centro da homotetia;

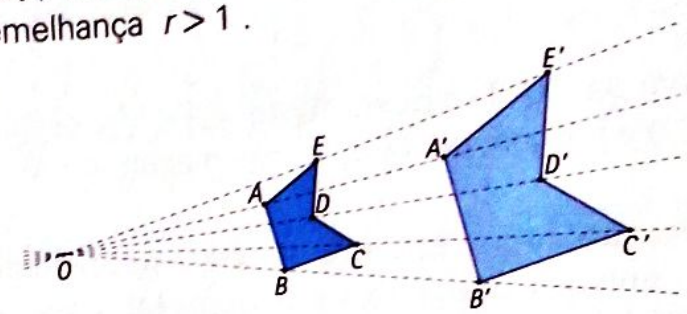
2.º Traçam-se as rectas OA, OB, OC, OD e OE;



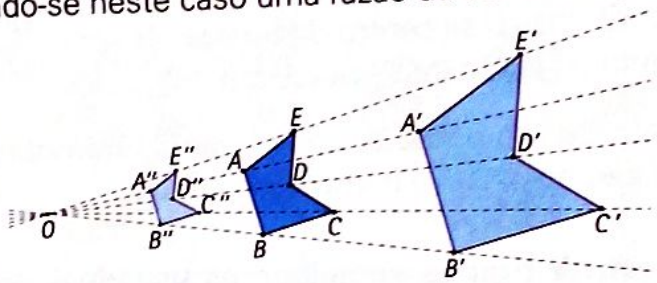
3.º Marca-se o ponto A' sobre a recta OA de modo que $\overline{OA'} = r \times \overline{OA}$ (r é a razão de semelhança); o ponto B' sobre a recta OB tal que $\overline{OB'} = r \times \overline{OB}$ e procede-se da mesma forma para marcar os pontos C', D' e E'.



4.º Traçam-se os segmentos $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'D']$ e $[E'A']$ e obtém-se o polígono $[A'B'C'D']$ que é a ampliação de $[ABCD]$, isto porque, neste caso, considerou-se uma razão de semelhança $r > 1$.

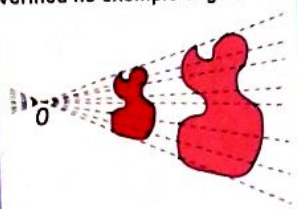


O procedimento é idêntico para reduzir o polígono dado, tomando-se neste caso uma razão de semelhança $r < 1$.



OBSERVAÇÃO:

No caso de figuras curvas, também é possível construir figuras semelhantes usando o método de homotetia, como se verifica no exemplo seguinte.



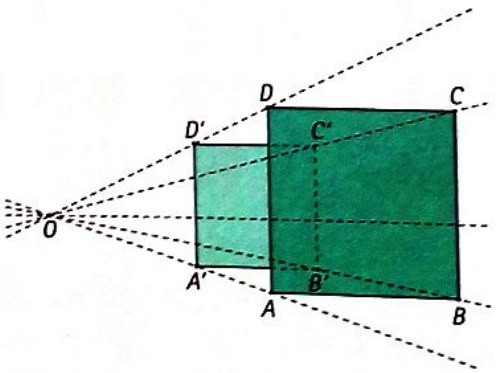
EXEMPLO:

Construa uma figura homotética a um quadrado, cujo centro da homotetia é um ponto exterior ao quadrado e cuja razão de semelhança é igual a:

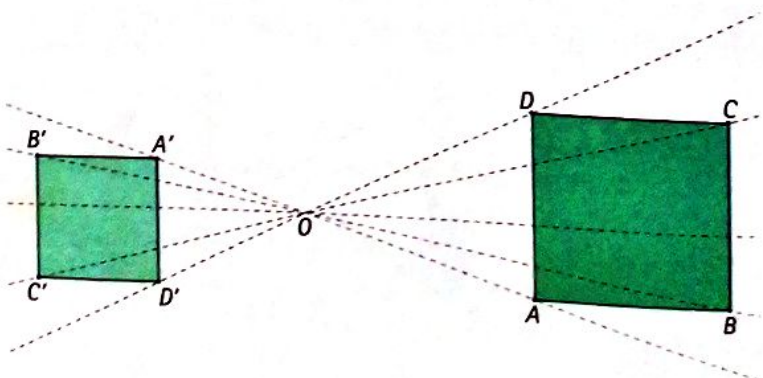
a) $\frac{2}{3}$; b) $-\frac{2}{3}$.

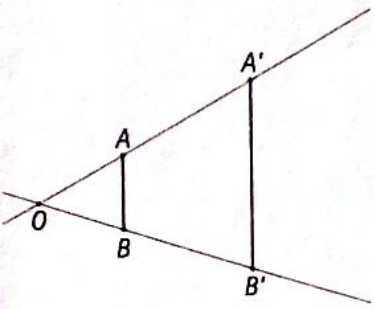
Resolução

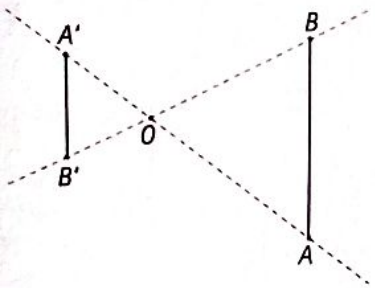
a)



b)







1.2.2. Classificação das homotetias

As **homotetias positivas** são homotetias de razão de semelhança positiva, ou seja, cada ponto U e o seu homotético U' estão do mesmo lado do centro da homotetia.

As **homotetias negativas** são homotetias de razão de semelhança negativa, ou seja, cada ponto U e o seu homotético U' estão em lados opostos ao centro da homotetia.

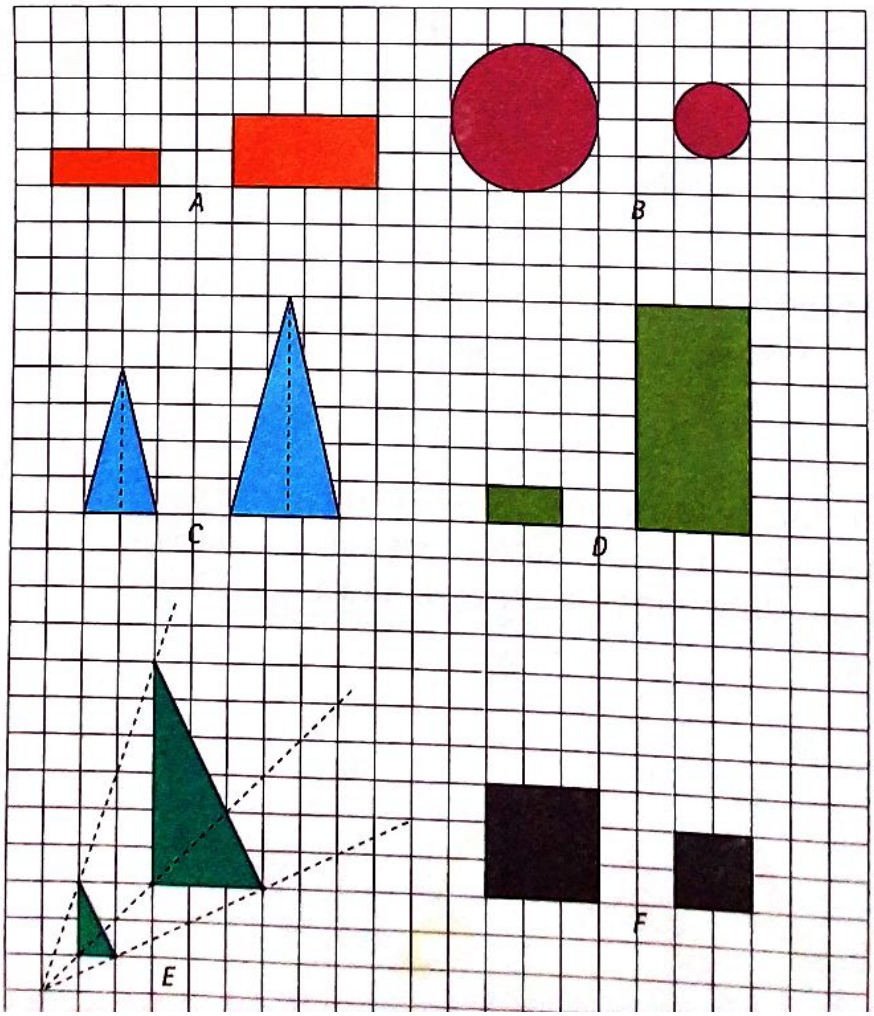
A classificação das homotetias pode, também, ser feita através do valor absoluto da sua razão.

Numa homotetia de razão de semelhança r, se:

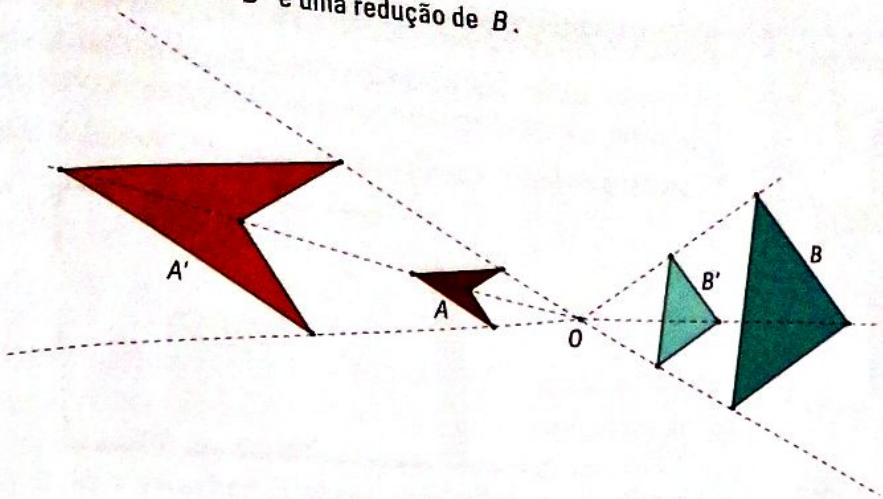
- $|r| < 1$, a homotetia é uma redução;
- $|r| > 1$, a homotetia é uma ampliação;
- $|r| = 1$, a homotetia diz-se isometria porque são mantidas as dimensões da figura.

Exercício n.º 1

1. Indique em que situações estão representadas figuras semelhantes e no caso afirmativo apresente a razão de semelhança.



2. A figura A' é uma ampliação de A e B' é uma redução de B.



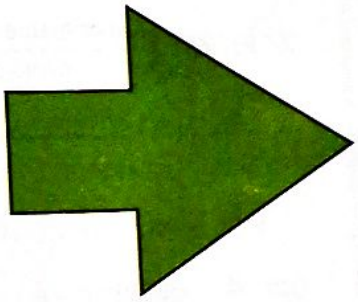
a) Qual foi o processo utilizado para a obtenção destas figuras?

b) Qual a razão de semelhança em cada caso?

3. Para cada alínea, construa uma figura semelhante de acordo com a razão de semelhança indicada.

a) $r = 2$

b) $r = -\frac{1}{2}$



2. Razões e proporções

2.1. Noção de razão e proporção numérica

Num supermercado encontram-se as latas A e B de café representadas ao lado.

Para constatar qual a melhor compra a efectuar, calculamos $\frac{\text{custo}}{\text{quantidade}}$ que representa o custo por grama.

Lata A: $\frac{30{,}00}{800} = 0{,}0375$ Lata B: $\frac{50{,}00}{1000} = 0{,}05$

Atendendo ao custo por grama, a melhor compra será a lata A.

As fracções $\frac{30{,}00}{800}$ e $\frac{50{,}00}{1000}$ designam-se por razões.

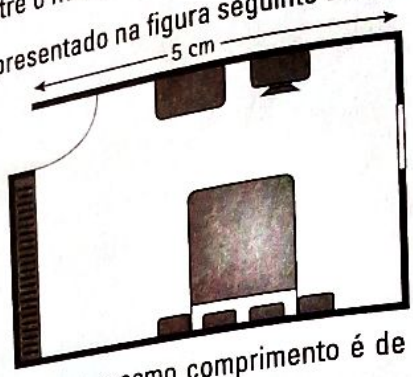
Dados dois números a e b, com $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ representam a **razão entre a e b**.

Os **termos** da razão são os números a e b onde a é o **antecedente** e b o **consequente**.

EXEMPLOS:

1. Uma equipa de futebol participou em dez jogos ganhando apenas quatro deles. Determine a razão entre o número de derrotas e o número de jogos realizados.

2. O quarto do Pedro representado na figura seguinte tem 4 metros de comprimento.



Sabendo que na planta esse mesmo comprimento é de 5 centímetros, qual é a escala utilizada?

Resolução

1. $\frac{\text{N.º de derrotas}}{\text{N.º de jogos}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

2. $\text{escala} = \frac{\text{comprimento do quarto no desenho}}{\text{comprimento do quarto na realidade}} = \frac{5}{400} = \frac{1}{80}$

Se multiplicarmos ambos os termos de uma razão pelo mesmo número, obtemos uma razão equivalente.

Por exemplo, ao multiplicarmos ambos os termos da razão $\frac{3}{5}$ por 4, obtemos a razão $\frac{12}{20}$ de igual valor à anterior (0,6), ou seja, $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$. Esta relação designa-se por **proporção.**

OBSERVAÇÃO:
A proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lê-se: "a está para b, assim como, c está para d".

Uma **proporção** é uma igualdade entre duas razões, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ com b e d não nulos.

Na proporção, a e d são os **extremos** e b e c os **meios.**

2.2. Propriedades das proporções numéricas

Consideremos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ com b e d não nulos.

OBSERVAÇÃO:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$
(d) (b)

Propriedade 1 (Propriedade fundamental das proporções)

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$.

OBSERVAÇÃO:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$
$\Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

Propriedade 2

Em qualquer proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o segundo assim como a soma dos dois últimos está para o quarto.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Propriedade 3

Em qualquer proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como, qualquer antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$$

Propriedade 4

Numa sucessão de razões iguais, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como, qualquer antecedente está para o seu consequente.

OBSERVAÇÃO:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff ad=bc$

$\iff \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$\iff \frac{a}{c}+1=\frac{b}{d}+1$

$\iff \frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$

$\iff (a+c)d=(b+d)c$

$\iff \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$

OBSERVAÇÃO:

Se tivermos uma igualdade de razões, tal como:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

podemos, por generalização da propriedade 3, escrever:

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c}{d}$$

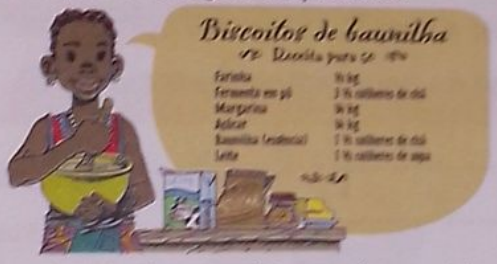
$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{e}{f}$$

EXEMPLO:

1. Para cada caso, verifique se é uma proporção.

   a) $\frac{2}{7}=\frac{4}{14}$ b) $\frac{10}{3}=\frac{15}{8}$

2. Quando se aumenta ou diminui o número de biscoitos, deve-se aumentar ou diminuir os ingredientes na mesma proporção para se manter o seu sabor. Observe a receita e responda às seguintes questões.



   a) Que quantidade de farinha é necessária para fazer o dobro dos biscoitos?

   b) Que quantidade de margarina é precisa para fazer metade da receita?

3. Para obter uma certa quantidade de tinta cor-de-laranja juntaram-se três partes de tinta vermelha com quatro partes de tinta amarela. Quantos litros de tinta vermelha são necessários para obter 17,5 litros de tinta cor-de-laranja?

Resolução

1. a) Aplicando a propriedade fundamental das proporções:

   $\frac{2}{7}=\frac{4}{14} \iff 2\times 14=7\times 4 \iff 28=28$ (verdadeiro)

   A igualdade é uma proporção.

   b) $\frac{10}{3}=\frac{15}{8} \iff 10\times 8=3\times 15 \iff 80=45$ (falso)

   A igualdade não é verdadeira, logo, não é uma proporção.

2. a) $\frac{\frac{1}{2}}{50}=\frac{x}{100} \iff 50x=100\times\frac{1}{2} \iff x=\frac{100\times\frac{1}{2}}{50} \iff x=\frac{50}{50} \iff x=1$

   R.: É necessário 1 kg de farinha.

   b) $\frac{\frac{1}{4}}{50}=\frac{x}{25} \iff 50x=\frac{1}{4}\times 25 \iff x=\frac{25\times 1}{4\times 50} \iff x=\frac{1}{8}$.

   R.: É necessário $\frac{1}{8}$ kg de margarina.

3. $17{,}5:7=2{,}5\ \ell$ (3 + 4 = 7 partes) $\iff 3\times 2{,}5=7{,}5\ \ell$

   R.: São necessários 7,5 ℓ de tinta vermelha.

Exercício n.º 2

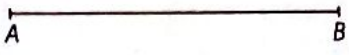
1. Determine o valor de x em cada uma das seguintes proporções.

   a) $\frac{x}{4} = \frac{3}{2}$ b) $\frac{12}{x} = \frac{24}{6}$ c) $\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$ d) $\frac{3}{x} = \frac{x}{27}$

2. Para confeccionar uma compota de pêssego, a avó Júlia usa 4 kg de açúcar e 6 kg de pêssegos. Que quantidade de açúcar necessita para 9 kg de pêssego?

3. Na construção de um prédio, o Sr. Silva necessita de betão que é feito com areia e cimento na razão de 3 : 1.
   a) Se o Sr. Silva usar 350 kg de cimento, quantos quilos de betão obterá?
   b) Para obter 2500 kg de betão, quantos quilos de areia e cimento são necessários?

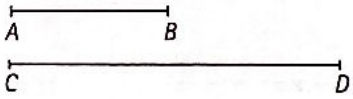
2.3. Segmentos de recta proporcionais



Um **segmento de recta** AB representado por $[AB]$ é o conjunto de todos os pontos de uma recta que estão limitados por dois pontos que são as extremidades do segmento, A e B.

Não é possível dividir um segmento de recta por outro, mas é possível proceder à divisão dos seus comprimentos.

Consideremos os segmentos de recta $[AB]$ e $[CD]$ seguintes:



$\overline{AB} = 2$ cm

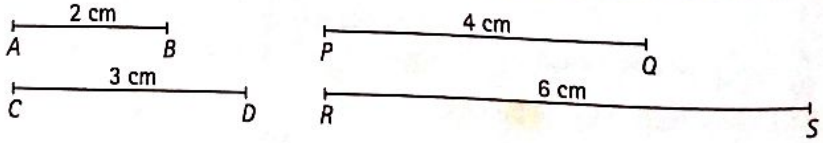
$\overline{CD} = 5$ cm

A razão entre os segmentos de recta $[AB]$ e $[CD]$, simbolizado por $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, é definida como a razão entre os comprimentos desses segmentos, isto é:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{2}{5}.$$

De forma semelhante ao estudo efectuado com as proporções numéricas, pode-se estabelecer a proporção entre segmentos de recta através dos seus comprimentos.

EXEMPLO:



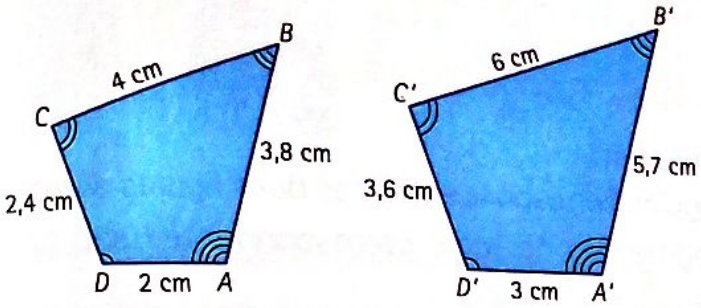
Dos comprimentos mencionados, temos que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{2}{3}$ e $\frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}} = \frac{4}{6}$.

Como $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, então existe uma proporção entre os quatro segmentos de recta, pelo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}$.

Quatro segmentos de recta são **proporcionais** se os seus comprimentos formarem uma proporção.

EXEMPLO:

Considere os quadriláteros $[ABCD]$ e $[A'B'C'D']$.



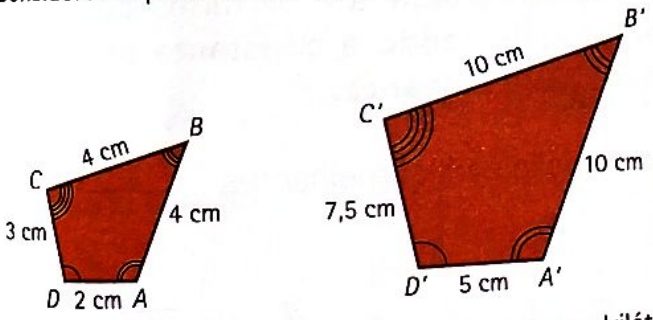
Mostre que os dois quadriláteros têm os lados correspondentes proporcionais.

Resolução

Como $\frac{3,8}{5,7}=\frac{4}{6}=\frac{2,4}{3,6}=\frac{2}{3}$, podemos concluir que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}}$, pelo que, os lados correspondentes são proporcionais.

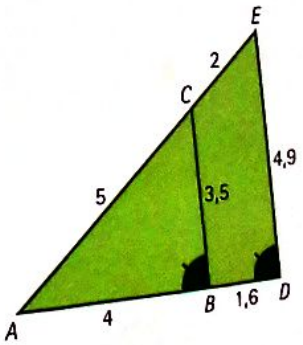
Exercício n.º 3

1. Considere os quadriláteros $[ABCD]$ e $[A'B'C'D']$.



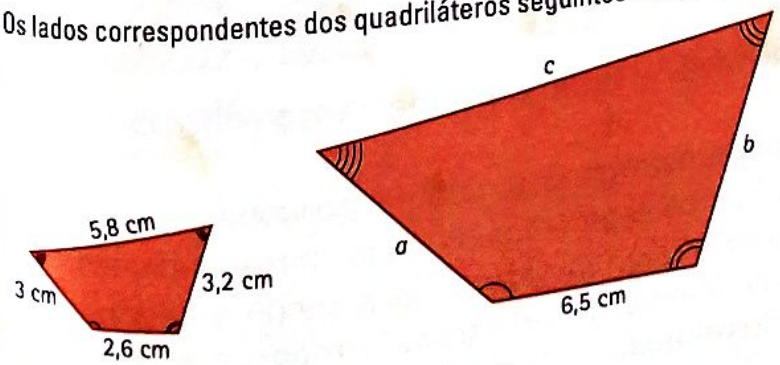
Verifique se os lados correspondentes dos dois quadriláteros são proporcionais.

2. Considere os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ da figura ao lado cujas medidas dos lados estão em centímetros.



Verifique se os lados correspondentes são proporcionais.

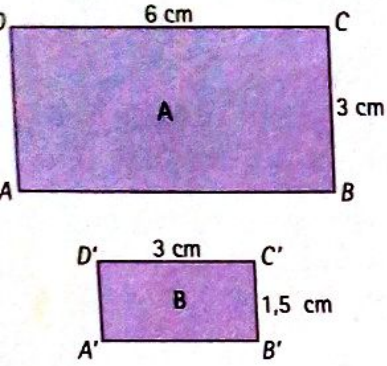
3. Os lados correspondentes dos quadriláteros seguintes são proporcionais.



Determine as medidas dos lados a, b e c.

3. Semelhança de triângulos

3.1. Noção de semelhança



Consideremos os rectângulos representados ao lado.

Medindo os lados e os ângulos correspondentes dos rectângulos temos que:

	Comprimento	Largura	Ângulos
Figura A	6	3	90°
Figura B	3	1,5	90°

Observe que:

– os ângulos correspondentes nas duas figuras são congruentes;

– os segmentos de recta correspondentes são proporcionais porque $\frac{6}{3} = \frac{3}{1,5} = 2$.

Assim, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$ onde k é a **razão de semelhança.**

Neste caso, os polígonos são semelhantes e escreve-se:

$$[ABCD] \sim [A'B'C'D'] .$$

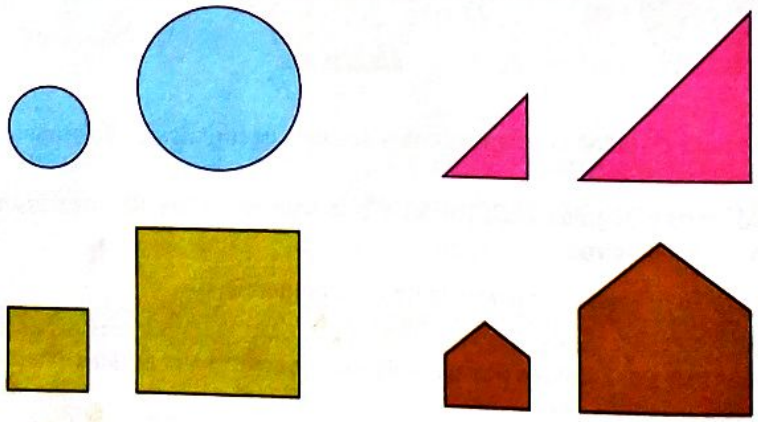
↑
lê-se "semelhante"

OBSERVAÇÃO:

A definição de polígonos semelhantes só é válida quando ambas as condições são satisfeitas. Uma só das condições não é suficiente.

Dois polígonos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais sendo a constante de proporcionalidade a razão de semelhança.

Outros exemplos de polígonos semelhantes:



Para determinar a **razão de semelhança** entre dois polígonos devemos:

1.º identificar o polígono original e o polígono transformado;

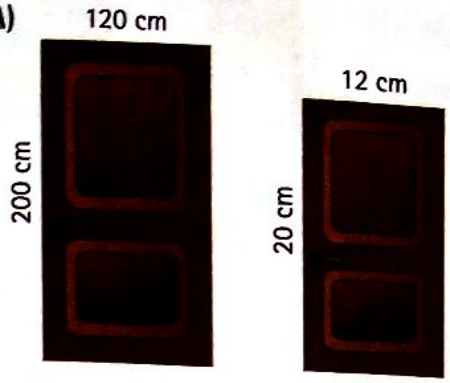
2.º identificar os segmentos de recta correspondentes;

3.º escrever a razão de semelhança sendo o quociente entre o comprimento do lado **transformado** e o comprimento do lado **original**.

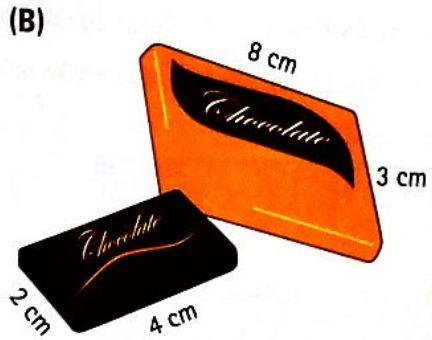
EXEMPLOS:

1. Observe os seguintes pares de rectângulos.

(A)



(B)

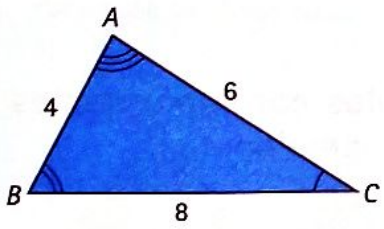


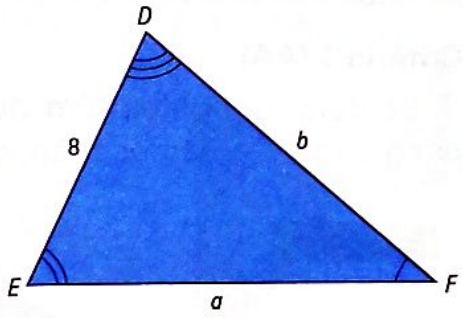
Para cada caso:

a) verifique se os lados correspondentes são proporcionais.

b) indique, justificando, os pares de figuras semelhantes e a respectiva razão de semelhança.

2. Considere os triângulos semelhantes $[ABC]$ e $[DEF]$ com as medidas dos lados indicados na figura.





Calcule as medidas dos lados a e b.

Resolução

1. a) **(A)** $\frac{120}{12} = \frac{200}{20} = 10$, pelo que os lados correspondentes são proporcionais.

(B) Como $\frac{8}{4} \neq \frac{3}{2}$, então os lados correspondentes não são proporcionais.

b) **(A)** As figuras são semelhantes porque os ângulos são rectos e os lados correspondentes são proporcionais.

No caso de uma redução, $r = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$ e de uma ampliação, $r = \frac{120}{12} = 10$.

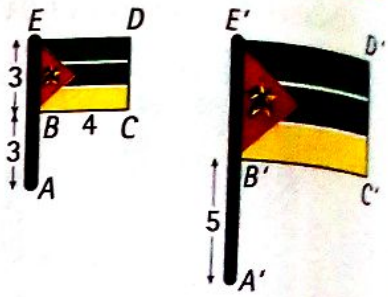
(B) As figuras não são semelhantes porque os lados correspondentes não são proporcionais.

2. O lado correspondente a $[DF]$ é $[AC]$, de $[EF]$ é $[BC]$ e de $[DE]$ é $[AB]$, logo:

$$\frac{a}{8} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow a = \frac{8 \times 8}{4} \Leftrightarrow a = 16;$$

$$\frac{b}{6} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow b = \frac{6 \times 8}{4} \Leftrightarrow b = 12.$$

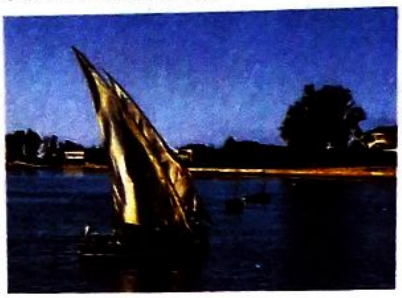
1. As bandeiras representadas ao lado são semelhantes.



   a) Qual é a razão de semelhança das bandeiras considerando uma ampliação?

   b) Determine as dimensões da bandeira maior. As medidas estão em centímetros.

2. As duas fotografias da figura são semelhantes.



Sabendo que a fotografia maior tem 30 cm de comprimento e 20 cm de largura e a razão de semelhança da fotografia maior para a menor é $\frac{2}{5}$, determine as dimensões da fotografia menor.

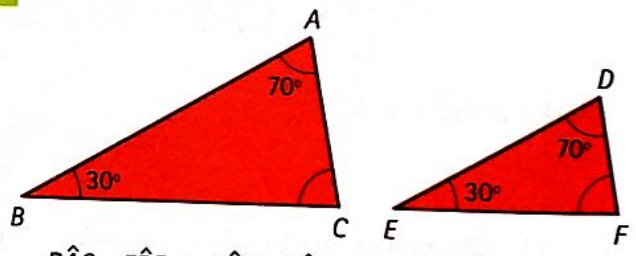
3.2. Semelhança de triângulos

Para verificar se dois triângulos são semelhantes não é necessário conhecer todos os elementos do triângulo (comprimento dos lados e amplitude dos ângulos).

Critério 1 (AA)

Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes, então os triângulos são semelhantes.

EXEMPLO:

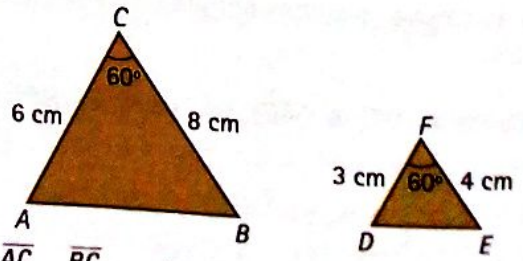


$B\hat{A}C = E\hat{D}F$ e $C\hat{B}A = F\hat{E}D \Longrightarrow \Delta[ABC] \sim \Delta[DEF]$

Critério 2 (LAL)

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados também são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

EXEMPLO:

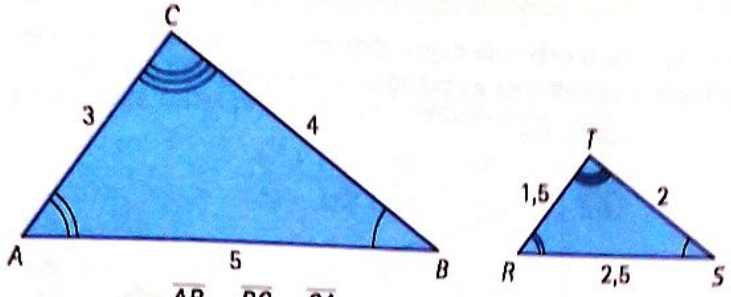


$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ e $A\hat{C}B = D\hat{F}E \Longrightarrow \Delta[ABC] \sim \Delta[DEF]$

Critério 3 (LLL)

Se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais então os triângulos são semelhantes.

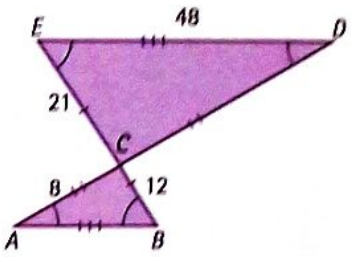
EXEMPLO:



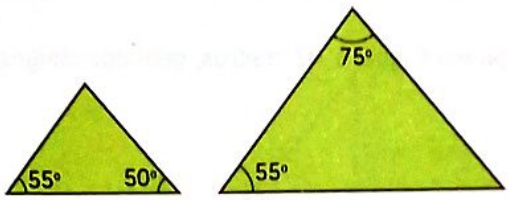
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{TR}} \Rightarrow \Delta[ABC] \sim \Delta[RST]$$

EXEMPLOS:

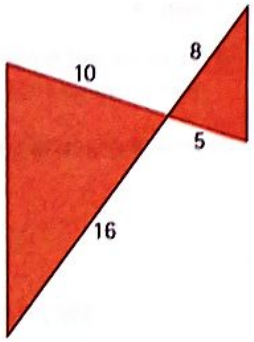
1. Observe a figura representada ao lado.
   a) Os triângulos são semelhantes? Justifique.
   b) Determine os comprimentos dos lados $[AB]$ e $[CD]$.



2. Para cada par de triângulos, diga, justificando, se são semelhantes.
   a)



   b)



3. Os lados de um triângulo medem 10 cm, 8 cm e 6 cm e os lados de outro triângulo medem 30 cm, 24 cm e 18 cm. Serão os triângulos semelhantes?

Resolução

1. a) Os triângulos da figura são semelhantes pelo critério AA ($C\hat{E}D = C\hat{B}A$ e $E\hat{D}C = B\hat{A}C$).

   b) $\frac{12}{21} = \frac{\overline{AB}}{48} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{12 \times 48}{21} = \frac{576}{21} \approx 27{,}4$

   $\frac{12}{21} = \frac{8}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{21 \times 8}{12} = 14$

2. a) Os triângulos são semelhantes porque têm os ângulos correspondentes iguais: 55°, 50° e 75° (critério AA).

   b) Os triângulos são semelhantes porque têm dois lados proporcionais e os ângulos por eles formados iguais pois são verticalmente opostos (critério LAL):

   $$\frac{10}{5} = \frac{16}{8} = 2.$$

3. Os triângulos são semelhantes porque têm os seus lados proporcionais (critério LLL):

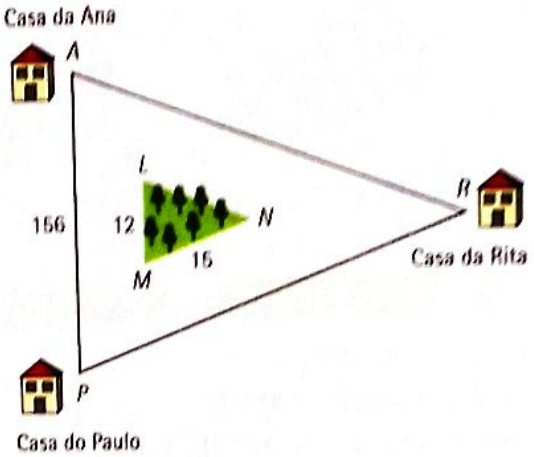
   $$\frac{30}{10} = \frac{24}{8} = \frac{18}{6} = 3.$$

3.3. Resolução de problemas

Os critérios de semelhança de triângulos permitem-nos resolver problemas do nosso quotidiano.

EXEMPLOS:

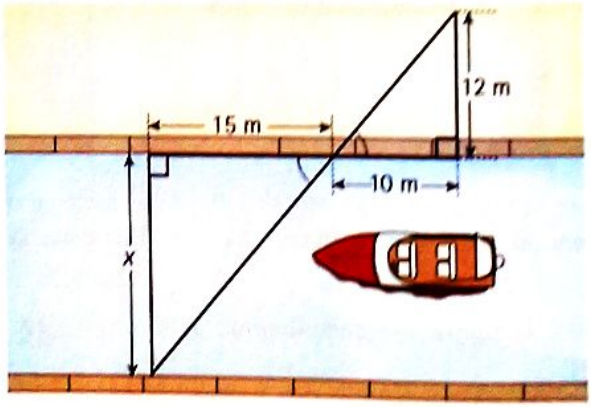
1. Na figura seguinte, o triângulo cujos vértices correspondem às casas da Ana, da Rita e do Paulo é semelhante ao triângulo que representa o jardim.



   a) Qual é a distância da casa do Paulo à casa da Rita? As medidas estão em metros.

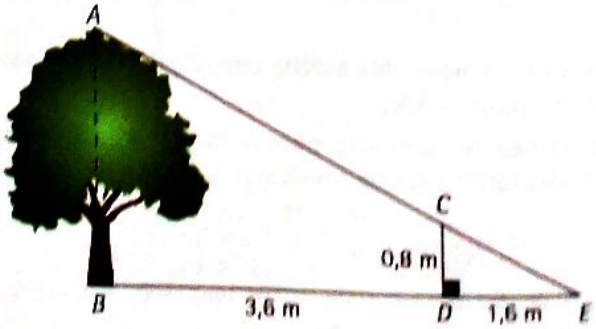
   b) Sabendo que o perímetro do jardim é igual a 42 metros, qual dos amigos mora mais perto da casa da Ana?

2. Observe a seguinte figura.



   Determine a largura x do rio.

3. Considere a seguinte figura.



   Determine a altura da árvore.

Resolução

1. a) Como $\Delta[APR] \sim \Delta[LMN]$, temos que $\frac{\overline{AP}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{LN}}$.

$$\frac{156}{12} = \frac{\overline{PR}}{15} \Leftrightarrow \overline{PR} = \frac{156 \times 15}{12} \Leftrightarrow \overline{PR} = 195$$

R.: A distância entre a casa do Paulo e a da Rita é de 195 metros.

b) Pela propriedade 4 das proporções numéricas temos que:

$$\frac{\overline{AP} + \overline{PR} + \overline{AR}}{\overline{LM} + \overline{MN} + \overline{LN}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{LM}}.$$

$$\frac{156 + 195 + \overline{AR}}{42} = \frac{156}{12} \Leftrightarrow \frac{351 + \overline{AR}}{42} = 13$$

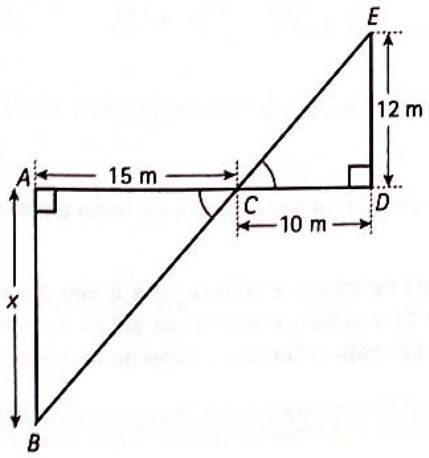
$$\Leftrightarrow 351 + \overline{AR} = 546$$

$$\Leftrightarrow \overline{AR} = 546 - 351$$

$$\Leftrightarrow \overline{AR} = 195 \text{ m}$$

R.: O Paulo mora mais perto da casa da Ana que a Rita.

2.



Como $\Delta[ABC] \sim \Delta[CDE]$ (critério AA), temos que $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \frac{15}{10} = \frac{x}{12} \Leftrightarrow x = \frac{15 \times 12}{10} \Leftrightarrow x = 18$$

R.: A largura do rio é igual a 18 metros.

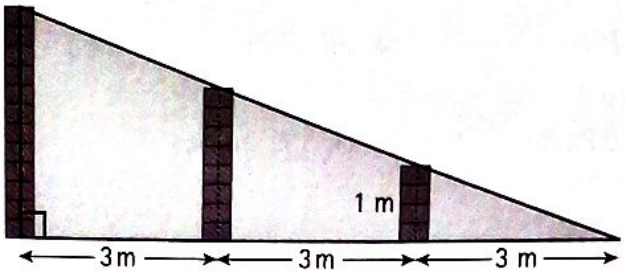
3. Como $\Delta[ABE] \sim \Delta[CDE]$ (critério AA), temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}$.

$$\frac{\overline{AB}}{0{,}8} = \frac{3{,}6 + 1{,}6}{1{,}6} \Leftrightarrow \overline{AB} = 3{,}25 \times 0{,}8 \Leftrightarrow \overline{AB} = 2{,}6$$

R.: A altura da árvore é igual a 2,6 metros.

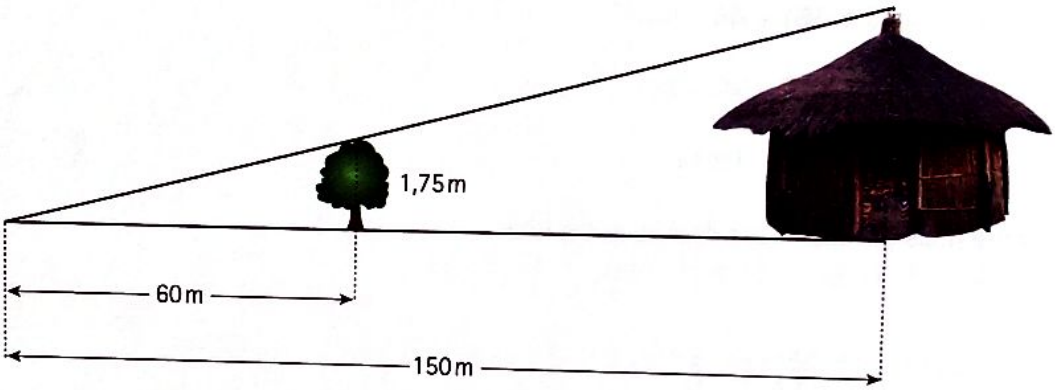
Exercício n.º 5

1. A figura representa uma rampa.



Determine a altura dos pilares médio e maior.

2. Considere os dados indicados na figura.

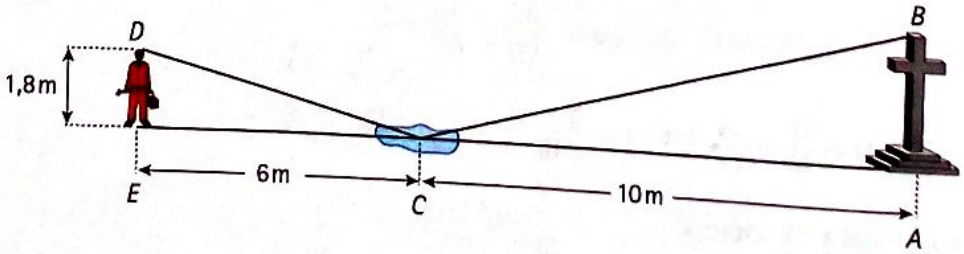


Determine a altura da palhota.

3. O senhor Manuel ficou encarregado de proceder ao arranjo do cruzeiro da sua aldeia por ocasião da festa anual que se realiza naquele local.

Necessitando de saber a altura do cruzeiro, para ter uma ideia sobre quais os meios a utilizar para o seu arranjo, começou a sentir alguma dificuldade, até que, por acaso, ao passar perto do cruzeiro e pensando sobre o assunto reparou que, estando a cerca de 6 metros de uma poça de água, conseguia ver nela reflectido o cimo do cruzeiro.

Apressou-se, então, a medir a distância da poça de água ao cruzeiro.



a) Mostre que os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são semelhantes.

b) Indique a razão de semelhança que transforma o triângulo $[ABC]$ no triângulo $[CDE]$.

c) Calcule a altura do cruzeiro.

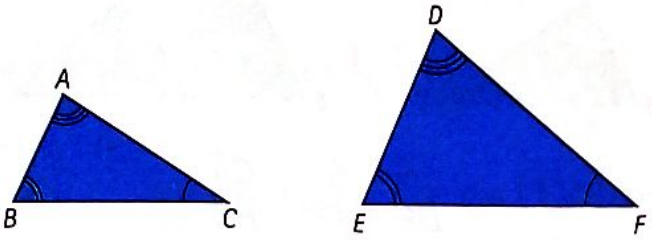
d) Calcule $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$.

3.4. Teoremas dos perímetros e das áreas

Teorema dos perímetros

A **razão entre os perímetros** de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança.

Prova:



Como $\Delta[ABC] \sim \Delta[DEF]$ então $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DF}} = k$

onde k é a razão de semelhança.

Os perímetros dos triângulos são:

$$P_1 = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \quad \text{e} \quad P_2 = \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD}\,.$$

Pela propriedade 4 das proporções numéricas:

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{FD}} = k$$

pelo que $\frac{P_1}{P_2} = k$.

EXEMPLO:

Os lados de um triângulo medem 3,6 cm, 6,4 cm e 8 cm. Esse triângulo é semelhante a um outro cujo perímetro é igual a 45 cm. Calcule o comprimento dos lados do segundo triângulo.

Resolução

$$\frac{45}{18} = \frac{x}{3{,}6} \Leftrightarrow x = \frac{3{,}6 \times 45}{18} \Leftrightarrow x = 9 \text{ cm}$$

$$\frac{45}{18} = \frac{y}{6{,}4} \Leftrightarrow y = \frac{6{,}4 \times 45}{18} \Leftrightarrow y = 16 \text{ cm}$$

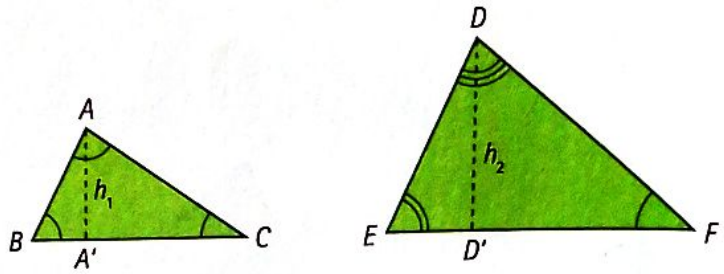
$$\frac{45}{18} = \frac{z}{8} \Leftrightarrow z = \frac{8 \times 45}{18} \Leftrightarrow z = 20 \text{ cm}$$

Os lados do segundo triângulo medem 9 cm, 16 cm e 20 cm.

Teorema das áreas

A **razão entre as áreas** de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Prova:



$\Delta[ABC] \sim \Delta[DEF] \Longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = k$

$\Delta[ABA'] \sim \Delta[DED'] \Longrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{ED'}} = \frac{h_1}{h_2} = k$

pelo que $\frac{h_1}{h_2} = k \Longrightarrow h_1 = kh_2$.

As áreas dos triângulos são:

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h_1 \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times h_2 .$$

Assim, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \times \frac{h_1}{h_2} = k \times \frac{kh_2}{h_2} = k^2$.

EXEMPLO:

Os perímetros de dois triângulos semelhantes são, respectivamente, 15 e 22,5 cm. Calcule a área do segundo triângulo sabendo que a área do primeiro é 22 cm².

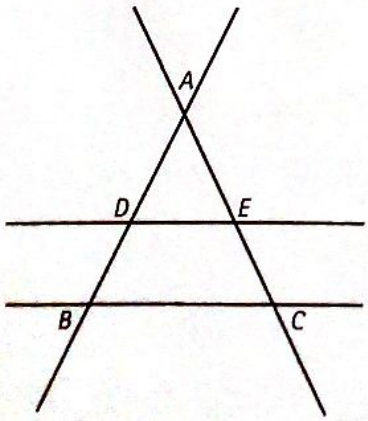
Resolução

Pelo teorema dos perímetros, $\frac{22,5}{15} = 1,5 = r$, logo, pelo teorema das áreas, $\frac{A_2}{22} = 1,5^2 \Leftrightarrow A_2 = 22 \times 1,5^2 \Leftrightarrow A_2 = 49,5 \text{ cm}^2$.

3.5. Teorema de Tales

Teorema de Tales

Quando duas rectas transversais cortam um feixe de rectas paralelas, as medidas dos segmentos delimitados pelas transversais são proporcionais.



Prova:

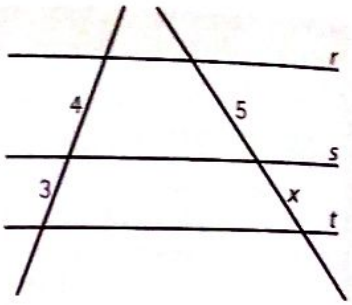
Como $\Delta[ABC] \sim \Delta[ADE]$ (critério AA), então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD} + \overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE} + \overline{CE}}{\overline{AE}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = 1 + \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}$$

EXEMPLOS:

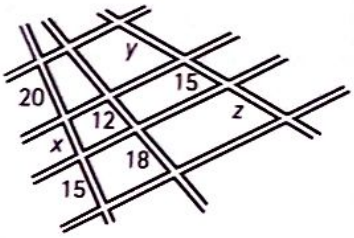
1. Determine o valor de x na figura representada ao lado.



2. O mapa da figura ao lado mostra quatro estradas paralelas cortadas por três vias transversais.

   Algumas das distâncias entre os cruzamentos dessas vias e estradas estão indicadas no mapa, em km.

   Complete o mapa com as distâncias desconhecidas.



Resolução

1. Pelo teorema de Tales, $\frac{5}{x}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow x=\frac{3\times 5}{4} \Leftrightarrow x=3{,}75$.

2. Pelo teorema de Tales:

$$\frac{x}{15}=\frac{12}{18} \Leftrightarrow x=\frac{12\times 15}{18} \Leftrightarrow x=10 \text{ km}$$

$$\frac{y}{15}=\frac{20}{10} \Leftrightarrow y=\frac{20\times 15}{10} \Leftrightarrow y=30 \text{ km}$$

$$\frac{z}{15}=\frac{18}{12} \Leftrightarrow z=\frac{15\times 18}{12} \Leftrightarrow z=22{,}5 \text{ km}$$

3.5.1. Divisão de um segmento de recta em partes iguais

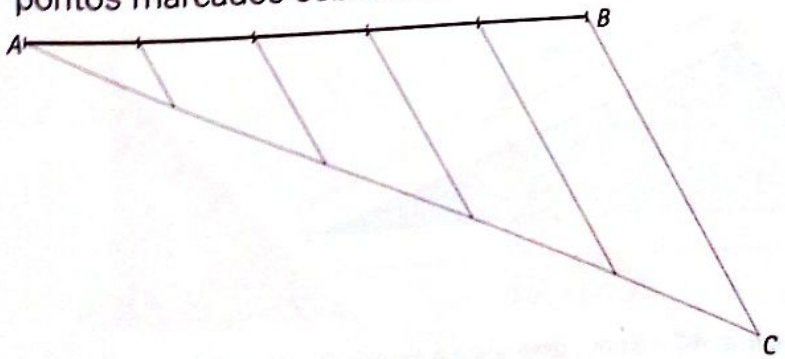
Como dividir um segmento de recta $[AB]$ em 5 partes iguais?

1.º – Traça-se um segmento de recta auxiliar que tenha qualquer inclinação em relação ao segmento $[AB]$ e que lhe seja concorrente no ponto A ou no ponto B.

2.º – Com o auxílio de um compasso, marcam-se 5 segmentos do mesmo comprimento sobre o segmento de recta auxiliar.

3.º – Desenha-se o triângulo $[ABC]$ sendo C o ponto da outra extremidade do segmento de recta auxiliar.

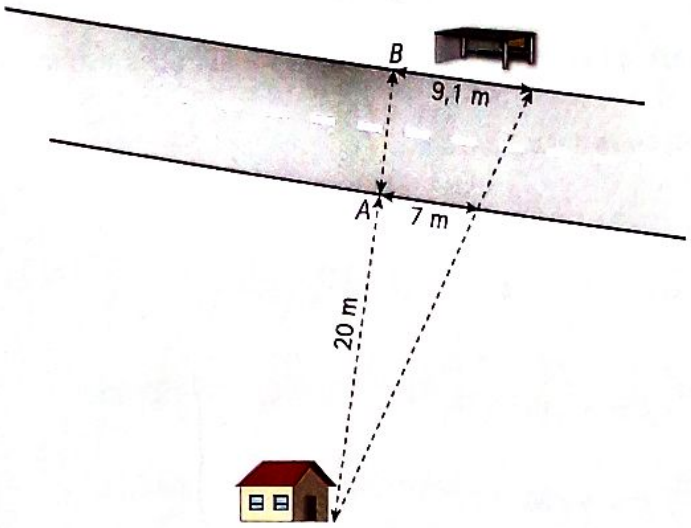
4.º – Traçam-se paralelas ao segmento $[BC]$ que passam nos pontos marcados sobre a recta auxiliar.



As paralelas desenhadas dividem o segmento $[AB]$ em 5 partes iguais.

Exercício n.º 6

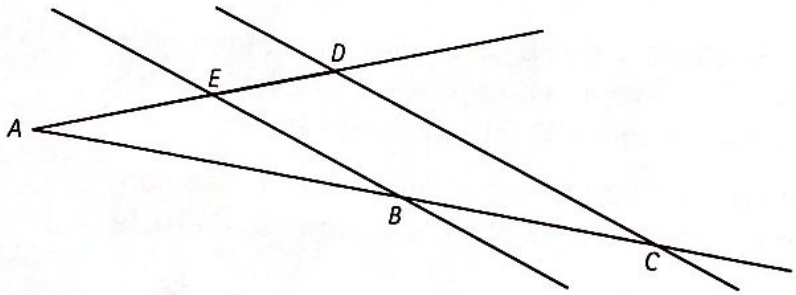
1. Junto da paragem do autocarro em que o Marco sai para ir para a escola, vão construir uma passagem para peões. A figura mostra as distâncias conhecidas.



O desenho não está feito à escala.

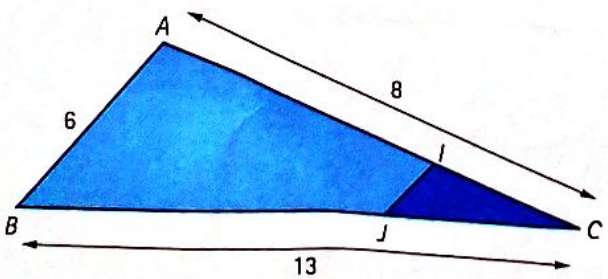
Tendo em conta os dados da figura, determine a largura da passadeira para peões, entre os pontos A e B assinalados.

2. Consideremos a seguinte figura onde $[BE] // [CD]$, $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{AB} = 6$ cm e $\overline{ED} = 2$ cm.



Determine o comprimento do segmento de recta $[AE]$.

3. No triângulo $[ABC]$, I é um ponto de $[AC]$, J é um ponto de $[BC]$ e $C\hat{J}I = C\hat{B}A$.



Sendo $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 13$ cm, $\overline{IC} = 2$ cm e $\overline{AC} = 8$ cm, determine a medida de $\overline{IJ}$ e $\overline{JC}$.

4. Desenhe, no seu caderno, um segmento de recta $[AB]$ com 4 cm de comprimento e divida-o em três partes iguais.

3.6. Semelhança de triângulos rectângulos

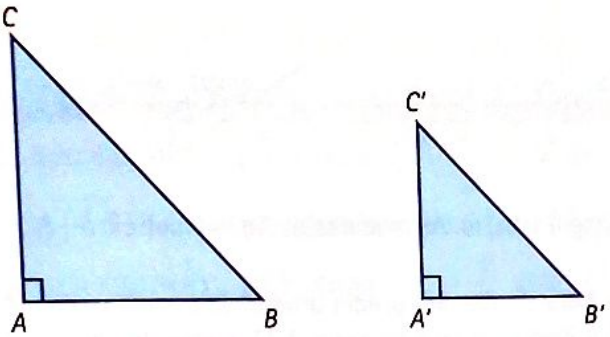
Os triângulos rectângulos têm sempre um ângulo recto, pelo que os seus critérios de semelhança simplificam-se.

OBSERVAÇÃO:

Um triângulo diz-se **rectângulo** se um dos seus ângulos é recto. Neste caso, o maior lado do triângulo (lado oposto ao ângulo recto) designa-se por **hipotenusa** e os outros dois por **catetos.**

Critério de semelhança 1

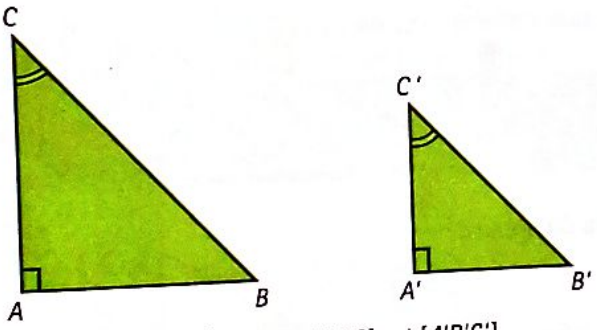
Dois triângulos rectângulos são semelhantes se têm os dois catetos proporcionais.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \Rightarrow \Delta[ABC] \sim \Delta[A'B'C']$$

Critério de semelhança 2

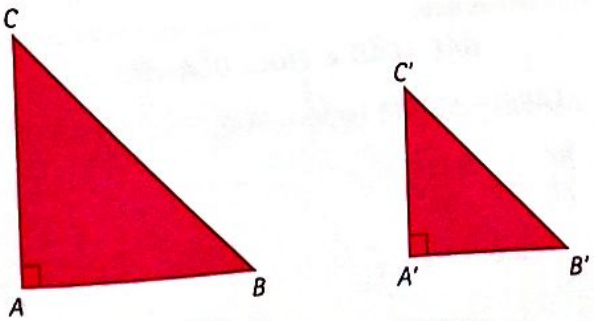
Dois triângulos rectângulos são semelhantes se têm um ângulo agudo igual.



$$A\hat{C}B = A'\hat{C}'B' \Rightarrow \Delta[ABC] \sim \Delta[A'B'C']$$

Critério de semelhança 3

Dois triângulos rectângulos são semelhantes se têm a hipotenusa e um cateto proporcionais.

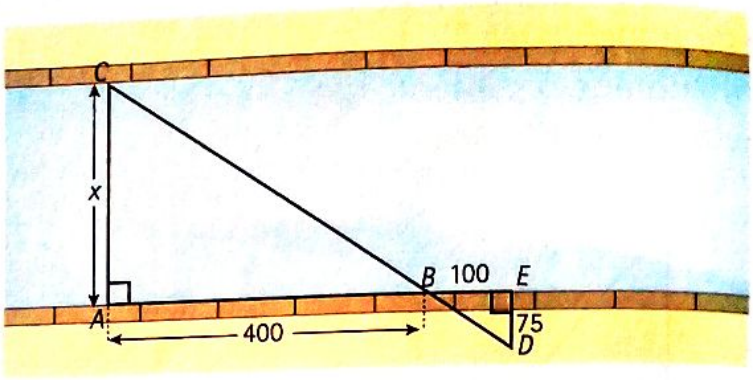


$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \Delta[ABC] \sim \Delta[A'B'C']$$

(A mesma relação se aplica para o cateto $[AC]$.)

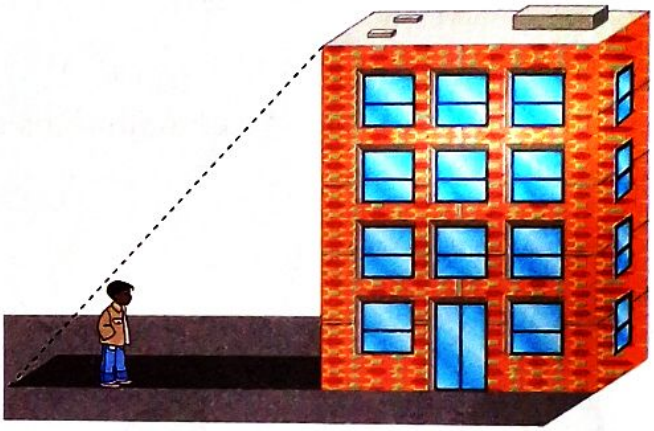
EXEMPLOS:

1. Um grupo de fotógrafos mediu a largura de um rio através de dois triângulos rectângulos desenhados nas suas margens.



Determine a largura do rio. As medidas estão em metros.

2. Numa mesma hora do dia, um prédio produz uma sombra de 18 metros no chão enquanto que o Henrique com os seus 1,20 metro de altura produz uma sombra de 80 centímetros.



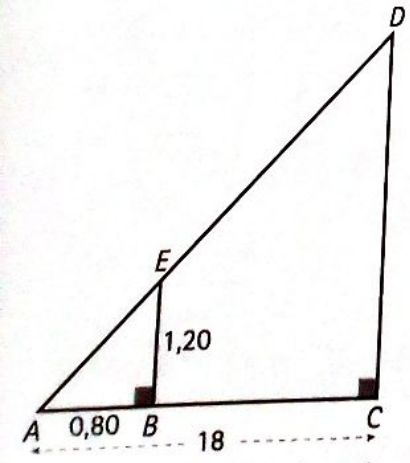
Qual é a altura do prédio?

Resolução

1. Como $C\hat{B}A = D\hat{B}E$ e $B\hat{A}C = B\hat{E}D = 90°$, então $\Delta[ABC] \sim \Delta[BDE]$ (critério AA).

Assim, $\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \frac{x}{75} = \frac{400}{100} \Leftrightarrow x = \frac{400 \times 75}{100} \Leftrightarrow x = 300$.

R.: A largura do rio é igual a 300 metros.



O desenho não está feito à escala.

2. Na figura ao lado temos que:

$$B\hat{A}E = C\hat{A}D \text{ e } E\hat{B}A = D\hat{C}A = 90°.$$

Desta forma, $\Delta[ABE] \sim \Delta[ACD]$ (critério AA).

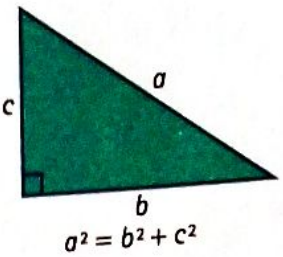
Assim, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \frac{0{,}80}{18} = \frac{1{,}20}{x}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1{,}20 \times 18}{0{,}80}$$

$$\Leftrightarrow x = 27$$

R.: A altura do prédio é igual a 27 metros.

3.7. Teorema de Pitágoras – demonstração pela semelhança de triângulos

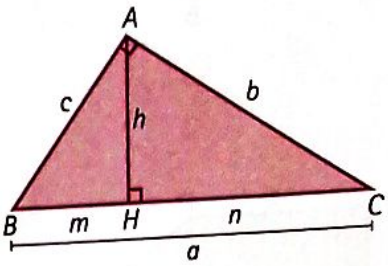


$a^2 = b^2 + c^2$

Teorema de Pitágoras

Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Prova:



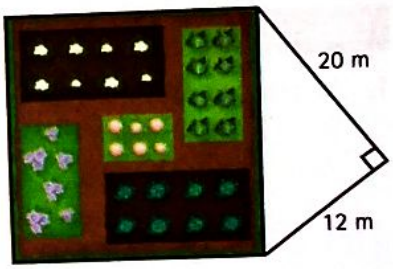
Seja h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo rectângulo.

- $\Delta[ABC] \sim \Delta[AHC]$, pois têm ambos um ângulo recto e o ângulo C em comum, pelo que $\frac{b}{n} = \frac{a}{b} \iff b^2 = na$.
- $\Delta[ABC] \sim \Delta[ABH]$, pois têm ambos um ângulo recto e o ângulo B em comum, pelo que $\frac{c}{m} = \frac{a}{c} \iff c^2 = ma$.

Adicionando ambas as relações:

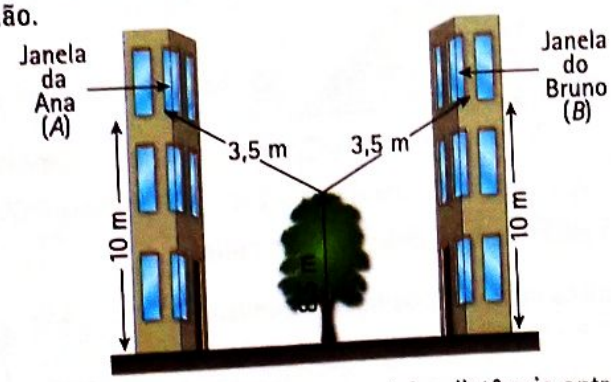
$$na + ma = b^2 + c^2 \iff a(n+m) = b^2 + c^2 \iff a \times a = b^2 + c^2 \iff$$
$$\iff a^2 = b^2 + c^2$$

EXEMPLOS:



1. A figura ao lado representa uma horta onde se cultivam legumes. Qual é a área da zona de cultivo dos legumes?

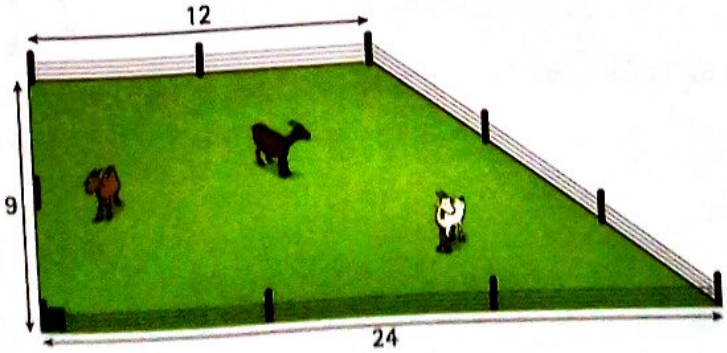
2. A figura seguinte representa as fachadas de dois prédios iguais onde vivem a Ana e o Bruno e os pontos A e B representam as janelas da Ana e do Bruno, respectivamente. Os amigos moram ambos no mesmo andar que se encontra a 10 m do chão.



O desenho não está feito à escala.

De acordo com as medidas indicadas, qual é a distância entre as janelas?

3. O Sr. António tem um terreno com a forma de um trapézio rectangular, onde costuma colocar as suas três cabras.



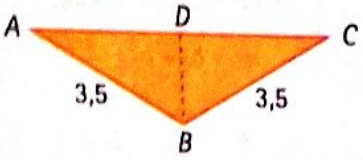
De acordo com as medidas indicadas, determine o perímetro do terreno.

Resolução:

1. Pretende-se calcular o comprimento da hipotenusa do triângulo.

Pelo Teorema de Pitágoras, $\ell^2 = 20^2 + 12^2 = 544$, logo, $A = \ell^2 = 544\ m^2$.

R.: A área é igual a $544\ m^2$.



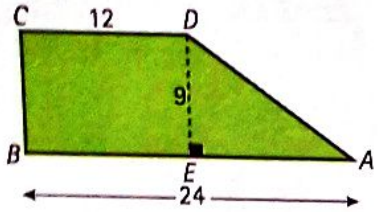
2. $\overline{AD} = \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ e $\overline{BD} = 10 - 8{,}5 = 1{,}5$

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao $\Delta[BCD]$,

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$, pelo que, $\overline{CD} = \sqrt{3{,}5^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{10}$.

$\overline{AC} = 2 \times \overline{CD} = 2 \times \sqrt{10} \approx 6{,}3$

R.: A distância entre as janelas é, aproximadamente, 6,3 metros.



3. $\overline{DE} = \overline{CB} = 9\ m$

$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{DC} = 24 - 12 = 12\ m$

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao $\Delta[ADE]$,

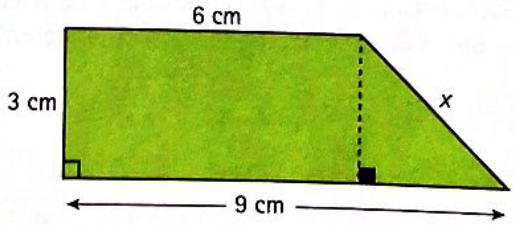
$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2$, pelo que, $\overline{AD} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$.

Assim, $P = 24 + 9 + 12 + 15 = 60\ m$.

R.: O perímetro do trapézio é igual a 60 metros.

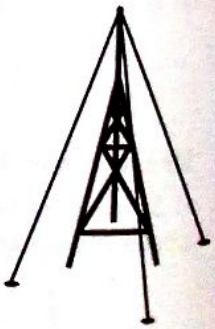
Exercício n.º 7

1. Atendendo aos dados da figura seguinte, determine o valor de x.

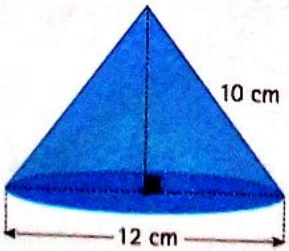


2. Um emissor de televisão que tem 30 metros de altura está preso ao chão por três cabos.

Sabendo que cada cabo está preso ao chão a 40 metros do centro da base do emissor, determine a quantidade de cabo necessário para prender o emissor.

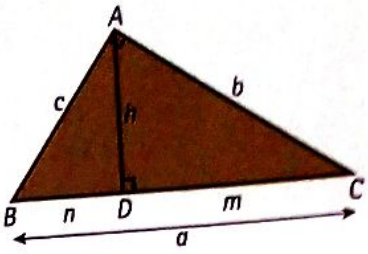


3. Atendendo aos dados da figura, determine a altura do cone.



3.8. Relações métricas num triângulo rectângulo

Consideremos o triângulo $[ABC]$ rectângulo em A, representado ao lado.



Dos critérios de semelhança de triângulos, conclui-se que:

$$\Delta[ABD] \sim \Delta[ADC] \sim \Delta[ABC] .$$

Relativamente ao triângulo $[ABC]$:

- a: hipotenusa
- b: cateto maior
- c: cateto menor
- h: altura relativa à hipotenusa
- m: projecção do cateto b sobre o lado $[BC]$
- n: projecção do cateto c sobre o lado $[BC]$

Da semelhança dos triângulos referidos, obtemos as seguintes relações.

Relação 1

A hipotenusa é igual à soma das projecções dos catetos: $a = m + n$.

Relação 2

O quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projecções dos catetos: $h^2 = mn$.

OBSERVAÇÃO:

$\Delta[ABD] \sim \Delta[ADC] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Leftrightarrow h^2 = mn$

Relação 3

O quadrado de um cateto é igual ao produto da sua projecção pela hipotenusa: $b^2 = ma$ e $c^2 = na$.

OBSERVAÇÃO:

- $\Delta[ADC] \sim \Delta[ABC] \Longrightarrow$

  $\Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Leftrightarrow b^2 = ma$

- $\Delta[ABD] \sim \Delta[ABC] \Longrightarrow$

  $\Longrightarrow \frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Leftrightarrow c^2 = na$

Relação 4

O produto entre a hipotenusa e a altura relativa a ela é igual ao produto dos catetos: $ah = bc$.

OBSERVAÇÃO:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Leftrightarrow ah = bc$

Relação 5

O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos: $a^2 = b^2 + c^2$.

EXEMPLOS:

1. Num triângulo rectângulo, as projecções dos catetos sobre a hipotenusa medem 6 cm e 8 cm. Determine a altura relativa à hipotenusa desse triângulo.

2. A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo rectângulo é de 12 cm e uma das projecções mede 9 cm. Calcule a medida dos catetos desse triângulo.

3. Determine a medida das projecções num triângulo rectângulo cuja hipotenusa mede 12 cm e um dos catetos 4 cm.

Resolução

1. $m=6$ cm e $n=8$ cm, logo $h=\sqrt{6\times 8}=4\sqrt{3}$ cm.

2. $h=12$ cm e $m=9$ cm.

$$h^2=mn \iff n=\frac{h^2}{m} \iff n=\frac{12^2}{9}=16$$

$$a=m+n=9+16=25.$$

$$b^2=am \iff b=\sqrt{am} \iff b=\sqrt{25\times 9}=5\times 3=15$$

$$c^2=an \iff c=\sqrt{an} \iff c=\sqrt{25\times 16}\times 16=5\times 4=20$$

R.: Os catetos medem 15 cm e 20 cm.

3. $a=12$ cm e $c=4$ cm.

$$c^2=na \Longrightarrow n=\frac{c^2}{a} \iff n=\frac{4^2}{12}=\frac{4}{3}$$

$$a=m+n \iff m=a-n \iff m=\frac{12-4}{3}=\frac{32}{3}$$

R.: As medidas das projecções são $\frac{4}{3}$ cm e $\frac{32}{3}$ cm.

Exercício n.º 8

1. Num triângulo rectângulo, a altura relativa à hipotenusa mede 12 cm e a diferença entre as medidas das projecções dos catetos sobre a hipotenusa é zero. Determine a hipotenusa desse triângulo.

2. As medidas dos catetos de um triângulo rectângulo são $(x+5)$ cm e $(x+1)$ cm e a hipotenusa $(x+9)$ cm.

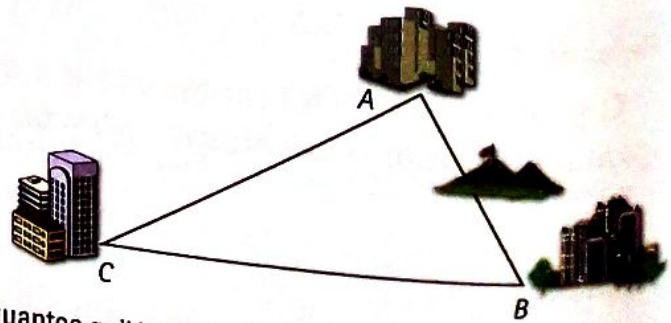
   a) Determina o valor de x.

   b) Determine o perímetro desse triângulo.

3. Pretendia-se ligar três cidades por estradas tal como é indicado na figura seguinte.

   No entanto, uma cordilheira impede a construção da estrada que liga a cidade A a B. Desta forma, será construído um desvio o mais curto possível através da estrada que une a cidade A à estrada $[BC]$.

   Sabe-se que $\overline{AC}=40$ km e $\overline{BC}=50$ km.



   a) Desenhe no seu caderno o triângulo $[ABC]$ e a estrada correspondente ao desvio pretendido.

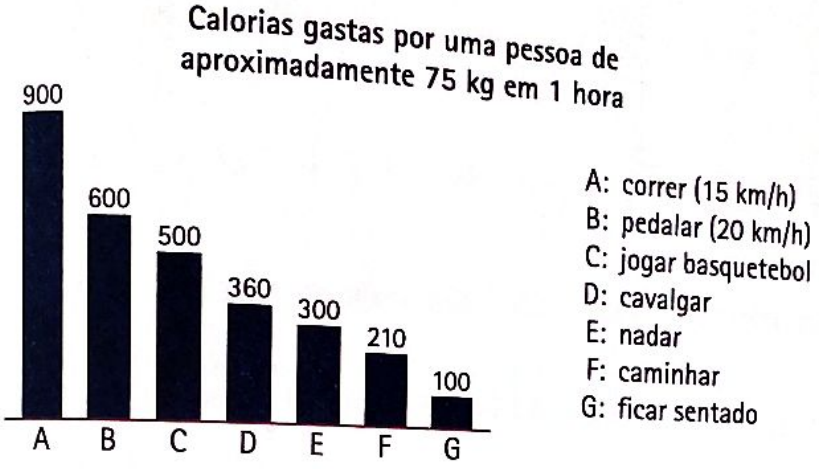
   b) Qual é o comprimento da estrada que será construída?

   c) O ponto onde esta estrada encontra a estrada $[BC]$ dista quantos quilómetros da cidade B?

   d) Quantos quilómetros a mais têm os utentes de percorrer relativamente ao projecto inicial?

AVALIAÇÃO FORMATIVA 8

1. O gráfico abaixo informa a quantidade de calorias gastas por uma pessoa no período de uma hora quando pratica determinadas actividades.



a) Qual é a razão entre as quantidades de calorias gastas ao cavalgar e ao correr?

b) Qual é a razão entre as quantidades de calorias ao ficar sentado e ao jogar basquetebol?

c) As razões obtidas nas duas alíneas anteriores formam uma proporção?

d) Qual é a razão entre as quantidades de calorias gastas ao ficar sentado e ao nadar?

e) Qual é a razão entre as quantidades de calorias gastas ao nadar e ao correr?

f) As razões obtidas nas duas alíneas anteriores formam uma proporção?

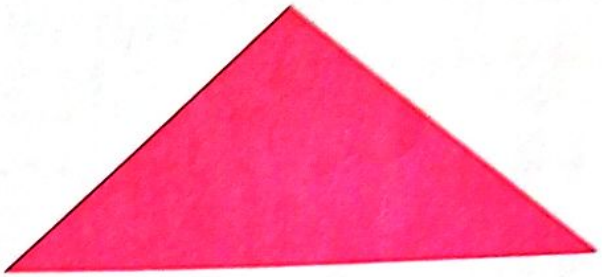
2. Construa uma figura homotética a um triângulo equilátero, cujo centro de homotetia é um ponto exterior ao triângulo e cuja razão é igual a:

a) -2;

b) 2.

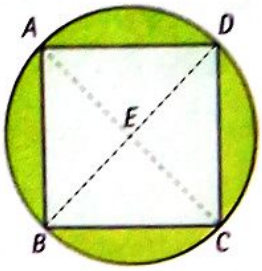
3. Para cada alínea, construa uma figura semelhante de acordo com a razão de semelhança indicada.

a)



$r = -\frac{1}{3}$

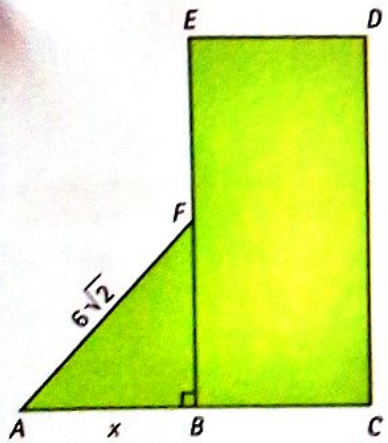
b)



$r = 2$

4. Dois triângulos equiláteros são semelhantes? Porquê?

5. Dois triângulos isósceles quaisquer são semelhantes? Porquê?



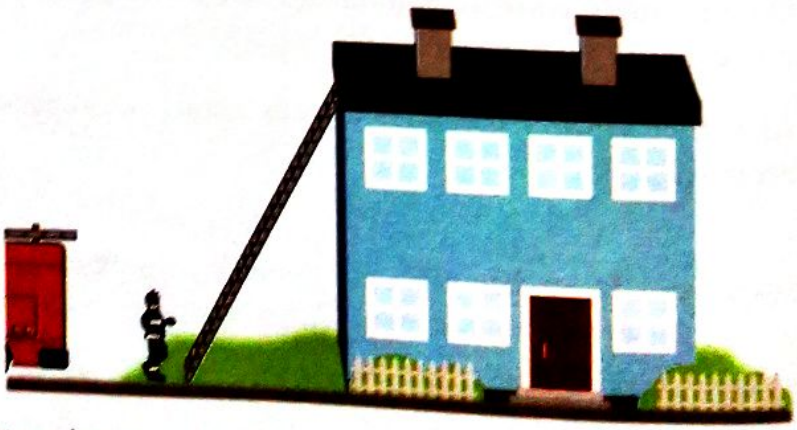
6. Na figura ao lado, $\overline{AB} = \overline{BC}$ e F é ponto médio do lado $[BE]$. As medidas estão em centímetros.

Determine:

a) a medida $x = \overline{AB} = \overline{BF}$ indicada na figura.

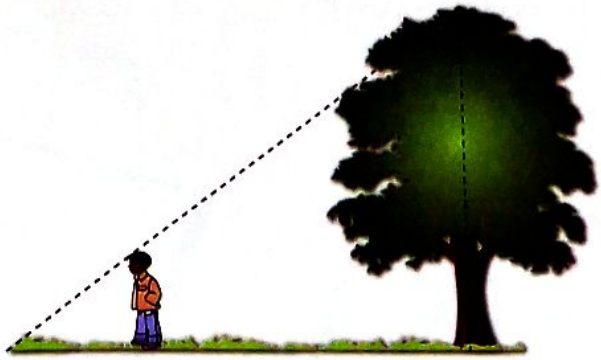
b) a área do rectângulo $[BCDE]$.

7. A figura mostra um edifício que tem 15 metros de altura com uma escada colocada a 8 metros da sua base, ligada ao topo do edifício.



Determine o comprimento da escada que o bombeiro tem que subir.

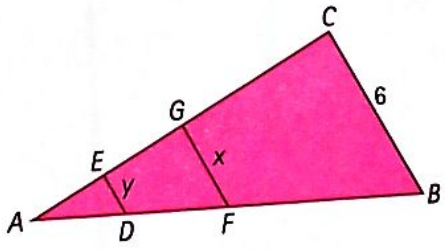
8. **Numa visita de estudo, o João reparou que a sua sombra mede 2 metros e que, no mesmo instante, a sombra de uma árvore próxima dele mede 7,2 metros.**



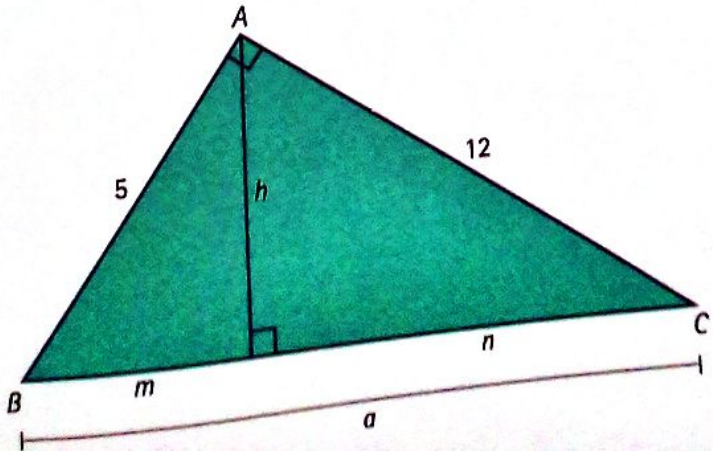
Sabendo que a altura do João é de 1,5 metros, determine a altura da árvore.

9. **Determine os valores de x e y na figura sabendo que:**

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad [ED] \,//\, [GF] \,//\, [CB] .$$



10. **Determine os elementos a, h, m e n no triângulo rectângulo seguinte.**



9 ÁREAS E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

1. POLIEDROS

2. PRISMAS

3. PIRÂMIDES

4. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

ÁREAS E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

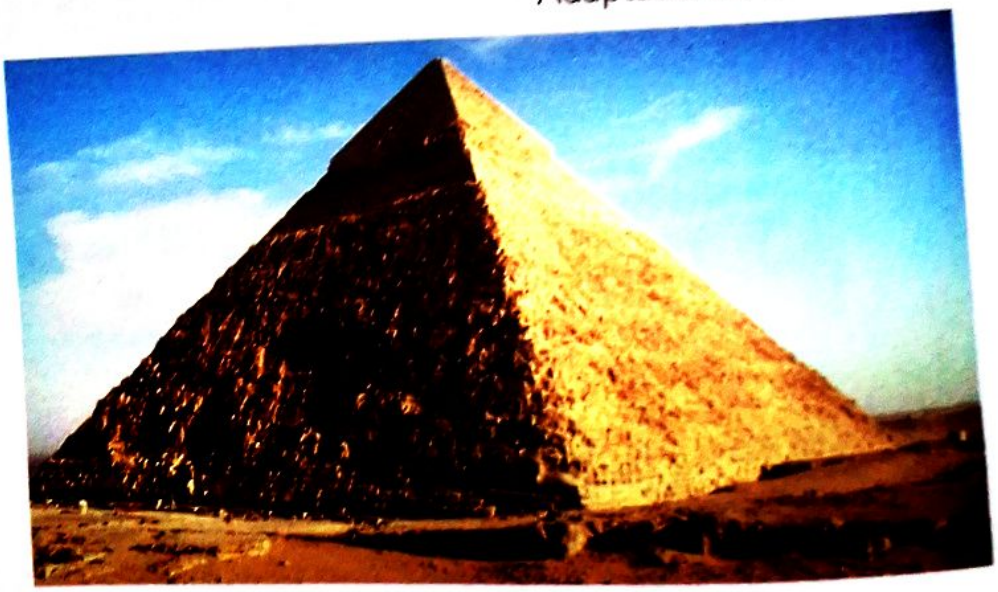
1. Poliedros

1.1. Noção e classificação de poliedros

O maior sólido geométrico construído pelo Homem é a **Grande Pirâmide do Egipto** e foi construído há mais de 4 mil anos. Esta construção é uma das **sete maravilhas do Mundo** que chegou quase intacta aos nossos dias.

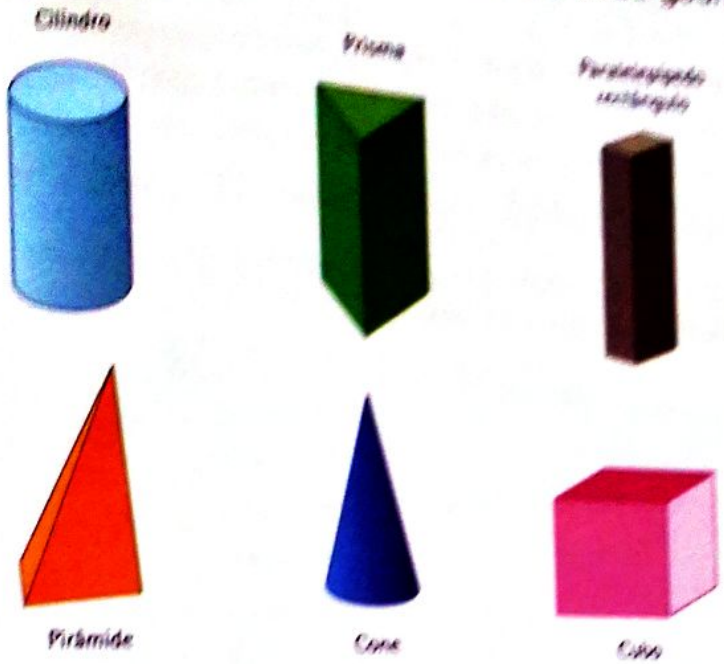
Os egípcios construíram cerca de 80 estruturas do tipo desta pirâmide, que é a maior de todas. Ela é comparável, em altura, a um prédio de 40 andares e cobre uma área de mais de 520 decâmetros quadrados. Foi feita com mais de 2 milhões de blocos de pedra, pesando cada um deles entre 2 e 150 toneladas.

Adaptado de H. Jacobs, *Geometry*



No nosso quotidiano, deparamo-nos com objectos que nos fazem lembrar sólidos geométricos.

Na figura seguinte podemos observar os sólidos geométricos já estudados.



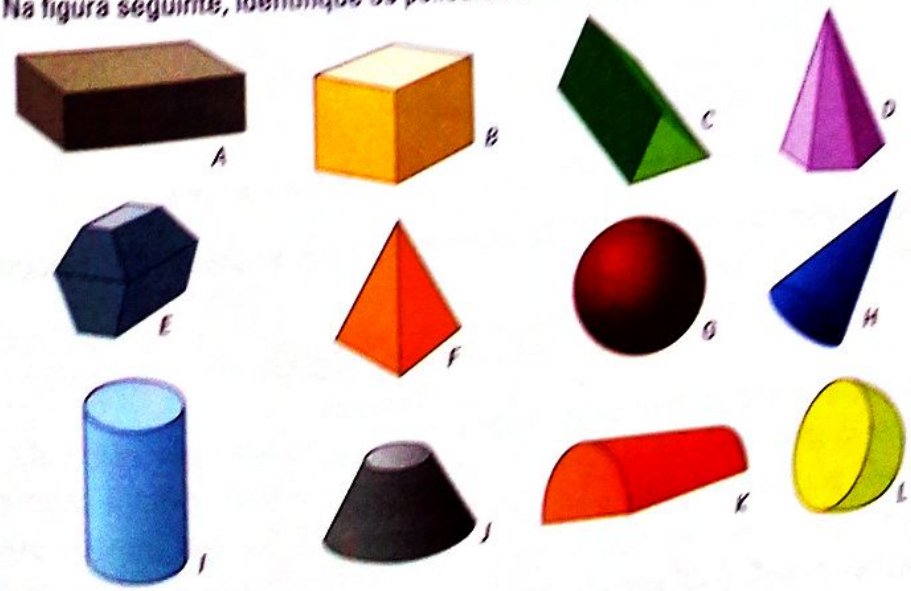
Existem sólidos limitados apenas por superfícies planas, outros limitados apenas por superfícies curvas e, ainda, outros limitados por superfícies planas e curvas.

De acordo com a sua superfície, os sólidos classificam-se em **poliedros** e **não-poliedros**.

Os poliedros são sólidos geométricos limitados apenas por superfícies planas.

EXEMPLO:

Na figura seguinte, identifique os poliedros e os não-poliedros.



Resolução

Poliedros: *A*, *B*, *C* (prismas), *D*, *F* (pirâmides) e *E*;

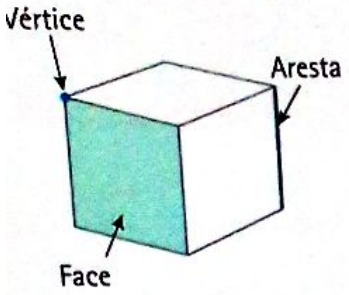
Não-poliedros: *I* (cilindro), *G* (esfera), *H*, *J*, *K* e *L*.

Os elementos de um poliedro são as **faces**, as **arestas** e os **vértices**, tais que:

– as **faces** são as figuras planas que limitam o sólido;

– as **arestas** são os segmentos de recta que limitam as faces;

– os **vértices** são os pontos de encontro das arestas.



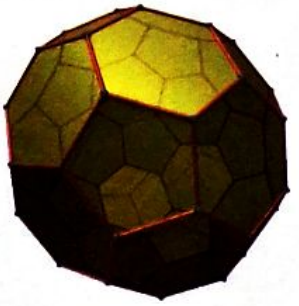
Um cubo, por exemplo, tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.

As faces de um poliedro são polígonos que têm nomes especiais conforme o seu número de lados.

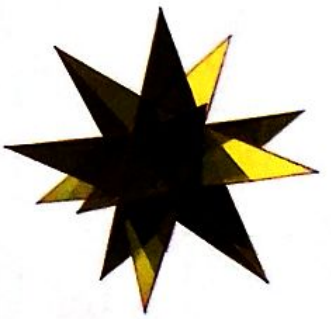
Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono

OBSERVAÇÃO:
No final do livro, encontram-se planificações de alguns sólidos geométricos que lhe permitirá uma melhor consolidação dos conteúdos abordados nesta unidade.

Observando os poliedros da figura seguinte verifica-se que o primeiro sólido geométrico, ao contrário do segundo, fica totalmente do mesmo lado do plano que contém qualquer uma das suas faces. Neste caso, o poliedro diz-se **convexo**, caso contrário, designa-se por **côncavo**.



Poliedro convexo



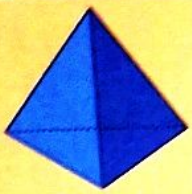
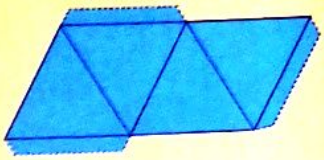
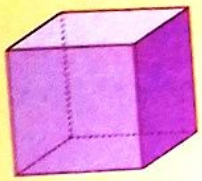
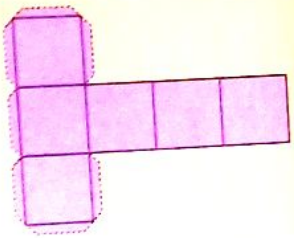
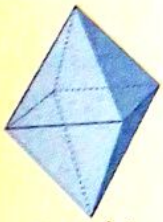
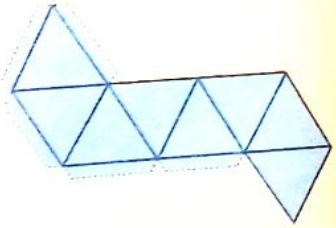
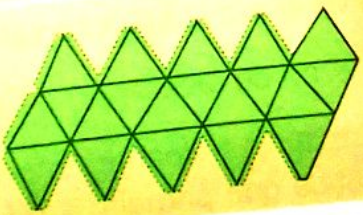
Poliedro côncavo

Os poliedros convexos possuem nomes especiais de acordo com o seu número de faces.

Número de faces	Classificação
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
12	Dodecaedro
20	Icosaedro

Um poliedro convexo diz-se regular se todas as suas faces são polígonos regulares geometricamente iguais nos quais em cada um dos seus vértices, encontra-se o mesmo número de arestas.

Na tabela seguinte encontram-se os cinco poliedros regulares existentes com a respectiva planificação.

Poliedro regular	Planificação
 Tetraedro	
 Cubo ou Hexaedro	
 Octaedro	
Dodecaedro	
Icosaedro	

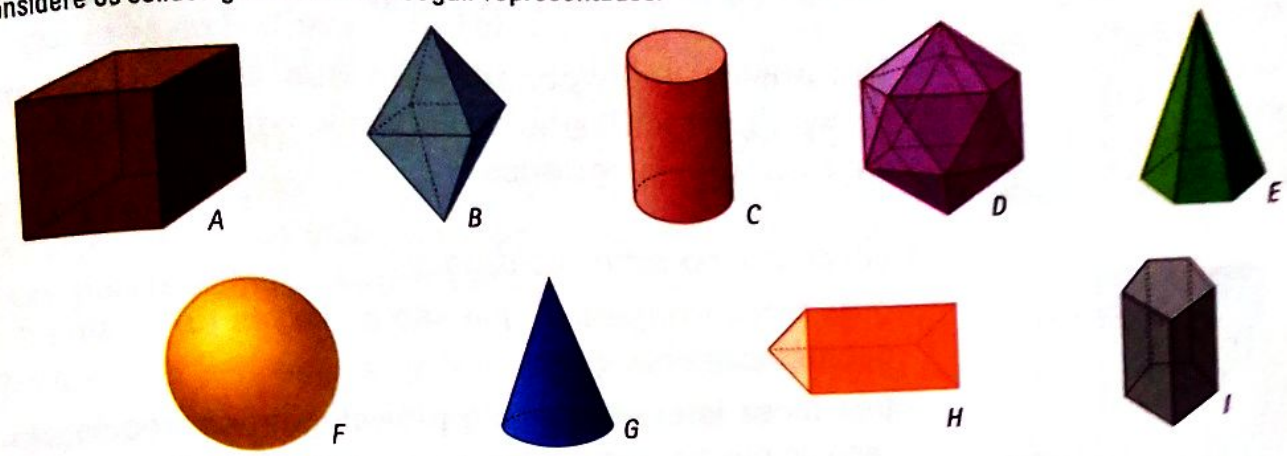
UM POUCO DE HISTÓRIA...

Em 1597, os poliedros regulares inspiraram Kepler, astrónomo alemão do século XVIII no estudo do movimento dos seis planetas conhecidos (Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno). Kepler imaginou um modelo do Sistema Solar composto por esferas concêntricas separadas umas das outras por um cubo, um tetraedro, um dodecaedro, um octaedro e um icosaedro.

Os poliedros regulares são também conhecidos por **sólidos platónicos**. Platão, filósofo grego do século II a. C., concebia o mundo como sendo constituído por quatro elementos básicos: a Terra, o Fogo, o Ar e a Água. Numa associação cheia de misticismo, Platão fez corresponder o cubo à **Terra**, o tetraedro ao **Fogo**, o octaedro ao **Ar** e o icosaedro à **Água**. O quinto sólido, o dodecaedro, foi considerado por Platão como símbolo do **Universo**.

Exercício n.º 2

1. Considere os sólidos geométricos a seguir representados.



Indique, pela letra correspondente, aqueles que:

a) são poliedros;

b) são não-poliedros;

c) têm igual número de faces planas;

d) têm igual número de vértices;

e) têm igual número de arestas;

f) têm igual número de faces.

2. Poderá existir:

a) um prisma com sete faces?

b) um prisma em que as faces sejam todas triangulares?

c) uma pirâmide com um número ímpar de arestas?

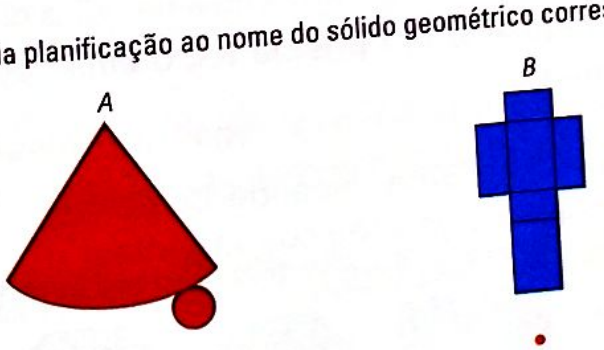
3. Qual é o nome:

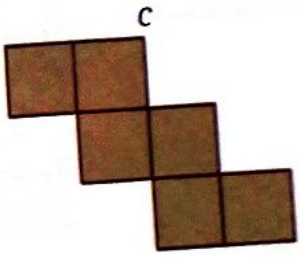
a) do prisma que tem 12 vértices?

b) da pirâmide que tem 9 vértices?

c) de um prisma com 15 arestas?

4. Ligue cada planificação ao nome do sólido geométrico correspondente.





Cubo

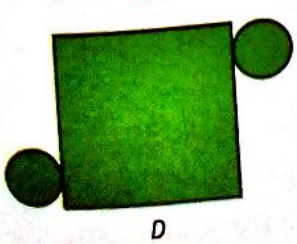
Pirâmide hexagonal

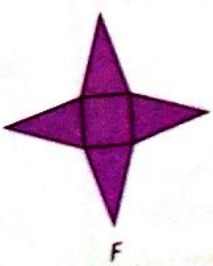
Cilindro

Pirâmide quadrangular

Paralelepípedo

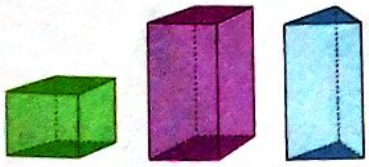
Cone



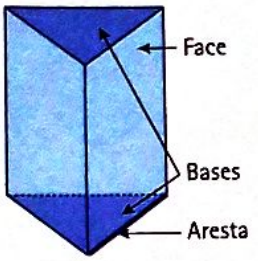


2. Prismas

2.1. Noção e classificação de um prisma



Um prisma é um poliedro em que as bases são dois polígonos geometricamente iguais e paralelos e as faces laterais são paralelogramos.



Num prisma podemos considerar:

- duas faces triangulares que são as **bases do prisma** e são geometricamente iguais;
- três **faces laterais** que são paralelogramos (rectângulo no caso do prisma recto) e formam a **superfície lateral**;
- os lados das bases são as **arestas das bases** e as restantes arestas são as **arestas laterais**.

Num prisma, o número de faces laterais é igual ao número de arestas das bases.

Prisma recto

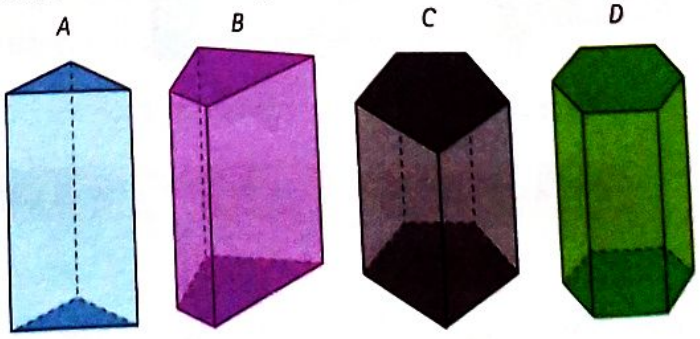
Prisma oblíquo

Um prisma recto é um prisma em que as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases e as faces laterais são sempre rectângulos. Caso contrário, o prisma diz-se oblíquo.

Se as bases são polígonos regulares, então trata-se de um **prisma regular**. Quando tal acontece, as faces laterais são todas geometricamente iguais.

Um prisma regular é um prisma recto cujas bases são polígonos regulares.

A classificação do prisma depende do polígono da base. Relativamente aos sólidos geométricos seguintes:



podemos dizer que:

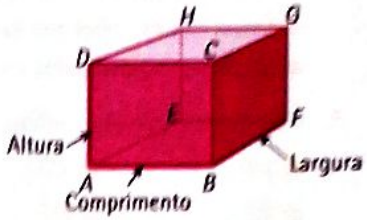
A: Prisma triangular (as bases são triângulos);
B: Prisma quadrangular (as bases são quadriláteros);
C: Prisma pentagonal (as bases são pentágonos);
D: Prisma hexagonal (as bases são hexágonos).

2 Paralelepípedo e cubo

No dia-a-dia encontramos vários exemplos de paralelepípedos: uma caixa de fósforos, uma caixa de sapatos, um livro, uma coluna sonora, uma gaveta, uma mala, um tijolo, etc.

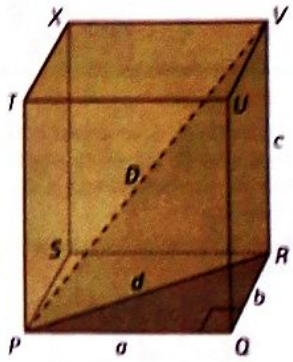
Um paralelepípedo é um prisma em que todas as faces são paralelogramos.

Um prisma recto cujas bases são rectângulos designa-se por paralelepípedo rectângulo.



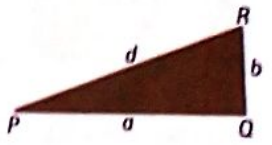
Em qualquer paralelepípedo rectângulo verifica-se que:

- as seis faces são rectângulos geometricamente iguais e paralelos dois a dois;
- as arestas que têm um vértice comum são perpendiculares duas a duas;
- o comprimento, a largura e a altura são as três dimensões do paralelepípedo.



Consideremos o paralelepípedo representado ao lado, onde:

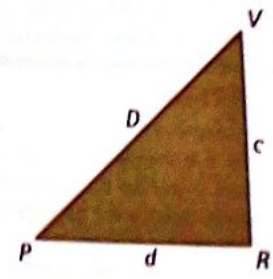
- d designa-se por **diagonal facial** tal que, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[QPR]$, $d^2 = a^2 + b^2$;
- D designa-se por **diagonal espacial** ou simplesmente **diagonal** e trata-se de um segmento de recta cujas extremidades são dois vértices do paralelepípedo que não pertencem à mesma face.



Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[PRV]$ vem que:

$\overline{PV}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RV}^2 \iff D^2 = d^2 + c^2 \iff D^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

O quadrado da diagonal de um paralelepípedo rectângulo é igual à soma dos quadrados das suas três dimensões.



EXEMPLOS:

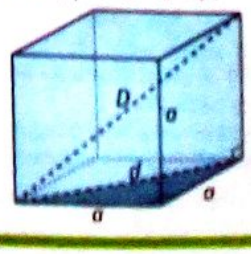
1. Sabendo que as dimensões a, b e c de um paralelepípedo são tais que $a = 2b$, $c = 3b$ e $D = 2\sqrt{7}$ cm, calcula a, b e c.
2. Sabendo que a diagonal de um cubo mede 24 dm, calcula a medida da aresta.

Resolução

1. Como $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, então:
   $(2\sqrt{7})^2 = (2b)^2 + b^2 + (3b)^2 \iff 28 = 4b^2 + b^2 + 9b^2$
   $\iff 28 = 14b^2 \iff b^2 = 2 \iff b = \sqrt{2}$ cm.
   Assim, $a = 2\sqrt{2}$ cm, $b = \sqrt{2}$ cm e $c = 3\sqrt{2}$ cm.
2. Como $D^2 = 3a^2$, então $3a^2 = 24^2 \iff 3a^2 = 576 \iff a^2 = \frac{576}{3}$
   $\iff a = \sqrt{192} \iff a = 8\sqrt{3}$ dm.

OBSERVAÇÃO:

No caso particular do cubo, $D^2 = 3a^2$, pois $a = b = c$.



Exercício n.º 3

1. a) Copie e complete a tabela seguinte.

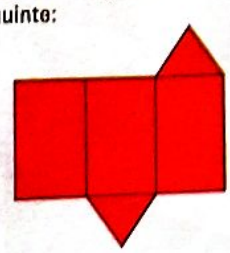
Prisma	Triangular	Quadrangular	Pentagonal	Hexagonal	Heptagonal
N.º de lados do polígono da base					
N.º de faces					

b) Que relação existe entre o número de faces do prisma e o número de lados do polígono da base?

2. Considere um prisma pentagonal regular.
   a) Quais são os polígonos das bases do prisma?
   b) Quantas faces, arestas e vértices tem o prisma?
   c) Quais são os polígonos das faces laterais do prisma?
   d) As faces laterais podem ser triângulos?

3. Observe o paralelepípedo rectângulo representado ao lado e calcule:
   a) $\overline{HD}$; b) $\overline{CD}$; c) $\overline{FG}$; d) $\overline{BD}$;
   e) $\overline{BE}$; f) $\overline{AE}$; g) $\overline{BH}$; h) $\overline{CF}$.

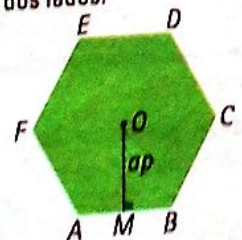
OBSERVAÇÃO:
O cálculo da área lateral e da área total de um sólido simplifica-se se planificarmos a sua superfície.
Área total do prisma triangular seguinte:



$A_\ell = 3A_{\blacksquare}$ e $A_b = 2A_{\blacktriangle}$

$A_T = A_\ell + A_b = 3A_{\blacksquare} + 2A_{\blacktriangle}$

OBSERVAÇÃO:
O **apótema** de um polígono regular é o segmento de recta que une o centro do polígono ao ponto médio de qualquer um dos lados.



[OM] é um apótema do hexágono [ABCDEF].
A área de um polígono regular é dada pela seguinte expressão:

$$A = \frac{P}{2} \times ap$$

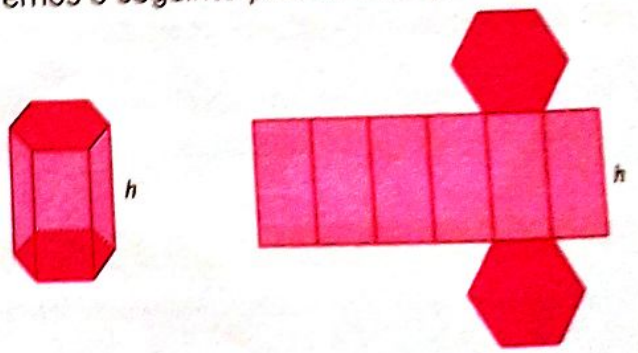
2.3. Áreas e volumes de prismas

A área de um sólido geométrico é a soma das áreas das superfícies planas ou curvas que o limitam.

A área lateral (A_ℓ) de um sólido é a área da sua superfície lateral.

A área total (A_T) de um sólido é a soma da área lateral com a área da(s) base(s).

Consideremos o seguinte prisma hexagonal e sua planificação.



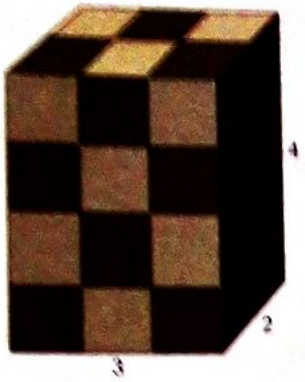
Área lateral do prisma recto: $A_\ell = P_b \times h$

Área da base de um polígono regular: $A_b = \frac{P_b}{2} \times ap$

Área total $A_T = A_\ell + 2A_b = P_b \times h + 2 \times \frac{P_b}{2} \times ap = P_b \times (h + ap)$

A área total de um prisma regular é igual ao produto do perímetro da base pela soma da altura com o apótema da base, isto é:

$$A_T = P_b \times (h + ap) .$$

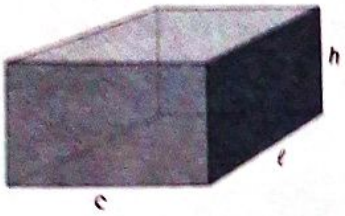


Num paralelepípedo rectângulo em que $c = 3$ cm, $\ell = 2$ cm e $h = 4$ cm, podemos obter $3 \times 2 \times 4$ cubos com $1\ \text{cm}^3$ cada um, por isso, o volume do paralelepípedo é:

$$V = 3 \times 2 \times 4 \times 1 = 24\ \text{cm}^3$$

No caso geral, para qualquer paralelepípedo rectângulo, a área da base é $A_b = c \times \ell$, pelo que o seu volume será:

$$V = c \times \ell \times h$$



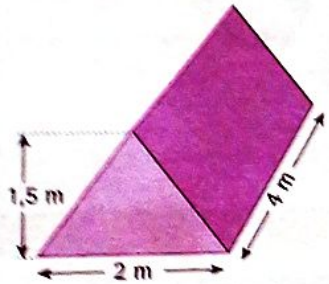
No caso particular em que o paralelepípedo é um cubo, $c = \ell = h$, pelo que,

$$V = h \times h \times h,$$

ou seja,

$$V = h^3.$$

O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela sua altura, ou seja, $V = A_b \times h$.



EXEMPLO:

Calcule o volume do prisma triangular representado ao lado.

Resolução

Como $A_b = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times 1{,}5}{2} = 1{,}5\ \text{m}^2$, então $V = A_b \times h = 1{,}5 \times 4 = 6\ \text{m}^3$.

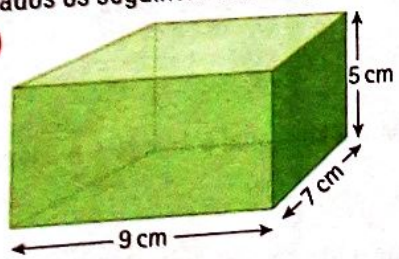
Exercício n.º 5

1. Um cubo metálico com 12 cm de aresta foi fundido e com a mesma matéria formou-se um paralelepípedo rectângulo com 16 cm de comprimento e 9 cm de largura. Calcule a altura do paralelepípedo.

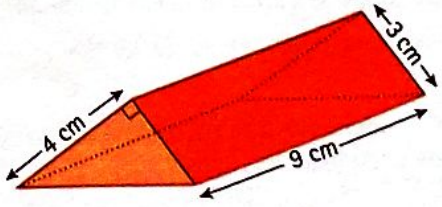
2. Calcule o volume de um paralelepípedo rectângulo em que a, b e c são as suas dimensões em centímetros.
   a) $a = 3$, $b = 6$ e $c = 8$ b) $a = 3k$, $b = 2k$ e $c = 5k$, com $k > 0$ c) $a = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$ e $c = 5$

3. Calcule o volume de um prisma hexagonal regular com $4\sqrt{3}$ cm de altura e que tem $144\ \text{cm}^2$ de área lateral.

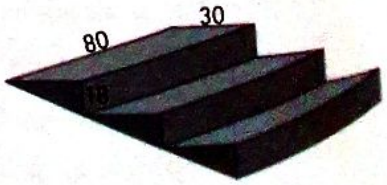
4. Dados os seguintes sólidos geométricos, determine os seus volumes.
   a)



   b)



5. Na figura estão representados três degraus de uma escada de cimento. Cada degrau é um prisma triangular com as dimensões indicadas em centímetros.

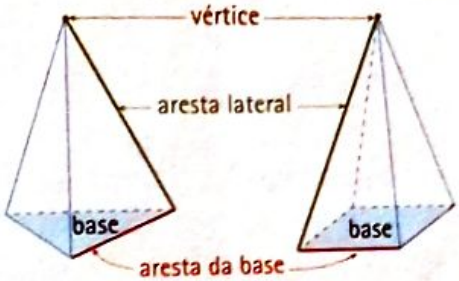


   a) Qual é o volume de cada degrau?
   b) Se a escada tiver 18 degraus, qual é o volume de cimento necessário para construir a escada?
   c) Se os degraus tivessem 1 m de comprimento, em vez dos 80 cm, que quantidade de cimento seria necessária para uma escada com 18 degraus?

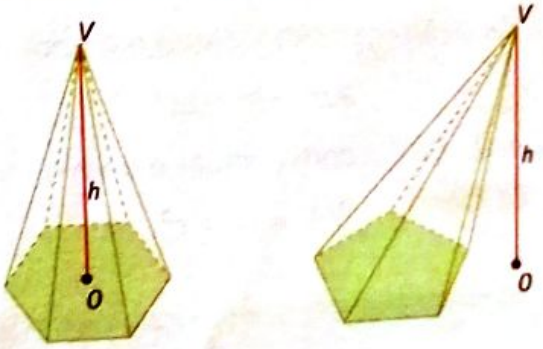
3. Pirâmides

3.1. Noção e classificação de uma pirâmide

Uma pirâmide é um poliedro em que uma das faces (a base) é um polígono qualquer e as restantes (faces laterais) são triângulos que têm um vértice comum (o vértice da pirâmide).



Na figura seguinte, indicam-se os segmentos $[VO]$, cujas medidas são as alturas das duas pirâmides.



Numa pirâmide recta:

- as arestas da base são iguais, assim como as arestas laterais;
- as faces laterais são triângulos isósceles geometricamente iguais;
- a altura é a distância do vértice ao centro da base.

As pirâmides classificam-se de acordo com a forma da respectiva base, como vimos nos prismas.

pirâmide triangular

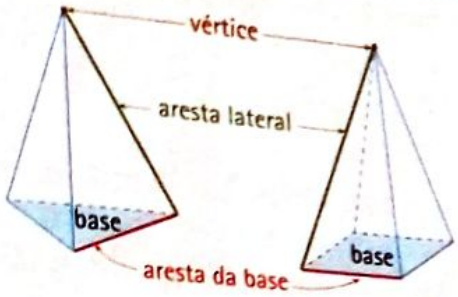
pirâmide quadrangular

pirâmide hexagonal

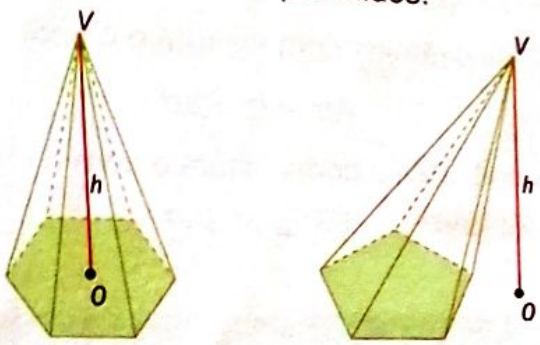
3. Pirâmides

3.1. Noção e classificação de uma pirâmide

Uma pirâmide é um poliedro em que uma das faces (a base) é um polígono qualquer e as restantes (faces laterais) são triângulos que têm um vértice comum (o vértice da pirâmide).



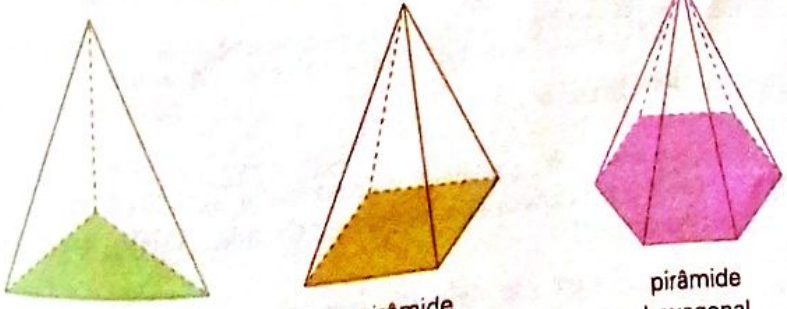
Na figura seguinte, indicam-se os segmentos $[VO]$, cujas medidas são as alturas das duas pirâmides.



Numa pirâmide recta:

- as arestas da base são iguais, assim como as arestas laterais;
- as faces laterais são triângulos isósceles geometricamente iguais;
- a altura é a distância do vértice ao centro da base.

As pirâmides classificam-se de acordo com a forma da respectiva base, como vimos nos prismas.

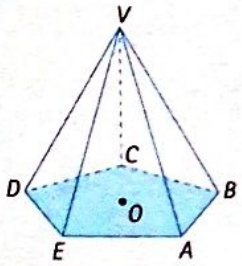


pirâmide triangular

pirâmide quadrangular

pirâmide hexagonal

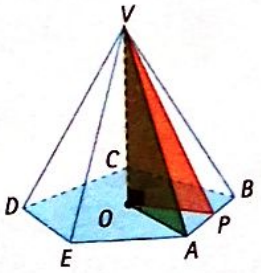
3.2. Áreas e volumes de pirâmides

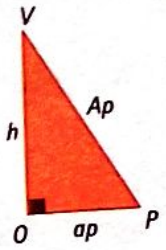


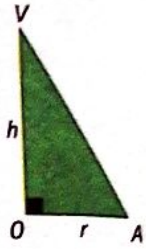
Consideremos a pirâmide hexagonal representada ao lado.

Sendo P o ponto médio de uma aresta da base da pirâmide regular de vértice V e centro de base O:

- $\overline{OP}$ é a medida do apótema da base representada por ap;
- $\overline{VP}$ é a medida do apótema da pirâmide representada por Ap e é a altura da face lateral a que pertence.







O Teorema de Pitágoras permite relacionar:

– o apótema da pirâmide com a altura e o apótema da base:

$$Ap^2 = h^2 + ap^2$$

– a aresta lateral, $[VA]$, com a altura e com o raio da base, r:

$$\overline{VA}^2 = h^2 + r^2$$

EXEMPLO:

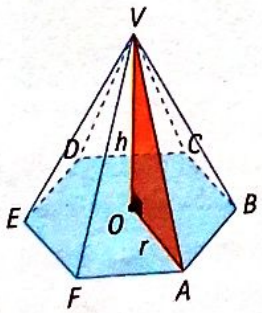
A aresta da base e a altura de uma pirâmide hexagonal regular medem, respectivamente, 10 cm e 24 cm.

Sabendo que num hexágono regular de lado ℓ, raio r e apótema ap, temos $r = \ell$ e $ap = \sqrt{3}\ell$, calcule:

a) a medida da aresta lateral;

b) as medidas do apótema da base e do apótema da pirâmide.

Resolução



a) Consideremos a pirâmide hexagonal regular representada ao lado.

Atendendo a que $r = \ell = 10$ cm,

$$\overline{VA}^2 = h^2 + r^2 \iff \overline{VA}^2 = 24^2 + 10^2 \iff \overline{VA}^2 = 676$$

pelo que, $\overline{VA} = 26$ cm.

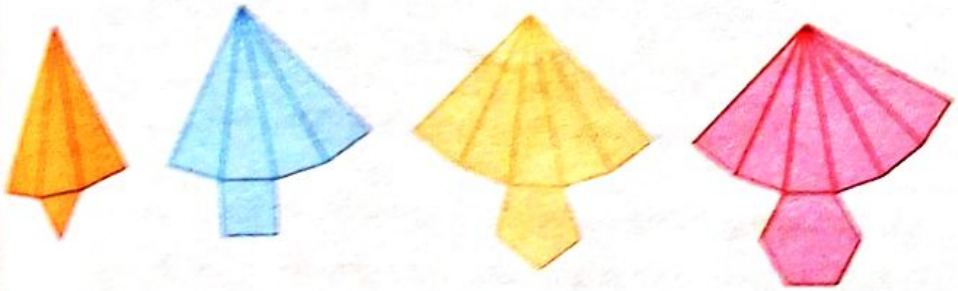
b) Sabendo que $r = \ell = 10$, o apótema da base mede $ap = 10\sqrt{3}$ cm. O apótema da pirâmide é a hipotenusa do triângulo rectângulo $[VOP]$, em que P é o ponto médio de $[AB]$:

$$Ap^2 = h^2 + ap^2 \iff Ap^2 = 24^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2 \iff Ap^2 = 876$$

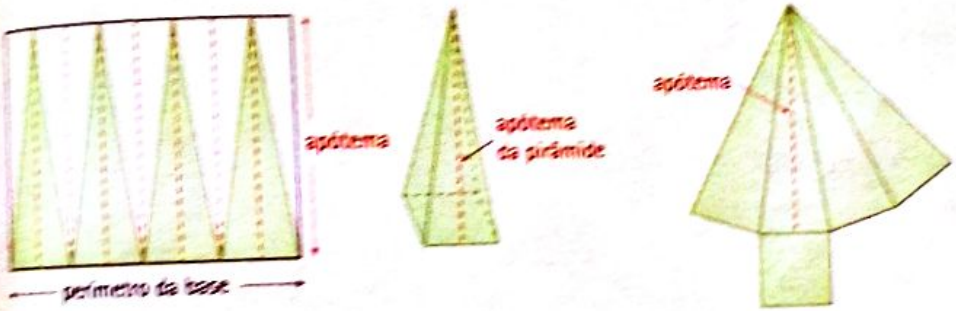
pelo que, $Ap = \sqrt{876} \approx 29{,}6$ cm.

Para calcular a **área total** de uma pirâmide regular podemos recorrer à sua planificação.

Na figura seguinte estão várias planificações de pirâmides.



A área lateral da pirâmide é a soma das áreas das suas faces laterais que são triângulos isósceles geometricamente iguais. A altura destes triângulos é o apótema da pirâmide.



A área lateral da pirâmide é metade do produto do perímetro da base da pirâmide pelo seu apótema:

$$A_l = \frac{P_b}{2} \times ap$$

A área total da pirâmide é igual à soma da área lateral com a área da base:

$$A_T = A_l + A_b$$

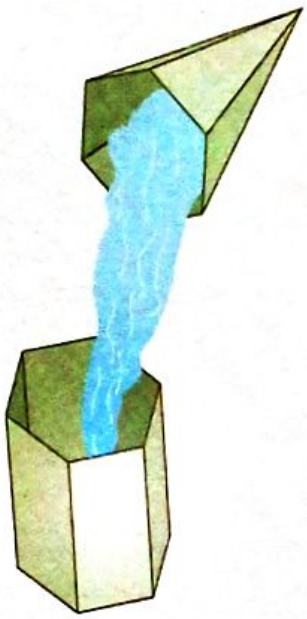
EXEMPLO:

Calcule a área total da seguinte pirâmide cujas medidas estão em centímetros.

$A_b = 5 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$

$A_l = 4 \times \frac{5 \times 9}{2} = 4 \times 22{,}5 = 90 \text{ cm}^2$

$A_T = A_l + A_b = 90 + 25 = 115 \text{ cm}^2$



Consideremos, um prisma e uma pirâmide, com a mesma altura e bases iguais. Se a pirâmide estiver cheia de água, e a virarmos para dentro do prisma, para a enchermos completamente, é necessário repetir esta operação três vezes.

Assim, o volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma nas condições referidas, ou seja:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad V_{\text{prisma}} = \frac{1}{3} \times A_b \times h .$$

O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela sua altura, ou seja, $V = \frac{1}{3} \times A_b \times h$.

EXEMPLO:

Calcule o volume da seguinte pirâmide representada ao lado.

Resolução

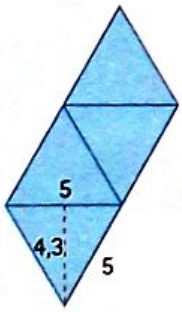
$A_b = 5 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \times 25 \times 8{,}7 = 72{,}5 \text{ cm}^3$

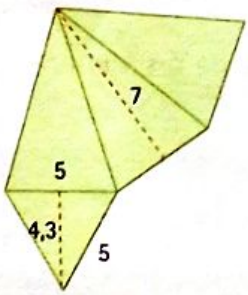
Exercício n.º 6

1. As planificações seguintes representam pirâmides regulares. Calcule a área lateral e a área total de cada uma das pirâmides representadas cujas medidas estão em centímetros.

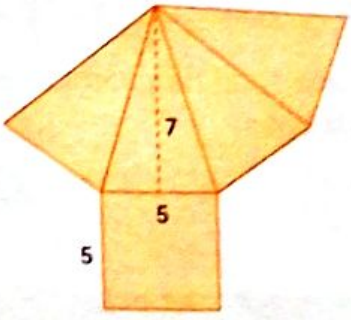
A



B



C



2. Calcule a altura e o apótema de uma pirâmide quadrangular regular em que cada uma das arestas mede 10 cm.

3. Uma pirâmide quadrangular regular tem 10 cm de diagonal da base e 12 cm de altura. Calcule:
   a) o perímetro da base; b) a medida da aresta lateral; c) o apótema da pirâmide.

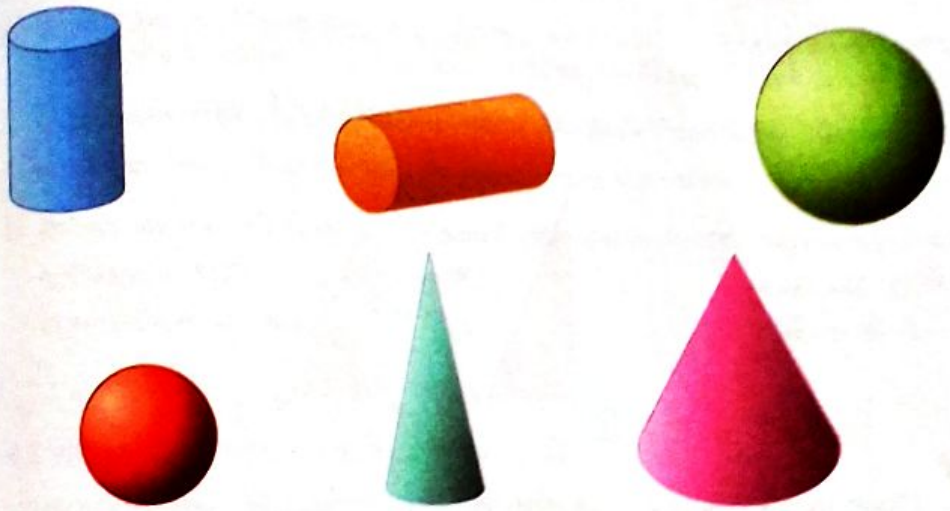
4. A Grande Pirâmide do Egipto é uma pirâmide quadrangular recta regular com 146 metros de altura e em que o comprimento do lado da base é, aproximadamente, 230 metros.
   Qual o volume aproximado desta pirâmide?

5. Calcule a altura de uma pirâmide com 32 cm^3 de volume e 16 cm^2 de área da base.

4. Sólidos de revolução

4.1. Noção de sólidos de revolução

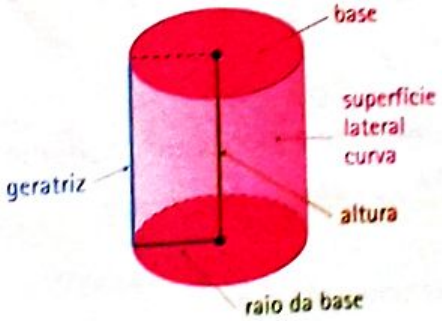
Depois do estudo de sólidos limitados exclusivamente por superfícies planas denominados por poliedros, estudaremos os sólidos que são limitados parcial ou totalmente por superfícies curvas, ou seja, os **não-poliedros**, como é o caso dos cilindros, dos cones, das esferas, etc.



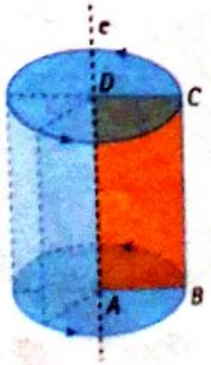
4.1.1. Cilindros

Uma lata de leite, um rolo de películas fotográficas, um tubo de comprimidos são alguns modelos de cilindros.

Os elementos de um cilindro recto são os seguintes:



Consideremos o rectângulo $[ABCD]$ e o eixo de rotação AD. Quando o rectângulo roda em torno do eixo até dar uma volta completa, descreve no espaço um sólido de revolução que é um **cilindro circular recto** ou, simplesmente, **cilindro de revolução**. As bases são círculos e o segmento $[BC]$ – **geratriz** – é perpendicular às bases.



UM POUCO DE HISTÓRIA...

Arquimedes de Siracusa (287-212 a. C.) foi um dos mais importantes cientistas e matemáticos da Antiguidade e de todos os tempos.
Arquimedes fez descobertas importantes em geometria e matemática, como, por exemplo, um método para calcular o número π utilizando séries. Obteve as fórmulas da área e do perímetro do círculo, do volume do cone, do cilindro e da esfera, referindo-os no tratado "Sobre a esfera e o cilindro".
Arquimedes pediu para que no seu túmulo fosse esculpida uma representação de uma esfera inscrita num cilindro.

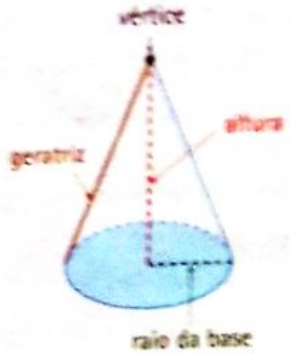
Arquimedes de Siracusa (287-212 a. C.)

OBSERVAÇÃO:

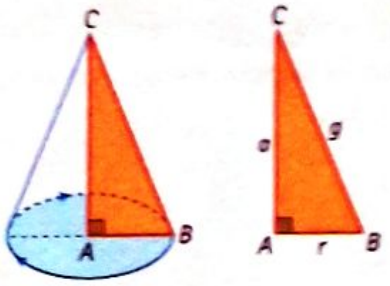
Apenas os cilindros rectos são cilindros de revolução, pois a geratriz é perpendicular às bases do cilindro gerando toda a superfície lateral. Neste caso, a sua altura é igual ao comprimento da geratriz.

4.1.2. Cones

Os elementos de um cone recto são:



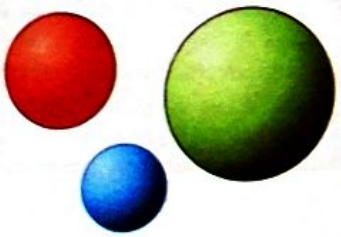
Consideremos o triângulo $[ABC]$ rectângulo em A.



Quando o triângulo roda em torno do eixo AC até completar uma volta, gera no espaço um sólido de revolução que é um **cone circular recto** ou, simplesmente, **cone de revolução**. A base é um círculo de raio $[AB]$ e todas as geratrizes são geometricamente iguais a $[BC]$.

O Teorema de Pitágoras permite relacionar as medidas da geratriz (g), do raio da base (r) e da altura (h) do cone tal que:

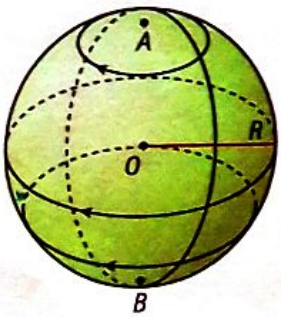
$$g^2 = h^2 + r^2 .$$



4.1.3. Esferas

Uma bola de futebol, um globo, um berlinde são exemplos do dia-a-dia de **esferas**.

Tal como a circunferência limita um círculo, uma esfera é limitada por uma superfície esférica.



Dado o ponto O e um comprimento R na figura representada ao lado:

- a **superfície esférica** de centro O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é igual a R;
- a **esfera** de centro O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a R.

Consideremos um semicírculo de diâmetro $[AB]$ e centro O representados na figura. Quando o semicírculo roda em torno do eixo AB até completar uma volta, gera no espaço um sólido de revolução que é uma **esfera**. A semicircunferência correspondente gera a superfície esférica que limita a esfera.

Exercício n.º 7

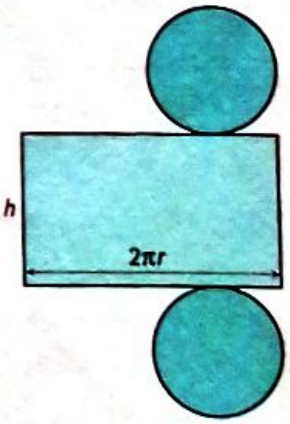
1. Um cilindro de revolução é gerado por um rectângulo com $36\ cm^2$ de área. Sabendo que a área de cada uma das bases do cilindro mede $28{,}26\ cm^2$, calcule o raio da base e a altura do cilindro.
2. Um triângulo rectângulo em que a hipotenusa mede $13\ cm$ e um dos catetos mede $5\ cm$, roda em torno do cateto maior e gera um cone. Calcule as medidas do raio da base, da geratriz e a altura do cone.
3. a) Calcule a área da base de um cone em que a altura mede $12\ cm$ e a geratriz $13\ cm$.
   b) Indique o conjunto dos pontos do espaço que distam não mais que $8\ cm$ de um ponto P.
4. Indique qual o sólido de revolução gerado por rotação de cada uma das seguintes figuras, em torno do eixo XY:
   a) triângulo $[XYZ]$, rectângulo em Y;
   b) rectângulo $[XYZW]$;
   c) semicírculo de diâmetro $[XY]$;
   d) triângulo $[XYZ]$, rectângulo em Z.

4.2. Áreas do cilindro, do cone e da esfera

A área total de um cilindro ou de um cone, é igual à soma das áreas da superfície lateral com a área das bases ou da base no caso do cone.

4.2.1. Cilindro

Nos cilindros, as bases são círculos geometricamente iguais de área igual a $2\pi r^2$. A superfície lateral equivale a um rectângulo cujo comprimento é o perímetro da circunferência $(2\pi r)$ e a largura é a altura do cilindro (h).



Área total:

$$A_T = A_\ell + A_b = 2\pi r \times h + 2(\pi r^2) = 2\pi r(h + r)$$

EXEMPLO:

A altura de um cilindro de revolução é o triplo do diâmetro D da base.

a) Calcule a área lateral em função de D.

b) Calcule a área total em função de D.

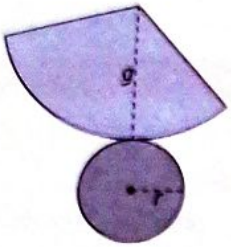
Resolução

a) Seja $r = \frac{D}{2}$ e $h = 3D$, $A_\ell = 2\pi r \times h = 2 \times \pi \times \frac{D}{2} \times 3D = \pi \times D \times 3D = 3\pi D^2$.

b) $A_T = 2\pi r(h + r) = 2\pi \frac{D}{2}\left(3D + \frac{D}{2}\right) = 2\pi \frac{D}{2} \times \frac{7}{2} D = \frac{7}{2}\pi D^2$

4.2.2. Cone

Nos cones, a base é um círculo cuja área é πr^2 e a superfície lateral é um sector circular cujo comprimento do arco é igual ao perímetro da base e o seu raio é a geratriz do cone.



Desta forma:

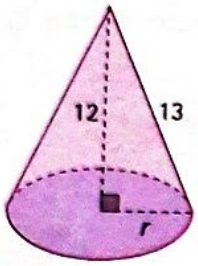
$$A_l = \frac{1}{2} 2\pi r g \iff A_l = \pi r g$$

e

$$A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r (g + r)$$

EXEMPLO:

Sabendo que a geratriz de um cone de revolução tem de comprimento 13 cm e altura igual a 12 cm, calcule a área da base e a área total do cone.



Resolução

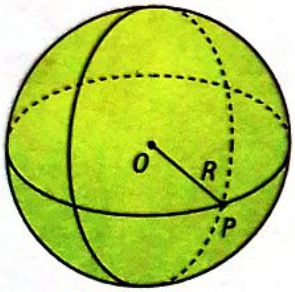
Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo rectângulo da figura ao lado:

$$r^2 + 12^2 = 13^2 \iff r^2 = 169 - 144 \iff r^2 = 25$$

pelo que, $r = 5$ cm.

A área da base é: $A_b = \pi r^2 = 3{,}14 \times 25 = 78{,}5$ cm^2.

A área total é: $A_T = \pi r (g + r) = 3{,}14 \times 5 (13 + 5) = 15{,}7 \times 18 = 282{,}6$ cm^2.

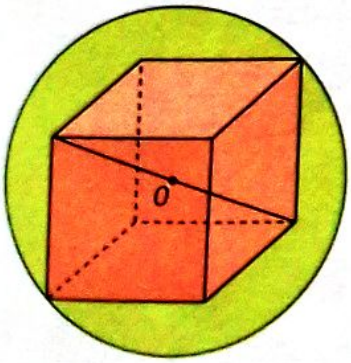


4.2.3. Superfície esférica

Consideremos uma superfície esférica de raio R. A área dessa superfície esférica é quatro vezes a área de um círculo que contém um diâmetro (círculo máximo), isto é:

$$A = 4\pi r^2$$

EXEMPLO:



Uma superfície esférica é gerada pela rotação de uma semicircunferência com 15,7 cm de comprimento, em torno do diâmetro.

a) Calcule a área dessa superfície esférica.

b) Calcule a área de um cubo inscrito na esfera.

Resolução

a) Raio da superfície esférica: $\pi r = 15{,}7 \iff r = \frac{15{,}7}{3{,}14} = 5$ cm

Área da superfície esférica: $A = 4\pi r^2 = 4 \times 3{,}14 \times 5^2 = 314$ cm^2

b) Os vértices do cubo inscrito são pontos da superfície esférica e cada diagonal D do cubo é um diâmetro da esfera. Então, $D = 2 \times 5 = 10$ cm.

Como a área de um cubo de aresta a é $A = 6a^2$ e $D = a\sqrt{3}$, então:

$A = 2D^2 = 2 \times 10^2 = 200$ cm^2

Exercício n.º 8

1. Determine a área lateral e a área total de um cilindro recto em que:
   a) $r = 5$ cm e $h = 12$ cm; b) $r = 0{,}2$ cm e $h = 3{,}5$ cm.

2. a) Calcule a altura de um cilindro com 70π cm² de área lateral e 5 cm de raio de base.
   b) Determine a relação entre a altura e o raio de um cilindro sabendo que a soma das áreas das bases é igual à área lateral.

3. Calcule a área lateral e a área total de um cone em que:
   a) $r = 2$ cm e $g = 6$ cm; b) $r = \sqrt{12}$ cm e $g = \sqrt{27}$ cm.

4. Calcule a área de uma superfície esférica cujo raio mede:
   a) 3 cm; b) $\sqrt{3}$ cm; c) $2a$ cm.

5. Sabendo que a área de um círculo máximo de uma esfera mede 84 cm², calcule a área da superfície esférica correspondente.

4.3. Volume do cilindro, do cone e da esfera

O **volume de um cilindro** é o produto da área da base pela altura:

$$V = A_b \times h, \text{ ou seja, } V = \pi r^2 \times h.$$

O **volume de um cone** é a terça parte do produto da área da base pela altura do cone:

$$V = \frac{1}{3} \times A_b \times h, \text{ ou seja, } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

EXEMPLO:

Um prisma pentagonal tem 628 cm² de área da base e tem o mesmo volume que um cilindro de revolução com o dobro da altura.

a) Calcule o raio da base do cilindro.

b) Calcule o volume de uma pirâmide com a mesma base e a mesma altura do prisma pentagonal, sabendo que a altura do cilindro é 48 cm.

Resolução

a) Seja h a altura do prisma e $2h$ a altura do cilindro.

Volume do prisma: $V = 628 \times h$

Volume do cilindro: $V = \pi r^2 \times 2h = 2\pi r^2 h$

Logo, $2\pi r^2 h = 628h \iff r^2 \approx 100$, pelo que, $r \approx 10$ cm.

b) Como a área da base da pirâmide é 628 cm², a altura é $h = 24$ cm, então:

$$V = \frac{1}{3} \times 628 \times 24 \iff V = 5024 \text{ cm}^3$$

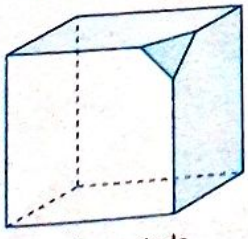
AVALIAÇÃO FORMATIVA 9

1. **Qual das seguintes afirmações é verdadeira?**
   (A) Existe um prisma com 5 faces.
   (B) Existe um prisma com 4 faces.
   (C) Existe uma pirâmide com 9 arestas.
   (D) Existe uma pirâmide com 15 arestas.

2. **Indique as afirmações falsas.**
   (A) Uma pirâmide hexagonal tem 6 vértices.
   (B) Um prisma com 7 faces é um prisma pentagonal.
   (C) Uma pirâmide quadrangular tem 6 faces.
   (D) Um prisma triangular tem 4 faces.

3. **O Hugo e a Lufa estão a reflectir sobre questões de polígonos e de prismas. O Hugo diz que o número mínimo de faces de um prisma é 4 e que o número mínimo de lados de um polígono é 3. A Lufa discorda dizendo que com 4 faces não se consegue construir um prisma.**
   a) Qual dos amigos tem razão?
   b) Qual o número mínimo de arestas que um prisma pode ter?
   c) Qual o número mínimo de vértices?

4. **Verifique que a relação de Euler é válida para os seguintes poliedros.**



cubo cortado

tronco de pirâmide

5. **As dimensões de um paralelepípedo são proporcionais a 3, 4 e 12.**
   Calcule:
   a) as dimensões do paralelepípedo, supondo que a diagonal espacial é igual a 26 cm;
   b) as dimensões do paralelepípedo e a sua diagonal espacial supondo que o volume é igual a $3888\ cm^3$.

6. As medidas das arestas de três cubos são 1, 2 e 3, respectivamente.

a) Calcule a área total de cada cubo.

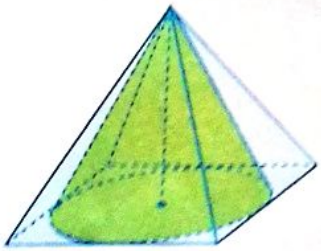
O que acontece à área total de um cubo quando a aresta duplica? E quando a aresta triplica?

b) Calcule o volume de cada cubo.

O que acontece ao volume de um cubo quando a aresta duplica? E quando a aresta triplica?

7. Calcule a área lateral de um prisma regular de base triangular em que a aresta da base e a aresta lateral medem, respectivamente, 3 cm e 12 cm.

8. Calcule a medida da aresta da base de um prisma quadrangular regular com 16 cm de altura e 20 cm de diagonal.



9. A figura ao lado representa um cone de revolução inscrito numa pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede 6 cm e cujo apótema é igual a 9 cm.

Calcule a área lateral do cone.

10. Complete a tabela relativa aos elementos de vários cones de revolução.

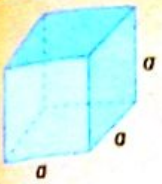
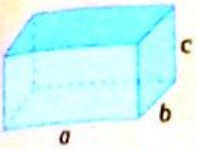
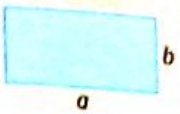
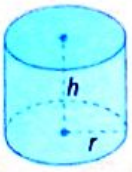
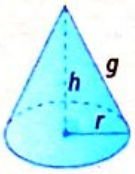
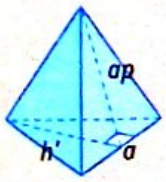
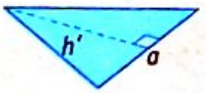
Cones	raio	altura	geratriz	Área lateral	Área total	Volume
A	6	8				
B	5		13			
C	2			12π		
D	5					100π
E		$3k$				πk^3

11. Dada uma esfera de raio r, considere um cilindro de revolução com o mesmo raio e altura igual ao diâmetro da esfera. Calcule:

a) a razão entre o volume do cilindro e o da esfera;

b) a razão entre a área lateral do cilindro e a área da esfera.

ÁREAS E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Sólidos	Bases	Área da base	Área lateral	Área total	Volume do sólido
 Cubo	Quadrado	$A_b = a^2$	$A_l = 4a^2$	$A_T = 6a^2$	$V = A_b \times h$ ou $V = a^3$
 Paralelepípedo rectângulo	 Rectângulo	$A_b = ab$	$A_l = P_b \times c$ ou $A_l = (2a + 2b) \times c$	$A_T = A_l + 2A_b$ ou $A_T = 2(ab + ac + bc)$	$V = A_b \times h$ ou $V = abc$
Prisma triangular	Triângulo	$A_b = \frac{1}{2}ah'$	$A_l = P_b \times h$	$A_T = A_l + 2A_b$ ou $A_T = P \times (h + ap)$	$V = A_b \times h$ ou $V = \frac{1}{2}ah' \times h$
 Cilindro	Círculo	$A_b = \pi r^2$	$A_l = P_b \times h$ ou $A_l = 2\pi r \times h$	$A_T = A_l + 2A_b$ ou $A_T = 2\pi r(h + r)$	$V = A_b \times h$ ou $V = \pi r^2 \times h$
 Cone	Círculo	$A_b = \pi r^2$	$A_l = \frac{P_b}{2} \times g$ ou $A_l = \pi rg$	$A_T = A_l + A_b$ ou $A_T = \pi r(g + r)$	$V = \frac{1}{3}A_b \times h$ ou $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$
 Pirâmide triangular	 Triângulo	$A_b = \frac{1}{2}ah'$	$A_l = \frac{P_b}{2} \times ap$	$A_T = A_l + A_b$	$V = \frac{1}{3}A_b \times h$ ou $V = \frac{1}{6}ah' \times h$
Esfera				$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

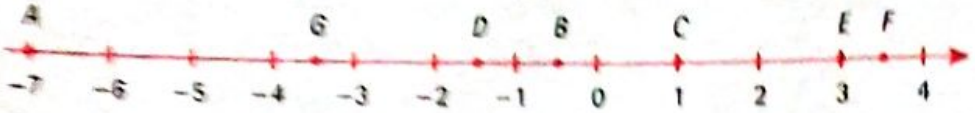
Legenda:

A_b – área da base; A_l – área lateral; A_T – área total; ap – apótema; g – geratriz; h – altura; P_b – perímetro da base; r – raio

Exercício n.º 1

pág. 14

1. $A \rightsquigarrow -4$ $\quad B \rightsquigarrow -1$ $\quad C \rightsquigarrow 2$ $\quad D \rightsquigarrow 4$ $\quad E \rightsquigarrow 6$ $\quad O \rightsquigarrow 0$

2. 

Ordenação dos números: $-7 < -3{,}5 < -1{,}5 < -\frac{1}{2} < 1 < 3 < \frac{7}{2}$

3. a) $]-3\,;\,-2[$ $\quad$ b) $\left\{-\frac{4}{3};\ 0{,}1;\ \frac{1}{2};\ 1{,}3;\ 3{,}5\right\}$ $\quad$ c) $\varnothing$

   d) Conjunto A $\quad$ e) $]-3\,;\,-2[$ $\quad$ f) $\left\{-\frac{4}{3};\ 0{,}1;\ \frac{1}{2};\ 1{,}3;\ 3{,}5\right\}$

4. a) -25 $\quad$ b) $\frac{17}{12}$ $\quad$ c) 18 $\quad$ d) $-\frac{17}{6}$ $\quad$ e) $\frac{8}{15}$ $\quad$ f) $-\frac{5}{6}$

5. a) $-\frac{7}{10}$ $\quad$ b) $\frac{4}{15}$ $\quad$ c) $\frac{11}{30}$ $\quad$ d) $-\frac{47}{12}$ $\quad$ e) $\frac{6}{5}$ $\quad$ f) $-\frac{9}{2}$

6. a) 2 $\quad$ b) -4 $\quad$ c) $\frac{3}{8}$ $\quad$ d) 0 $\quad$ e) 4 $\quad$ f) 2

Exercício n.º 2

pág. 17

1. a) 625 $\quad$ b) 225 $\quad$ c) $0{,}0001$ $\quad$ d) $0{,}0004$ $\quad$ e) $\frac{1}{16}$ $\quad$ f) $\frac{1}{400}$

2. a) $30{,}25\ cm^2$ $\quad$ b) $76{,}5625\ m^2$ $\quad$ c) $2{,}0736\ dm^2$ $\quad$ d) $5{,}0625\ m^2$ $\quad$ e) $90{,}25\ dm^2$ $\quad$ f) $53{,}5824\ mm^2$

3. a) $0{,}9$ $\quad$ b) $0{,}86603$ $\quad$ c) $29{,}799$ $\quad$ d) $14{,}799$ $\quad$ e) $39{,}37$

4. a) $\sqrt{225} = 15$ e $r = 0$; $\quad$ b) $\sqrt{344} = 18$ e $r = 20$; $\quad$ c) $\sqrt{1350} = 36$ e $r = 54$;

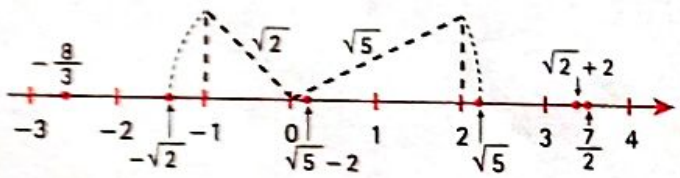
   d) $\sqrt{9025} = 95$ e $r = 0$; $\quad$ e) $\sqrt{347\,325} = 589$ e $r = 404$; $\quad$ f) $\sqrt{634\,215} = 796$ e $r = 599$.

Exercício n.º 3

pág. 19

1. a) Dízima finita $\quad$ b) Dízima infinita não periódica $\quad$ c) Dízima infinita periódica de período igual a 3

   d) Dízima infinita não periódica $\quad$ e) Dízima infinita periódica de período igual a 6

2. 

$$-\frac{8}{3} < -\sqrt{2} < \sqrt{5} - 2 < \sqrt{5} < \sqrt{2} + 2 < \frac{7}{2}$$

3. $A \rightsquigarrow \sqrt{17}$ e $B \rightsquigarrow \sqrt{3}$.

Exercício n.º 4

pag. 22

1. a) $4{,}5144$ $\quad$ b) $4{,}6416$ $\quad$ c) 9 $\quad$ d) $\frac{2}{3}$ $\quad$ e) -4 $\quad$ f) $-\frac{5}{3}$

2. a) $2^{\frac{5}{2}}$ $\quad$ b) $a^{\frac{4}{3}}$ $\quad$ c) $2^{\frac{3}{7}}$ $\quad$ d) b $\quad$ e) a $\quad$ f) 5

3. a) 4 $\quad$ b) 1000 $\quad$ c) $-\frac{5}{4}$

4. a) $4{,}55$ $\quad$ b) $6{,}63$ $\quad$ c) $6{,}28$ $\quad$ d) $10{,}56$ $\quad$ e) $1{,}97$ $\quad$ f) $2{,}16$

Exercício n.º 5

pag. 25

1. a) $\sqrt[3]{1250}$ $\quad$ b) $\sqrt{1800a}$ $\quad$ c) $\sqrt[3]{16x^5}$ $\quad$ d) $\sqrt{a^5b^2}$

2. a) $\sqrt[4]{6}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{2}$ $\quad$ c) $\sqrt[5]{7}$ $\quad$ d) $\sqrt[6]{10y^3}$ $\quad$ e) $\sqrt[4]{5}$ $\quad$ f) $\sqrt[24]{6}$ $\quad$ g) $\sqrt[10]{y}$ $\quad$ h) 4

3. a) $=$ $\quad$ b) $<$ $\quad$ c) $<$ $\quad$ d) $>$ $\quad$ e) $>$ $\quad$ f) $<$ $\quad$ g) $<$ $\quad$ h) $>$

Exercício n.º 6

pág. 29

1. a) $5\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $-5\sqrt{17}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{2}$ f) $-2\sqrt{2}$
   g) 0 h) $3\sqrt{3}$ i) $2\sqrt{5}$
2. a) -13 b) 7 c) -4 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{6}$ f) 6
3. a) $\sqrt{x}$ b) $\frac{2\sqrt{e}+a}{a}$ c) $-\frac{3}{2}(1-\sqrt{3})$
4. a) $15\sqrt[3]{9}$ b) $9\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt[3]{21}$ d) $2\sqrt[3]{12}$ e) $-2\sqrt[3]{2}$ f) $4\sqrt[3]{3}$
5. a) $\sqrt[3]{12}$ b) $a\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[3]{270}$ d) $\frac{2\sqrt[3]{2}}{5}$ e) $\sqrt[3]{a^2b^2}$ f) $\frac{\sqrt[3]{bc}}{a}$
6. a) $24\sqrt{6}$ b) $-56\sqrt{14}$

Avaliação formativa

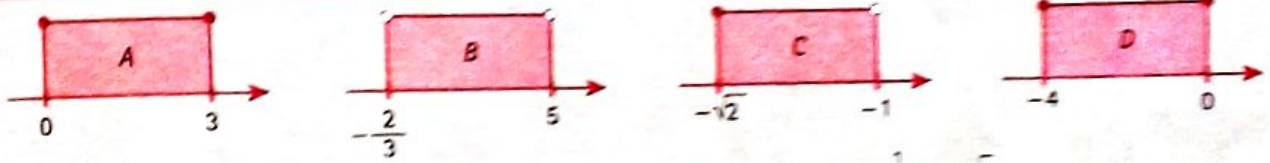
pág. 30/31

1. (C) 2. (C) 3. a) > b) < c) > d) >
4. a) 4 b) -775 c) 99 d) $-\frac{13}{12}$ e) 6
5. a) -10 b) 7 c) 18 d) $\frac{6}{5}$ e) 3
6. a) 4,24 b) 4,47 c) 3,64 d) $-2,01$
7. 10,3 (v. a. por defeito) e 10,4 (v. a. por excesso).
8. a) < b) > c) <
9. a) $5\sqrt{2}$ b) 3 c) $10b\sqrt{2ab}$ d) $2x\sqrt{3xy}$ 10. a) 4 b) 1
11. a) $\sqrt[3]{5}$ b) -6 c) $2\sqrt[3]{3}$
12. a) $-2\sqrt{5}$ b) -6 c) 1 d) $82-48\sqrt{2}$ e) $26+17\sqrt{2}$ f) $7\sqrt{14}-46$ g) $2\sqrt{10}$ h) $\frac{7}{28}$
13. a) $\frac{2+b+3\sqrt{b}}{1-b}$ b) $\frac{9-2\sqrt{14}}{5}$ c) $7-4\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{2}-4$

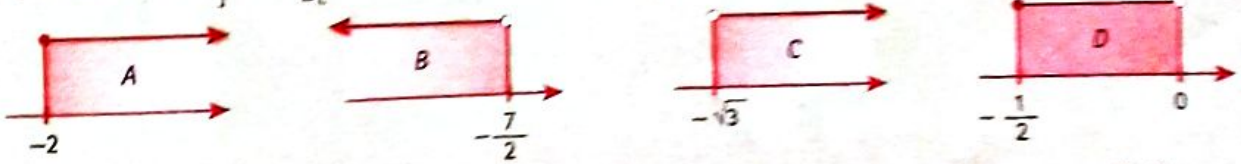
Exercício n.º 1

pág. 38

1.



2. a) 1 e 2. b) Por exemplo, 0,41 e 0,42. c) Por exemplo, $-\frac{1}{2}$ e $-\sqrt{2}$.
3. $A=]-2, +\infty[$; $B=\left]-\infty, \frac{7}{2}\right[$; $C=]-\sqrt{3}, +\infty[$ e $D=\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$



4. a) $\in$ b) $\in$ c) $\notin$ d) $\in$ e) $\in$ f) $\in$
5. I. C II. D III. A IV. E V. B

Exercício n.º 2

pág. 40

1. a) $A\cup B=]-10, 5]$ e $A\cap B=\{0\}$;
   b) $A\cup B=]-20, 5]$ e $A\cap B=\varnothing$;
   c) $A\cup B=\mathbb{R}$ e $A\cap B=]3, 5]$;
   d) $A\cup B=]-2, 2[\cup\left[3, \frac{7}{2}\right]$ e $A\cap B=\varnothing$
2. a) $]-1, +\infty[$ b) $]-\infty, 0]$ c) $]-4, 0[$ d) $\{3\}$

Exercício n.º 3

pág. 46

1. a) $x\in]7, +\infty[$ b) $x\in\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$ c) $x\in\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ d) $x\in]5, +\infty[$ e) $x\in\left]-\infty, -\frac{7}{4}\right]$
   f) $x\in\left]-\infty, \frac{6}{11}\right[$ g) $x\in\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ h) $x\in]-\infty, 4]$ i) $x\in]-\infty, 1[$
2. -3 e -2. 3. 6, 7 e 8.

Exercício n.º 4

pág. 49

a) $x\in]4, +\infty[$ b) $x\in]-\infty, 1[$ c) $x\in]-2, -1[$ d) $x\in\left]-\frac{5}{2}, \frac{19}{13}\right[$ e) $x\in\left[1, \frac{27}{2}\right]$ f) $x\in\varnothing$

Exercício n.º 5 — pág. 51

1. a) $x \in \left]-\infty, \frac{5}{4}\right[$ b) $x \in \left]\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right[$ 2. a) 48 e 50. b) 251 e 253 3. 8,33 cm $< \ell <$ 9,52 cm
4. 3,98 cm $< h <$ 4,12 cm 5. 73 6. a) $C(t) = 100 + 20t$ e $D(t) = 55 + 35t$. b) 3 horas
7. a) Plano C b) A partir dos 51 minutos. 8. O salário mínimo deve ser, pelo menos, 11 000,00 Mt.

Avaliação formativa — pág. 53/54/55

I. 1. (C) 2. (D) 3. (C) 4. (D) 5. (B) 6. (B)

II. 1. a) $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B =]2\ ;\ 2{,}3[$;
b) $A \cup B =]-1\ ,\ +\infty[$ e $A \cap B = [5\ ,\ +\infty[$;
c) $A \cup B =]-1\ ,\ +\infty[$ e $A \cap B = [0\ ,\ 3[$;
d) $A \cup B = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ e $A \cap B = [-\infty\ ,\ 0[$.

2. a) $x \in \left]-\infty, \frac{13}{4}\right]$ b) $x \in \left]-\infty, \frac{7}{2}\right]$ c) $x \in \left]-\frac{31}{39}, +\infty\right[$ d) $x \in \left]-\infty, -\frac{7}{8}\right[$

3. a) $x \in \left[-5, \frac{24}{7}\right[$ b) $x \in]-2\ ,\ -1[$ c) $x \in \left[-3, \frac{13}{3}\right]$ d) Sistema impossível

4. a) $x = 5$ b) $x \in]0\ ,\ 5]$ 5. a) $P = \frac{32}{7}x$ b) 5,5 cm $< P <$ 6,4 cm
6. $x \in \{5\ ,\ 6\ ,\ \ldots\ ,\ 15\}$ 7. a) $x \in]3\ ,\ +\infty[$ b) $x \in]20\ ,\ 31]$

Exercício n.º 1 — pág. 60

1. a) $x + 3$ b) $14 - y$ c) $d = 50t$ d) $x - 20 - \frac{1}{3}(x - 20)$ Mt
2. a) $P = 2c + 2h$ b) $P = 34$ 3. $2xy^2$ e xy^2. 4. a) 3.º grau b) 2.º grau c) 3.º grau d) 4.º grau

5.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau	Monómio simétrico
$\frac{xyz}{3}$	$\frac{1}{3}$	xyz	3	$-\frac{xyz}{3}$
6	6			-6
2^3xy	2^3	xy	2	-2^3xy

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau	Monómio simétrico
$\frac{3x^3y}{4}$	$\frac{3}{4}$	x^3y	3	$-\frac{3x^3y}{4}$
$\frac{7}{3}x$	$\frac{7}{3}$	x	1	$-\frac{7}{3}x$
$-\frac{1}{3}x^2yz^3$	$-\frac{1}{3}$	x^2yz^3	6	$\frac{1}{3}x^2yz^3$

Exercício n.º 2 — pág. 61

1. a) $7x$ b) $-\frac{15}{4}y$ c) $3z - t$ d) $1{,}3x - 4{,}2y + 2$ e) $2a + 8b$ f) $\frac{31}{6}a - \frac{1}{2}b + 2$
2. a) $-x + 9$ b) $5x - 2$ c) $3y - 2$ d) $10 - 3a$ e) $-4m + 7n - 6$ f) $-13t + 11$
3. a) $4x^3$ b) $2x + \frac{7}{3}$ c) $x^2 + 8x + 6$ d) $4x - 1$ e) $-\frac{11}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$ f) $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{35}{6}$

Exercício n.º 3 — pág. 62

1. a) $-12x^3$ b) $-x^3y^2$ c) $\frac{3}{2}a^2bx^3$ d) $-8a^6b^9$
2. a) $-a$ b) $0{,}2x^3y^2$ c) $-\frac{1}{4}x^2b^2$ d) -1 3. (D)

Exercício n.º 4 — pág. 64

1. a) 3.º grau; completo; $1 - 2x + x^2 + x^3$ b) 3.º grau; incompleto; $3xy^2 + x^2y + x^3$ c) 4.º grau; incompleto; $1 - x^4$
d) 2.º grau; completo; $-1 + x + x^2$ e) 4.º grau; incompleto; $-x + x^2 + 3x^3 + x^4$ f) 2.º grau; incompleto; $-2x + x^2$.
2. a) 22 b) 93 c) 32

Exercício n.º 5 — pág. 64

1. $3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x - 4$ 2. a) $0{,}7y^3 + 0{,}5y^2 - y - 3$ b) $4x^2 + 3x - 2$ c) $\frac{5}{3}x^2 + x + \frac{3}{2}$ d) $x^2y + xy^2 + xy^2 + xy + y + 5$
3. a) (B) b) (D)

Exercício n.º 6 — pág. 65

1. a) $-2x^3 + 6x^2$ b) $6x^3y^2 + 3x^4y - 3x^2y^3$ c) $-18x^3y^4$ d) $-2x^4y^4$
e) $6x^3 - 7x^2 - 5x + 3$ f) $x^4 - x^3 - x^2 + x$ g) $-2x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 15x^2 - 5x$ h) $-4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 3$

Exercício n.º 7

pág. 66

1. a) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ b) $-2xy + 2\sqrt{2}x + 3y - 3\sqrt{2}$ c) $\frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}$
2. a) $9 - 4x^2$ b) $4x^2 - 9$ c) $25x^2 - 16$
3. a) $(3 - 2x)(3 + 2x)$ b) $(9 - 6x)(9 + 6x)$ c) $\left(\frac{5}{2}x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x + \frac{2}{3}\right)$

Exercício n.º 8

pág. 68

1. a) $25 + 10m + m^2$ b) $25 - 20x + 4x^2$ c) $16x^2 + 24x + 9$ d) $x^4 + 6x^3 + 9x^2$
2. a) $4 - 12x + 9x^2$ b) $6x^2 + \frac{71}{5}x - 2$ c) $-4x^2 + 4x + 1$ d) $4x^2 - 17x + 27$
3. a) $100x^{20} - 40x^{10} + 4$ b) $9x^4 - 12x^5 + 4x^6$ c) $\frac{4}{9}x^6 - \frac{4}{3}x^3y + y^2$ d) $9x^2 - 4$

Exercício n.º 9

pág. 69

1. a) (B) b) (D) c) (A)
2. a) Sim, porque $a^3 + a^2b - a - b = a^3 - a + b(a^2 - 1) = a(a^2 - 1) + b(a^2 - 1)$. b) $(a^2 - 1)(a + b)$
3. a) $2y(y - 2)$ b) $(7 - 3x)(7 + 3x)$ c) $(a - 10)(a - 10)$ d) $(4 - x)(6 + x)$

Avaliação formativa

pág. 70/71

1.

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau	Monómio simétrico	Monómio semelhante
$-xy$	-1	xy	2	xy	$7xy$
$-3xyz^3$	-3	xyz^3	5	$3xyz^3$	$10xyz^3$
$4ab^2c$	4	ab^2c	4	$-4ab^2c$	$-2ab^2c$
$6abcd$	6	$abcd$	4	$-6abcd$	$5abcd$

2. a) $-\frac{1}{2}x^2y^2$ (por exemplo) b) $-6x^3$ (por exemplo) c) $10x^5$ (por exemplo) 3. a) (A) b) (C) c) (D) d) (D)
4. a) $-2x^4 + \sqrt{2}x - \frac{4}{3}$ b) $x^3 + 3x^2 + 8x - 1$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}$
5. a) ab^2 b) $2ab$ c) $\frac{1}{5}a^5$
6. a) $2x^3 + x^2 - 3x$ b) $6x^3 + 5x^2 - x - 10$ c) $x^3 - 8x^2 - 7x + 14$
7. a) $4x^2 + 20x + 25$ b) $4x^2 - 4x^3 + x^4$ c) $x^6 - 6x^4 + 9x^2$ d) $4x^2 - 9$ e) $-30x + 25$ f) $24x$
8. a) 9801 b) 10 404 c) 1,0609
9. a) $\frac{1}{3}(4a - 7)$ b) $4x^2(2x - 5x^2 - 2)$ c) $\frac{a^2}{2}(3 - 5b)$ d) $(3x - 11)(3x + 11)$ e) $3x^2(x - 2y)$
   f) $3xy(x^2 - 3y + xy)$ g) $(2x - 3y)(2x - 3y)$ h) $\left(\frac{x}{2} + 3\right)\left(\frac{x}{2} + 3\right)$ i) $3a(4a^2 - 1)$

Exercício n.º 1

pág. 77

Todas as equações quadráticas têm solução nula.

Exercício n.º 2

pág. 78

a) $x = -1 \vee x = 1$ b) $x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{2}$ c) $x = -3 \vee x = 3$ d) $x = -2 \vee x = 2$

Exercício n.º 3

pág. 79

a) $x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$ b) $x = -5 \vee x = 0$ c) $x = -\frac{7}{2} \vee x = 0$

Exercício n.º 4

pág. 81

a) $x = -3$ b) $x = -4 \vee x = 4$ c) $x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ d) A equação não tem raízes reais.

Exercício n.º 5

pág. 85

1. a) A equação não tem raízes reais. b) $x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$ c) $x = -5 \vee x = 0$
   d) $x = -\frac{1}{2} \vee x = 0$ e) $x = -\frac{3\sqrt{5}}{5} \vee x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ f) $x = -\frac{1}{2} \vee x = 0 \vee x = 1$
2. a) $k = -1 \vee k = \frac{5}{2}$ b) $k = -5$ c) $k > \frac{5}{2}$ d) Impossível 3. a) $\frac{x + 3}{3x + 1}$ b) $\frac{x}{x - 4}$ c) $\frac{2x - 1}{x - 1}$
4. a) $x^2 + 6x + 9 = 0$ (por exemplo) b) $x^2 - \sqrt{2}x = 0$ (por exemplo) c) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$ (por exemplo)

Exercício n.º 6

pág. 87

1. a) 430,4 metros b) 50 metros c) Aproximadamente, 41 segundos.
2. 9 cm, 7 cm e 24 cm.
3. 10 cm e 8 cm
4. a) 10 rebuçados b) 0,6 meticais (6 centavos)
5. São 44 macacos, no total.
6. 31 e 33.

Avaliação formativa

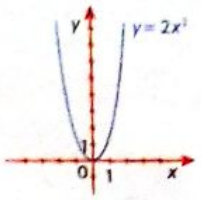
pág. 88/89

1. a) $x=-1 \vee x=2$ b) $m=0 \vee m=\frac{1}{2}$ c) $m=2$ d) $m=1-\frac{\sqrt{3}}{2} \vee m=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $m=2$
2. a) $x=-\frac{1}{12} \vee x=2$ b) $x=-\frac{1}{5} \vee x=\frac{1}{3}$ c) $x=-2 \vee x=3$
3. a) $x=0 \vee x=\frac{1}{3}$ b) $x=-1 \vee x=\frac{1}{3}$ c) $x=-\frac{9}{2} \vee x=4$
4. a) 4 b) $x^2-7x+12=0$ (por exemplo)
5. a) Falsa b) Falsa c) Verdadeira d) Falsa
6. Os números ímpares são 7 e 9.
7. 1 m
8. 12 cm e 16 cm.
9. a) 1200 cm^2 b) A moldura tem 5 cm de largura.
10. 80 iogurtes

Exercício n.º 1

pág. 96

a)

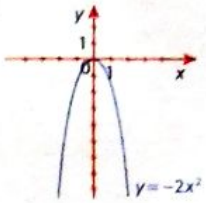


Domínio: $D=\mathbb{R}$
Concavidade voltada para cima
Zeros: $x=0$ (zero duplo)
Vértice: $V\smile(0,\ 0)$

Eixo de simetria: $x=0$
Contradomínio: $D'=[0,\ +\infty[$

x	$]-\infty,\ 0[$	0	$]0,\ +\infty[$
Monotonia da função	↘	0	↗
Variação de sinal	+	0	+

b)

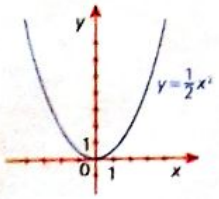


Domínio: $D=\mathbb{R}$
Concavidade voltada para baixo
Zeros: $x=0$ (zero duplo)
Vértice: $V\smile(0,\ 0)$

Eixo de simetria: $x=0$
Contradomínio: $D'=]-\infty,\ 0]$

x	$]-\infty,\ 0[$	0	$]0,\ +\infty[$
Monotonia da função	↗	0	↘
Variação de sinal	−	0	−

c)

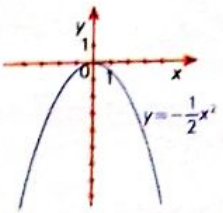


Domínio: $D=\mathbb{R}$
Concavidade voltada para cima
Zeros: $x=0$ (zero duplo)
Vértice: $V\smile(0,\ 0)$

Eixo de simetria: $x=0$
Contradomínio: $D'=[0,\ +\infty[$

x	$]-\infty,\ 0[$	0	$]0,\ +\infty[$
Monotonia da função	↘	0	↗
Variação de sinal	+	0	+

d)



Domínio: $D=\mathbb{R}$
Concavidade voltada para baixo
Zeros: $x=0$ (zero duplo)
Vértice: $V\smile(0,\ 0)$

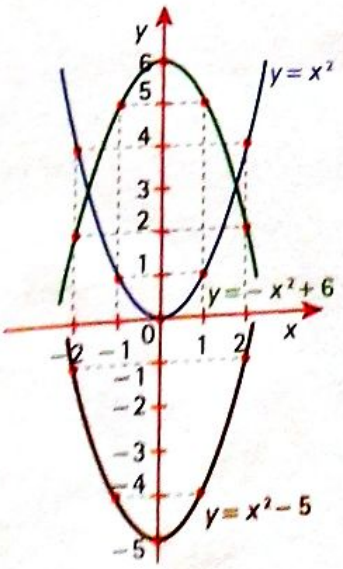
Eixo de simetria: $x=0$
Contradomínio: $D'=]-\infty,\ 0]$

x	$]-\infty,\ 0[$	0	$]0,\ +\infty[$
Monotonia da função	↗	0	↘
Variação de sinal	−	0	−

Exercício n.º 2

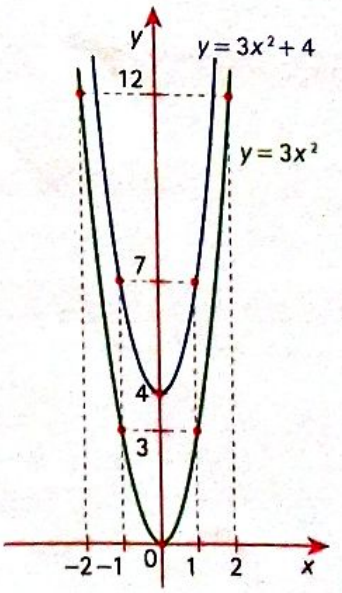
pág. 97

1.



2.

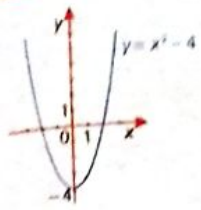
x	y
4	12
−1	3
0	0
1	3
2	12



pág. 98

Exercício n.º 3

a)



Domínio: $D = \mathbb{R}$
Concavidade voltada para cima
Zeros: $\{-2, 2\}$
Vértice: $V \smile (0, -4)$
Eixo de simetria: $x = 0$
Contradomínio: $D' = [-4, +\infty[$

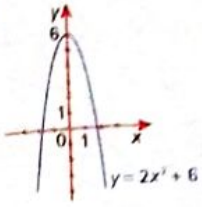
Monotonia da função

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, +\infty[$
y	↘	-4	↗

Variação de sinal

x	$]-\infty, -2[$	-2	$]-2, 2[$	2	$]2, +\infty[$
y	+	0	−	0	+

b)



Domínio: $D = \mathbb{R}$
Concavidade voltada para cima
Zeros: $x = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
Vértice: $V \smile (0, 6)$
Eixo de simetria: $x = 0$
Contradomínio: $D' =]-\infty, 6]$

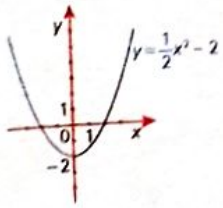
Monotonia da função

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, +\infty[$
y	↗	6	↘

Variação de sinal

x	$]-\infty, -\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$]\sqrt{3}, +\infty[$
y	−	0	+	0	−

c)



Domínio: $D = \mathbb{R}$
Concavidade voltada para cima
Zeros: $\{-2, 2\}$
Vértice: $V \smile (0, -2)$
Eixo de simetria: $x = 0$
Contradomínio: $D' = [-2, +\infty[$

Monotonia da função

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, +\infty[$
y	↘	-2	↗

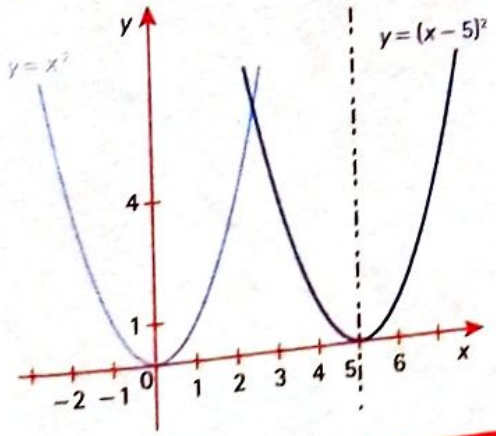
Variação de sinal

x	$]-\infty, -2[$	-2	$]-2, 2[$	2	$]2, +\infty[$
y	+	0	−	0	+

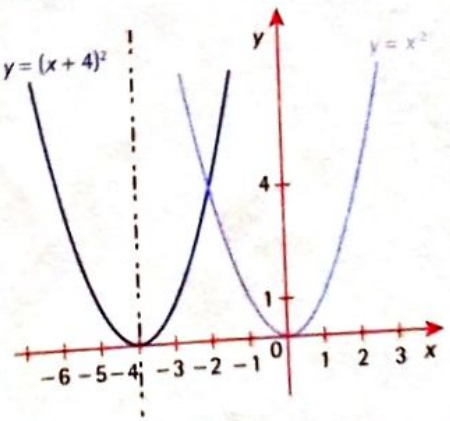
pág. 100

Exercício n.º 4

a) Eixo de simetria: $x = 5$



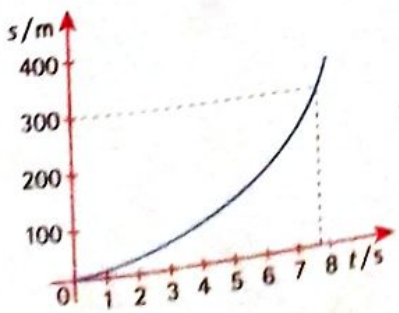
b) Eixo de simetria: $x = -4$



pág. 103

Exercício n.º 5

1. a)



b) $t = 7{,}8$ s

2. a) $t = 0$ s e $t = 4$ s.
b) Como $V \smile (2, 22)$ então a altura máxima é de 22 m e é atingida aos 2 s.
c) Não, uma vez que a altura máxima é 22 metros.
d) Aproximadamente, 4,1 s.

3. $x = 12{,}5$ cm.

4. a) A altura dos pilares é 10 metros e encontram-se a uma distância de 8 metros um do outro.
b) A altura mínima é de 2 metros.

Avaliação formativa

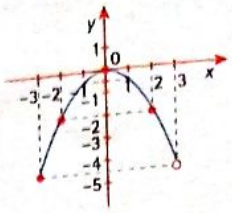
I. 1. (D) 2. (C) 3. (C)

II. 1. a)

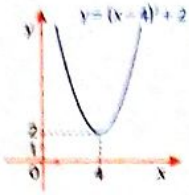
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$

4. (A)

b)



2. a)



Domínio: $D = \mathbb{R}$
Concavidade voltada para cima
Zeros: não tem zeros
Vértice: $V \smile (4, 2)$
Eixo de simetria: $x = 4$
Contradomínio: $D' = [2, +\infty[$

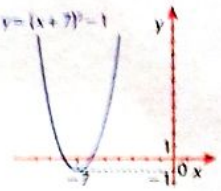
Monotonia da função

x	$]-\infty, 4[$	4	$]4, +\infty[$
y	↘	2	↗

Variação de sinal

x	$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
y	$+$

b)



Domínio: $D = \mathbb{R}$
Concavidade voltada para cima
Zeros: $\{-8, -6\}$
Vértice: $V \smile (-7, -1)$
Eixo de simetria: $x = -7$
Contradomínio: $D' = [-1, +\infty[$

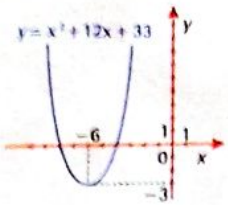
Monotonia da função

x	$]-\infty, -7[$	-7	$]-7, +\infty[$
y	↘	-1	↗

Variação de sinal

x	$]-\infty, -8[$	-8	$]-8, -6[$	-6	$]-6, +\infty[$
y	$+$	0	$-$	0	$+$

c)



Domínio: $D = \mathbb{R}$
Concavidade voltada para cima
Zeros: $\{-6-\sqrt{3}, -6+\sqrt{3}\}$
Vértice: $V \smile (-6, -3)$
Eixo de simetria: $x = -6$
Contradomínio: $D' = [-3, +\infty[$

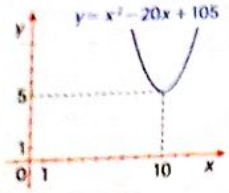
Monotonia da função

x	$]-\infty, -6[$	-6	$]-6, +\infty[$
y	↘	-3	↗

Variação de sinal

x	$]-\infty, -7{,}7[$	$-7{,}7$	$]-7{,}7, -4{,}3[$	$-4{,}3$	$]-4{,}3, +\infty[$
y	$+$	0	$-$	0	$+$

d)



Domínio: $D = \mathbb{R}$
Concavidade voltada para cima
Zeros: não tem zeros
Vértice: $V \smile (10, 5)$
Eixo de simetria: $x = 10$
Contradomínio: $D' = [5, +\infty[$

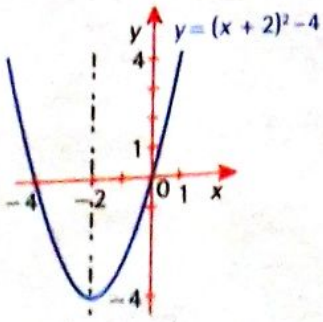
Monotonia da função

x	$]-\infty, 10[$	10	$]10, +\infty[$
y	↘	5	↗

Variação de sinal

x	$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
y	$+$

3.



a) $x = -2$ b) $V \smile (-2, -4)$ c) $D' = [-4, +\infty[$ d) $x \in]-2, +\infty[$
e) $x \in]-4, 0[$

4. O gráfico pode ser obtido através de uma expansão na vertical segundo o factor 2 (menor abertura da parábola) seguido de uma translação vertical de 2 unidades para cima e de uma mudança de concavidade da parábola.

5.

Função	A	B	C
Eixo de simetria	$x = 1$	$x = 1$	$x = -2$
Coordenadas do vértice	$V \smile (1, 0)$	$V \smile (1, 2)$	$V \smile (-2, -1)$
Expressão analítica	$y = (x-1)^2$	$y = (x-1)^2 + 2$	$y = (x+2)^2 - 1$

Exercício n.º 1 — pág. 109

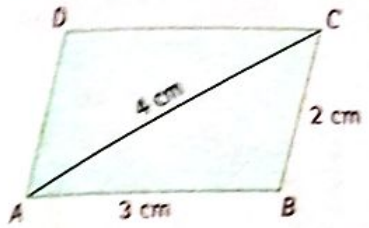
Grupo dos trapézios: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 13 e 14;
Grupo dos não-trapézios: 1 e 5;
Grupo dos paralelogramos: 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13 e 14;
Grupo dos não-paralelogramos: 2 e 4.

Exercício n.º 2 — pág. 115

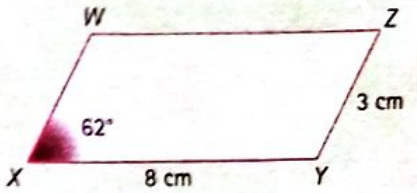
1. $B\hat{A}D = D\hat{C}B = 105°$ e $C\hat{B}A = A\hat{D}C = 75°$.
2. Os ângulos adjacentes da base maior têm amplitude igual a $30°$ e os da base menor igual a $150°$.
3. $E\hat{O}C = 88°$
4. $D\hat{A}B = D\hat{C}B = 81°$ e $C\hat{B}A = A\hat{D}C = 99°$.
5. Os dois ângulos opostos medem cada um, $59°$ e os outros dois medem, cada um, $121°$.
6. $C\hat{B}A = A\hat{D}C = 70°$ e $B\hat{A}D = D\hat{C}B = 110°$.

Exercício n.º 3 — pág. 115

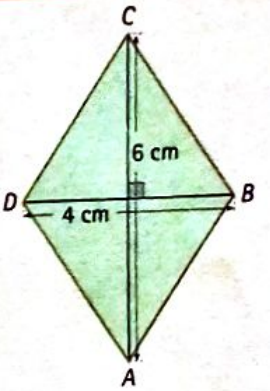
1.



2.

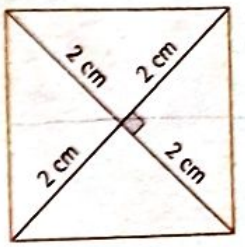


3.



4.

5.



Avaliação formativa — pág. 116/117

1.

Quadriláteros	Propriedades						
	Lados opostos paralelos	Lados opostos iguais	Quatro lados iguais	Quatro ângulos rectos	Diagonais iguais	Diagonais intersectam-se no ponto médio	Diagonais perpendiculares
Rectângulo	S	S	N	S	S	S	N
Quadrado	S	S	S	S	S	S	S
Trapézio	N	N	N	N	N	N	N
Paralelogramo	S	S	N	N	N	N	N
Losango	S	S	S	N	S	S	S

2. a) (B) b) (C) c) (C) d) (B)
3. $B\hat{A}D = 96°$, $C\hat{B}A = 90°$, $D\hat{C}B = 104°$ e $A\hat{D}C = 68°$.
4. $B\hat{F}C = 42°$
5. $E\hat{C}F + B\hat{A}D = 180°$ e $E\hat{C}F = C\hat{B}A$.
6. a) $B\hat{A}D = C\hat{B}A = 60°$ e $D\hat{C}B = A\hat{D}C = 120°$;
   b) $B\hat{A}D = 70°$, $C\hat{B}A = 80°$, $D\hat{C}B = 100°$ e $A\hat{D}C = 110°$;
   c) $e = 25°$

Exercício n.º 1 — pág. 122

1. A população são os 3000 habitantes de uma cidade e a amostra os 2000 habitantes seleccionados para o estudo.
   A variável estatística é o canal de televisão preferido e classifica-se em variável qualitativa.
2. a) (C) b) (D) c) Variável quantitativa d) Variável qualitativa
3. a) Variável quantitativa b) Variável qualitativa

Exercício n.º 2

pág. 124

1.

Número de bebés nascidos em Agosto				
x_i	f_i	F_i	$fr_i(\%)$	$Fr_i(\%)$
0	3	3	10	10
1	5	8	17	27
2	10	18	33	60
3	8	26	27	87
4	4	30	13	100
Total	30		100	

2.

Número de irmãos dos alunos da turma do Ano					
Número de irmãos	f_i	F_i	fr_i	$fr_i(\%)$	$Fr_i(\%)$
0	4	4	0,16	16	16
1	10	14	0,40	40	56
2	7	21	0,28	28	84
3	3	24	0,12	12	96
4	1	25	0,04	4	100
Total	25		1	100	

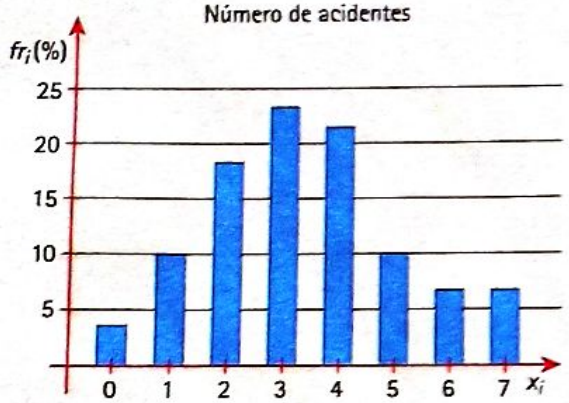
3. a) 6800 eleitores b) 32,4% c) 720 eleitores d) Partido A

Exercício n.º 3

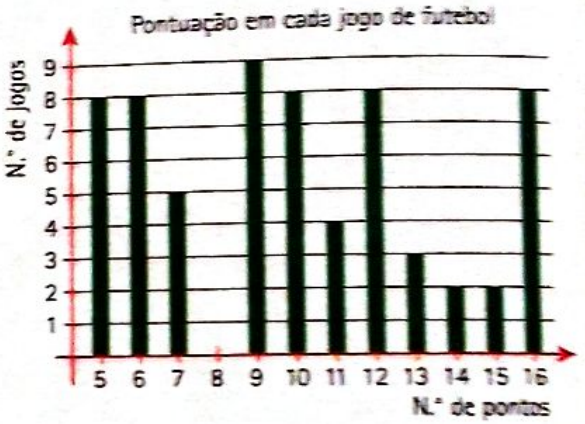
pág. 127

1. a) 32 alunos b) 27 alunos correspondente a 26% .

2.



3.



4.

x_i	f_i	F_i	$fr_i(\%)$	$Fr_i(\%)$
7	1	1	5	5
8	2	3	10	15
9	3	6	15	30
10	4	10	20	50
11	5	15	25	75
12	3	18	15	90
13	0	18	0	90
14	2	20	10	100
Total	20		100	

5.

Classificação	Ângulo
Mau	36°
Mediocre	72°
Suficiente	108°
Bom	90°
Muito Bom	54°
Total	360°

Exercício n.º 4

pág. 130

1.

	Português	Inglês
Média	13,5	10,6
Mediana	14	10
Moda	14	10

2.

	Equipa A	Equipa B
Média	1,7	2,1
Mediana	1,5	2
Moda	3	2 e 3

3. 2 Mt e 10 Mt ; 1 Mt e 11 Mt ; 2,50 Mt e 9,50 Mt (por exemplo).

4. a) 708,4 kg b) 482 kg c) 49,6 kg

5. A única medida de tendência central afectada é a média.

Avaliação Formativa

pág. 131/132/133

1. a)

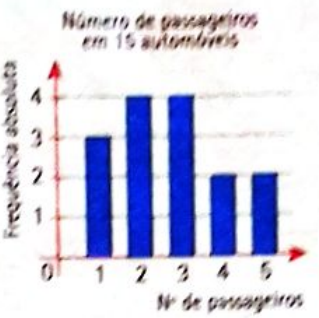
Minutos de atraso	f_i	fr_i	fr_i(%)
0	3	0,08	8
5	10	0,25	25
10	13	0,33	33
15	7	0,18	18
20	3	0,08	8
25	2	0,05	5
30	1	0,03	3
Total	39	1	100

b) 39 automóveis c) 3 d) 13 e) $\bar{x} = 10,9$ e $M_o = 10$

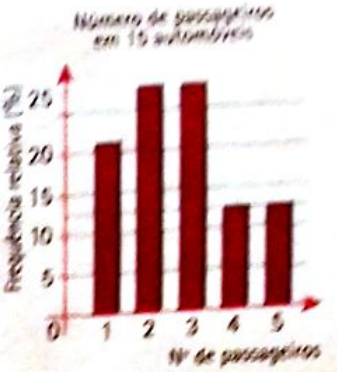
2. a)

Nº de passageiros	f_i	fr_i	fr_i(%)
1	3	0,2	2
2	4	0,27	27
3	4	0,27	27
4	2	0,13	13
5	2	0,13	13
Total	15	1	100

b)



c)



3. a) i) 80 ii) 50 b) i) 12,5% ii) 14,7%

4. a) 31 000 b) 2500 , por mês; c) Dezembro; 6000 ; d) 37,7% e) Agosto; Dezembro; 19,6% .

5. $M_o = 11$; $\bar{x} = 10,35$ e $\tilde{x} \approx 10,5 \approx 11$.

6. $M_o = 3$; $\bar{x} \approx 2,93$ e $\tilde{x} = 3$.

7.

	Empresa A	Empresa B	Empresa C
Média	585	544,4	600
Mediana	600	550	600
Moda	600	400	

c)

pág. 140/141

Exercício n.º 1

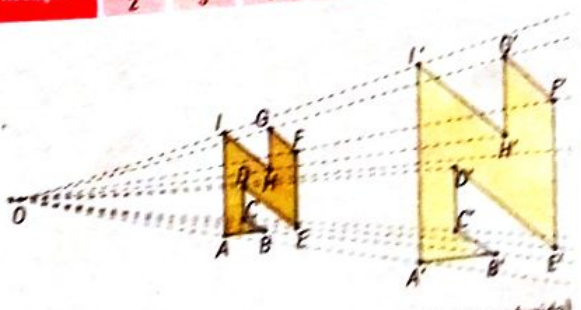
1.

	B	C	D	E	F
Ampliação	2	$\frac{3}{2}$	3	3	$\frac{3}{2}$
Redução	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

2. a) Método de homotetia

b) De A para A' é 3 e de B para B' é $\frac{1}{2}$.

3. a)



(escala reduzida)

b)

(escala reduzida)

pág. 144

Exercício n.º 2

1. a) $x = 6$ b) $x = 3$ c) $x = 8$ d) $x = 9$

2. 8 kg

3. a) 1400 kg b) 1875 kg de areia e 625 kg de cimento

pág. 145

Exercício n.º 3

1. Os lados correspondentes não são proporcionais.
2. Os lados correspondentes são proporcionais.
3. $a = 7{,}5$ cm, $b = 8$ cm e $c = 14{,}5$ cm.

pág. 148

Exercício n.º 4

1. a) $r = \frac{5}{3}$ b) $\overline{B'C'} = \frac{20}{3}$ cm e $\overline{B'E'} = 5$ cm.
2. Comprimento: 12 cm; largura: 8 cm.

pág. 152

Exercício n.º 5

1. Pilar médio: 2 m; pilar maior: 3 m.
2. 4,38 m
3. a) Critério AA (Os triângulos têm um ângulo recto e $\measuredangle ECD = \measuredangle BCA$.) b) $\frac{3}{5}$ c) 3 m d) $\overline{BC} = 10{,}4$ m e $\overline{CD} = 6{,}3$ m.

pág. 156

Exercício n.º 6

1. 6 m
2. 3 cm
3. $\overline{ID} = 1{,}5$ cm e $\overline{JC} = 3{,}25$ cm.

pág. 160

Exercício n.º 7

1. $\sqrt{18}$ cm
2. 150 m
3. 8 cm

pág. 162

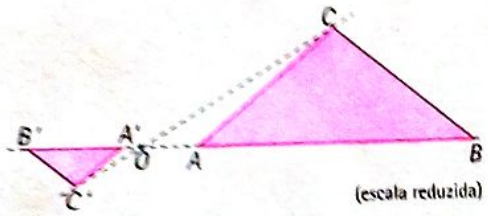
Exercício n.º 8

1. 24 cm
2. a) $x = 11$ cm b) 48 cm
3. b) 24 km c) 18 km d) 12 km

pág. 163/164/165

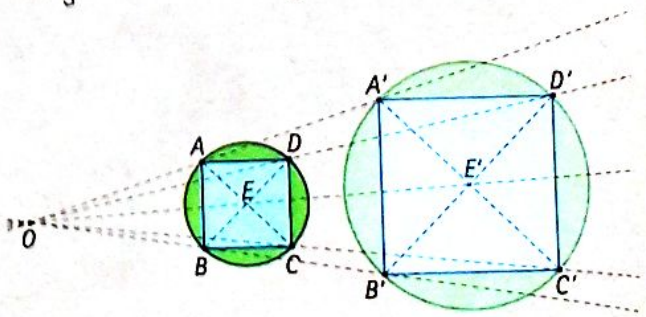
Avaliação formativa

1. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) Não d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{3}$ f) Sim
3. a)



(escala reduzida)

b)



(escala reduzida)

4. Sim, porque todos os ângulos internos dos dois triângulos medem 60° (critério AA).
5. Não são semelhantes porque não satisfazem nenhum critério de semelhança.
6. a) $x = 6$ cm b) 72 cm^2 7. 17 m 8. 5,4 m 9. $x = 3$ e $y = 1{,}5$.
10. $a = 13$; $m = \frac{25}{13}$; $n = \frac{144}{13}$ e $h = \frac{60}{13}$.

pág. 172

Exercício n.º 1

Poliedro	Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Número de faces	4	6	8	12	20
Número de vértices	4	8	6	20	12
Número de arestas	6	12	12	30	30

pág. 173

Exercício n.º 2

1. a) A, B, D, E, H e I; b) C, F e G; c) E e I; d) B e H; e) A, B e E; f) E e I.
2. a) Sim, um prisma pentagonal. b) Não, porque as faces laterais são sempre paralelogramos.
   c) Não, porque o número de arestas de uma pirâmide é o dobro do número de arestas da sua base, logo é par.
3. a) Prisma hexagonal b) Pirâmide octogonal c) Prisma pentagonal
4. Cubo: C; Pirâmide hexagonal: E; Cilindro: D; Pirâmide quadrangular: F; Paralelepípedo: B; Cone: A.

Exercício n.º 3 — pág. 176

1.

Prisma	Triangular	Quadrangular	Pentagonal	Hexagonal	Heptagonal
N.º de lados do polígono da base	3	4	5	6	7
N.º de faces	5	6	7	8	9

a) O número das faces de um prisma é igual à soma do número dos lados do polígono da base com 2.

2. a) Pentagonais b) $F = 7$; $A = 15$ e $V = 10$. c) Rectângulos d) Não

3. a) 4 cm b) 6 cm c) 3 cm d) $3\sqrt{5}$ cm
e) $2\sqrt{13}$ cm f) 4 cm g) $2\sqrt{17}$ cm h) 5 cm

Exercício n.º 4 — pág. 177

1. a) 120 cm² b) 10,83 cm² c) 141,7 cm² 2. a) 320 b) 20 3. 2,4 g e 0,11 mm.

4. a) 840 cm² b) 11 dm c) 864 cm² d) 48 cm e) $c = 18$ cm, $\ell = 9$ cm e $h = 3$ cm.

Exercício n.º 5 — pág. 178

1. $h = 12$ cm 2. a) 144 cm² b) $30k^2$ cm² c) 30 cm² 3. 216 cm³

4. a) 315 cm³ b) 54 cm³ 5. a) 21 600 cm² b) 388 800 cm² c) 486 000 cm³

Exercício n.º 6 — pág. 182

1. A: $A_\ell = 32{,}25$ cm² e $A_T = 43$ cm²; B: $A_\ell = 52{,}5$ cm² e $A_T = 63{,}25$ cm³ e C: $A_\ell = 70$ cm² e $A_T = 95$ cm².

2. $h = 5\sqrt{2}$ cm e $A_p = 5\sqrt{3}$ cm. 3. a) $20\sqrt{2}$ cm b) 13 cm c) $\frac{1}{2}\sqrt{626}$ cm

4. Aproximadamente, 2 574 467 m³. 5. 6 cm

Exercício n.º 7 — pág. 185

1. $r \approx 3$ cm e $h \approx 12$ cm. 2. $r = 5$ cm, $g = 13$ cm e $h = 12$ cm. 3. a) $A_\ell \approx 78{,}5$ cm² b) Esfera de raio 8 e centro P.

4. a) Cone de raio $[YZ]$ e altura $\overline{XY}$; b) Cilindro de raio $[YZ]$ e altura $\overline{XY}$; c) Esfera de diâmetro $[XY]$;
d) Dois cones com a mesma base e cujo raio da base é a altura do triângulo relativa à hipotenusa.

Exercício n.º 8 — pág. 187

1. a) $A_\ell \approx 377$ cm² e $A_T \approx 534$ cm²; b) $A_\ell \approx 4{,}4$ cm² e $A_T \approx 4{,}6$ cm². 2. a) 7 cm b) $h = 2r$

3. a) $A_\ell \approx 37{,}7$ cm² e $A_T \approx 50{,}2$ cm²; b) $A_\ell \approx 56{,}5$ cm² e $A_T = 94{,}2$ cm².

4. a) $A \approx 113$ cm² b) $A \approx 37{,}7$ cm² c) $A = 16\pi a^2$ 5. 336 cm²

Exercício n.º 9 — pág. 188

1. a) $A_\ell \approx 37{,}7k^2$ e $A_T \approx 62{,}8k^2$; b) $A_\ell \approx 195{,}9$ m² e $A_T \approx 271{,}3$ cm².

2. a) $A_\ell \approx 188{,}5$ dm² e $A_T \approx 267$ dm². b) $A_\ell \approx 66k^2$ e $A_T \approx 94{,}2k^2$. 3. São iguais. 4. $V = 4\sqrt{3}$ cm³

5. $h \approx 1{,}6$ m 6. a) $V \approx 113{,}1$ cm³ b) $V \approx 268{,}1$ cm³ c) $V \approx 113{,}1k^3$ cm³ d) $V \approx 37{,}7$ cm³ 7. $\frac{\pi}{4}x^3$

Avaliação formativa — pág. 189/190

1. (A) 2. (A) e (D). 3. a) A Lufa tem razão. b) 9 c) 6

5. a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm e $c = 24$ cm; b) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm, $c = 36$ cm e $D = 39$ cm.

6. a) 6, 24 e 54. Aumenta 4 vezes (2^2). Aumenta 9 vezes (3^2). b) 1, 8 e 27. Aumenta 8 vezes (2^3). Aumenta 27 vezes (3^3).

7. 108 cm² 8. $6\sqrt{2}$ cm 9. 27π cm² 11. a) $\frac{3}{2}$ b) 1

10.

Cones	raio	altura	geratriz	Área lateral	Área total	Volume
A	6	8	10	60π	96π	96π
B	5	12	13	65π	90π	100π
C	2	$4\sqrt{2}$	6	12π	16π	$\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$
D	5	12	13	65π	90π	100π
E	k	$3k$	$\sqrt{10}k$	$\sqrt{10}\pi k^2$	$(1+\sqrt{10})\pi k^2$	πk^3

Tábua de raízes quadradas n.º 2: números 10,0 a 99,9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	3,1623	3,1780	3,1937	3,2094	3,2249	3,2404	3,2558	3,2711	3,2863	3,3015
11	3,3166	3,3317	3,3466	3,3615	3,3764	3,3912	3,4059	3,4205	3,4351	3,4496
12	3,4641	3,4785	3,4928	3,5071	3,5214	3,5355	3,5496	3,5637	3,5777	3,5917
13	3,6056	3,6194	3,6332	3,6469	3,6606	3,6742	3,6878	3,7014	3,7148	3,7283
14	3,7417	3,7550	3,7683	3,7815	3,7947	3,8079	3,8210	3,8341	3,8471	3,8601
15	3,8730	3,8859	3,8987	3,9115	3,9243	3,9370	3,9497	3,9623	3,9749	3,9875
16	4,0000	4,0125	4,0249	4,0373	4,0497	4,0620	4,0743	4,0866	4,0988	4,1110
17	4,1231	4,1352	4,1473	4,1593	4,1713	4,1833	4,1952	4,2071	4,2190	4,2308
18	4,2426	4,2544	4,2661	4,2778	4,2895	4,3012	4,3128	4,3243	4,3359	4,3474
19	4,3589	4,3704	4,3818	4,3932	4,4045	4,4159	4,4272	4,4385	4,4497	4,4609
20	4,4721	4,4833	4,4944	4,5056	4,5166	4,5277	4,5387	4,5497	4,5607	4,5717
21	4,5826	4,5935	4,6043	4,6152	4,6260	4,6368	4,6476	4,6583	4,6690	4,6797
22	4,6904	4,7011	4,7117	4,7223	4,7329	4,7434	4,7539	4,7645	4,7749	4,7854
23	4,7958	4,8062	4,8166	4,8270	4,8374	4,8477	4,8580	4,8683	4,8785	4,8888
24	4,8990	4,9092	4,9193	4,9295	4,9396	4,9497	4,9598	4,9699	4,9800	4,9900
25	5,0000	5,0100	5,0200	5,0299	5,0398	5,0498	5,0596	5,0695	5,0794	5,0892
26	5,0990	5,1088	5,1186	5,1284	5,1381	5,1478	5,1575	5,1672	5,1769	5,1865
27	5,1962	5,2058	5,2154	5,2249	5,2345	5,2440	5,2536	5,2631	5,2726	5,2820
28	5,2915	5,3009	5,3104	5,3198	5,3292	5,3385	5,3479	5,3572	5,3666	5,3759
29	5,3852	5,3944	5,4037	5,4129	5,4222	5,4314	5,4406	5,4498	5,4589	5,4681
30	5,4772	5,4863	5,4955	5,5045	5,5136	5,5227	5,5317	5,5408	5,5498	5,5588
31	5,5678	5,5767	5,5857	5,5946	5,6036	5,6125	5,6214	5,6303	5,6391	5,6480
32	5,6569	5,6657	5,6745	5,6833	5,6921	5,7009	5,7096	5,7184	5,7271	5,7359
33	5,7446	5,7533	5,7619	5,7706	5,7793	5,7879	5,7966	5,8052	5,8138	5,8224
34	5,8310	5,8395	5,8481	5,8566	5,8652	5,8737	5,8822	5,8907	5,8992	5,9076
35	5,9161	5,9245	5,9330	5,9414	5,9498	5,9582	5,9666	5,9749	5,9833	5,9917
36	6,0000	6,0083	6,0166	6,0249	6,0332	6,0415	6,0498	6,0581	6,0663	6,0745
37	6,0828	6,0910	6,0992	6,1074	6,1156	6,1237	6,1319	6,1400	6,1482	6,1563
38	6,1644	6,1725	6,1806	6,1887	6,1968	6,2048	6,2129	6,2209	6,2290	6,2370
39	6,2450	6,2530	6,2610	6,2690	6,2769	6,2849	6,2929	6,3008	6,3087	6,3166
40	6,3246	6,3325	6,3403	6,3482	6,3561	6,3640	6,3718	6,3797	6,3875	6,3953
41	6,4031	6,4109	6,4187	6,4265	6,4343	6,4420	6,4498	6,4576	6,4653	6,4730
42	6,4807	6,4885	6,4962	6,5038	6,5115	6,5192	6,5269	6,5345	6,5422	6,5498
43	6,5574	6,5651	6,5727	6,5803	6,5879	6,5955	6,6030	6,6106	6,6182	6,6257
44	6,6332	6,6408	6,6483	6,6558	6,6633	6,6708	6,6783	6,6858	6,6933	6,7007
45	6,7082	6,7157	6,7231	6,7305	6,7380	6,7454	6,7528	6,7602	6,7676	6,7750
46	6,7823	6,7897	6,7971	6,8044	6,8118	6,8191	6,8264	6,8337	6,8411	6,8484
47	6,8557	6,8629	6,8702	6,8775	6,8848	6,8920	6,8993	6,9065	6,9138	6,9210
48	6,9282	6,9354	6,9426	6,9498	6,9570	6,9642	6,9714	6,9785	6,9857	6,9929
49	7,0000	7,0071	7,0143	7,0214	7,0285	7,0356	7,0427	7,0498	7,0569	7,0640
50	7,0711	7,0781	7,0852	7,0922	7,0993	7,1063	7,1134	7,1204	7,1274	7,1344
51	7,1414	7,1484	7,1554	7,1624	7,1694	7,1764	7,1833	7,1903	7,1972	7,2042
52	7,2111	7,2180	7,2250	7,2319	7,2388	7,2457	7,2526	7,2595	7,2664	7,2732
53	7,2801	7,2870	7,2938	7,3007	7,3075	7,3144	7,3212	7,3280	7,3348	7,3417
54	7,3485	7,3553	7,3621	7,3689	7,3756	7,3824	7,3892	7,3959	7,4027	7,4095

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7,4162	7,4229	7,4297	7,4364	7,4431	7,4498	7,4565	7,4632	7,4699	7,4766
56	7,4833	7,4900	7,4967	7,5033	7,5100	7,5166	7,5233	7,5299	7,5366	7,5432
57	7,5498	7,5565	7,5631	7,5697	7,5763	7,5829	7,5895	7,5961	7,6026	7,6092
58	7,6158	7,6223	7,6289	7,6354	7,6420	7,6485	7,6551	7,6616	7,6681	7,6746
59	7,6811	7,6877	7,6942	7,7006	7,7071	7,7136	7,7201	7,7266	7,7330	7,7395
60	7,7460	7,7524	7,7589	7,7653	7,7717	7,7782	7,7846	7,7910	7,7974	7,8038
61	7,8102	7,8166	7,8230	7,8294	7,8358	7,8422	7,8486	7,8549	7,8613	7,8677
62	7,8740	7,8804	7,8867	7,8930	7,8994	7,9057	7,9120	7,9183	7,9246	7,9310
63	7,9373	7,9436	7,9498	7,9561	7,9624	7,9687	7,9750	7,9812	7,9875	7,9937
64	8,0000	8,0062	8,0125	8,0187	8,0250	8,0312	8,0374	8,0436	8,0498	8,0561
65	8,0623	8,0685	8,0747	8,0808	8,0870	8,0932	8,0994	8,1056	8,1117	8,1179
66	8,1240	8,1302	8,1363	8,1425	8,1486	8,1548	8,1609	8,1670	8,1731	8,1792
67	8,1854	8,1915	8,1976	8,2037	8,2098	8,2158	8,2219	8,2280	8,2341	8,2401
68	8,2462	8,2523	8,2583	8,2644	8,2704	8,2765	8,2825	8,2885	8,2946	8,3006
69	8,3066	8,3126	8,3187	8,3247	8,3307	8,3367	8,3427	8,3487	8,3546	8,3606
70	8,3666	8,3726	8,3785	8,3845	8,3905	8,3964	8,4024	8,4083	8,4143	8,4202
71	8,4261	8,4321	8,4380	8,4439	8,4499	8,4558	8,4617	8,4676	8,4735	8,4794
72	8,4853	8,4912	8,4971	8,5029	8,5088	8,5147	8,5206	8,5264	8,5323	8,5381
73	8,5440	8,5499	8,5557	8,5615	8,5674	8,5732	8,5790	8,5849	8,5907	8,5965
74	8,6023	8,6081	8,6139	8,6197	8,6255	8,6313	8,6371	8,6429	8,6487	8,6545
75	8,6603	8,6660	8,6718	8,6776	8,6833	8,6891	8,6948	8,7006	8,7063	8,7121
76	8,7178	8,7235	8,7293	8,7350	8,7407	8,7464	8,7521	8,7579	8,7636	8,7693
77	8,7750	8,7807	8,7864	8,7920	8,7977	8,8034	8,8091	8,8148	8,8204	8,8261
78	8,8318	8,8374	8,8431	8,8487	8,8544	8,8600	8,8657	8,8713	8,8769	8,8826
79	8,8882	8,8938	8,8994	8,9051	8,9107	8,9163	8,9219	8,9275	8,9331	8,9387
80	8,9443	8,9499	8,9554	8,9610	8,9666	8,9722	8,9778	8,9833	8,9889	8,9944
81	9,0000	9,0056	9,0111	9,0167	9,0222	9,0277	9,0333	9,0388	9,0443	9,0499
82	9,0554	9,0609	9,0664	9,0719	9,0774	9,0830	9,0885	9,0940	9,0995	9,1049
83	9,1104	9,1159	9,1214	9,1269	9,1324	9,1378	9,1433	9,1488	9,1542	9,1597
84	9,1652	9,1706	9,1761	9,1815	9,1869	9,1924	9,1978	9,2033	9,2087	9,2141
85	9,2195	9,2250	9,2304	9,2358	9,2412	9,2466	9,2520	9,2574	9,2628	9,2682
86	9,2736	9,2790	9,2844	9,2898	9,2952	9,3005	9,3059	9,3113	9,3167	9,3220
87	9,3274	9,3327	9,3381	9,3434	9,3488	9,3541	9,3595	9,3648	9,3702	9,3755
88	9,3808	9,3862	9,3915	9,3968	9,4021	9,4074	9,4128	9,4181	9,4234	9,4287
89	9,4340	9,4393	9,4446	9,4499	9,4552	9,4604	9,4657	9,4710	9,4763	9,4816
90	9,4868	9,4921	9,4974	9,5026	9,5079	9,5131	9,5184	9,5237	9,5289	9,5341
91	9,5394	9,5446	9,5499	9,5551	9,5603	9,5656	9,5708	9,5760	9,5812	9,5864
92	9,5917	9,5969	9,6021	9,6073	9,6125	9,6177	9,6229	9,6281	9,6333	9,6385
93	9,6437	9,6488	9,6540	9,6592	9,6644	9,6695	9,6747	9,6799	9,6850	9,6902
94	9,6954	9,7005	9,7057	9,7108	9,7160	9,7211	9,7263	9,7314	9,7365	9,7417
95	9,7468	9,7519	9,7570	9,7622	9,7673	9,7724	9,7775	9,7826	9,7877	9,7929
96	9,7980	9,8031	9,8082	9,8133	9,8184	9,8234	9,8285	9,8336	9,8387	9,8438
97	9,8489	9,8539	9,8590	9,8641	9,8691	9,8742	9,8793	9,8843	9,8894	9,8944
98	9,8995	9,9045	9,9096	9,9146	9,9197	9,9247	9,9298	9,9348	9,9398	9,9448
99	9,9499	9,9549	9,9599	9,9649	9,9700	9,9750	9,9800	9,9850	9,9900	9,9950

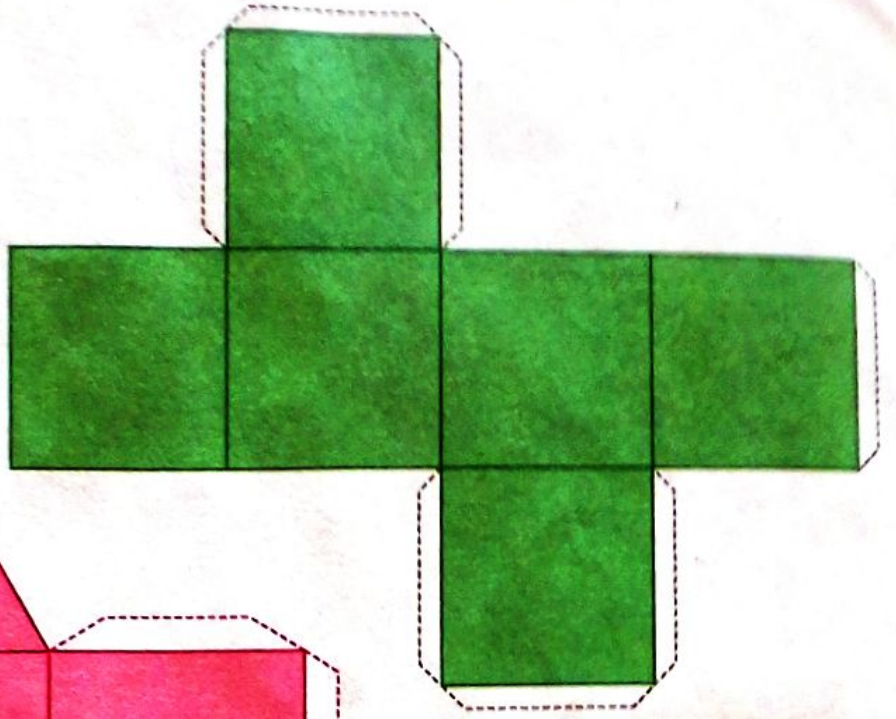
Tábua de raízes cúbicas: números 0 a 499

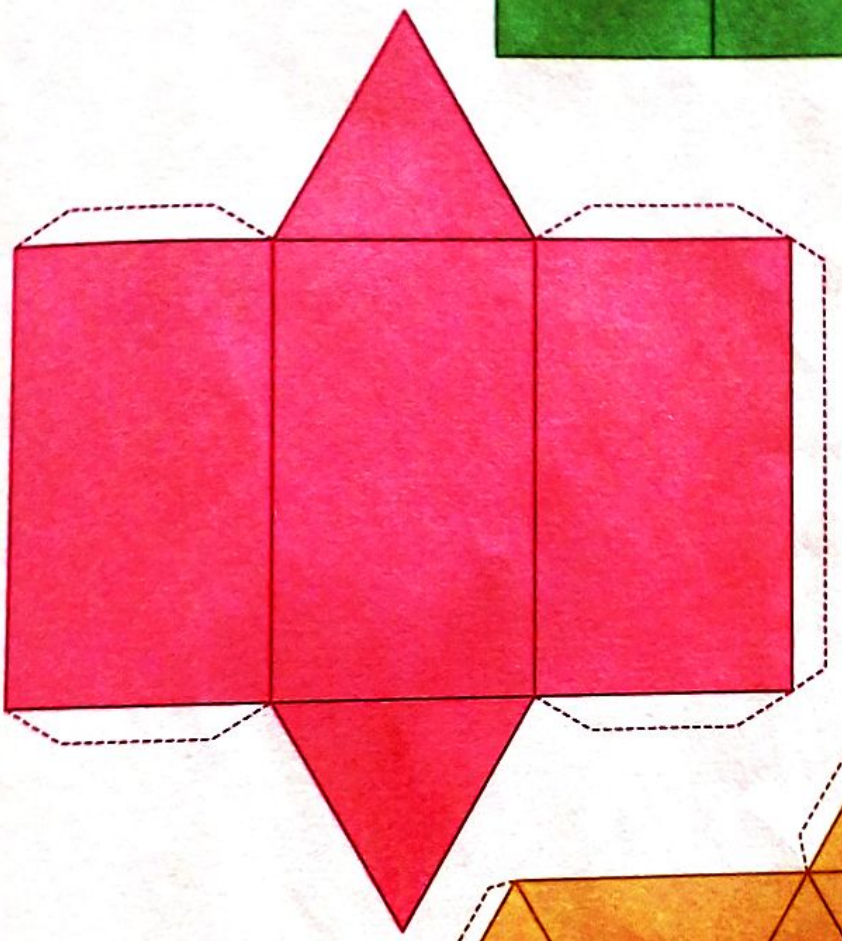
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	1,0000	1,2599	1,4422	1,5874	1,7100	1,8171	1,9129	2,0000	2,0801
1	2,1544	2,2240	2,2894	2,3513	2,4101	2,4662	2,5198	2,5713	2,6207	2,6684
2	2,7144	2,7589	2,8020	2,8439	2,8845	2,9240	2,9625	3,0000	3,0366	3,0723
3	3,1072	3,1414	3,1748	3,2075	3,2396	3,2711	3,3019	3,3322	3,3620	3,3912
4	3,4200	3,4482	3,4760	3,5034	3,5303	3,5569	3,5830	3,6088	3,6342	3,6593
5	3,6840	3,7084	3,7325	3,7563	3,7798	3,8030	3,8259	3,8485	3,8709	3,8930
6	3,9149	3,9365	3,9579	3,9791	4,0000	4,0207	4,0412	4,0615	4,0817	4,1016
7	4,1213	4,1408	4,1602	4,1793	4,1983	4,2172	4,2358	4,2543	4,2727	4,2908
8	4,3089	4,3267	4,3445	4,3621	4,3795	4,3968	4,4140	4,4310	4,4480	4,4647
9	4,4814	4,4979	4,5144	4,5307	4,5468	4,5629	4,5789	4,5947	4,6104	4,6261
10	4,6416	4,6570	4,6723	4,6875	4,7027	4,7177	4,7326	4,7475	4,7622	4,7769
11	4,7914	4,8059	4,8203	4,8346	4,8488	4,8629	4,8770	4,8910	4,9049	4,9187
12	4,9324	4,9461	4,9597	4,9732	4,9866	5,0000	5,0133	5,0265	5,0397	5,0528
13	5,0658	5,0788	5,0916	5,1045	5,1172	5,1299	5,1426	5,1551	5,1676	5,1801
14	5,1925	5,2048	5,2171	5,2293	5,2415	5,2536	5,2656	5,2776	5,2896	5,3015
15	5,3133	5,3251	5,3368	5,3485	5,3601	5,3717	5,3832	5,3947	5,4061	5,4175
16	5,4288	5,4401	5,4514	5,4626	5,4737	5,4848	5,4959	5,5069	5,5178	5,5288
17	5,5397	5,5505	5,5613	5,5721	5,5828	5,5934	5,6041	5,6147	5,6252	5,6357
18	5,6462	5,6567	5,6671	5,6774	5,6877	5,6980	5,7083	5,7185	5,7287	5,7388
19	5,7489	5,7590	5,7690	5,7790	5,7890	5,7989	5,8088	5,8186	5,8285	5,8383
20	5,8480	5,8578	5,8675	5,8771	5,8868	5,8964	5,9059	5,9155	5,9250	5,9345
21	5,9439	5,9533	5,9627	5,9721	5,9814	5,9907	6,0000	6,0092	6,0185	6,0277
22	6,0368	6,0459	6,0550	6,0641	6,0732	6,0822	6,0912	6,1002	6,1091	6,1180
23	6,1269	6,1358	6,1446	6,1534	6,1622	6,1710	6,1797	6,1885	6,1972	6,2058
24	6,2145	6,2231	6,2317	6,2403	6,2488	6,2573	6,2658	6,2743	6,2828	6,2912
25	6,2996	6,3080	6,3164	6,3247	6,3330	6,3413	6,3496	6,3579	6,3661	6,3743
26	6,3825	6,3907	6,3988	6,4070	6,4151	6,4232	6,4312	6,4393	6,4473	6,4553
27	6,4633	6,4713	6,4792	6,4872	6,4951	6,5030	6,5108	6,5187	6,5265	6,5343
28	6,5421	6,5499	6,5577	6,5654	6,5731	6,5808	6,5885	6,5962	6,6039	6,6115
29	6,6191	6,6267	6,6343	6,6419	6,6494	6,6569	6,6644	6,6719	6,6794	6,6869
30	6,6943	6,7018	6,7092	6,7166	6,7240	6,7313	6,7387	6,7460	6,7533	6,7606
31	6,7679	6,7752	6,7824	6,7897	6,7969	6,8041	6,8113	6,8185	6,8256	6,8328
32	6,8399	6,8470	6,8541	6,8612	6,8683	6,8753	6,8824	6,8894	6,8964	6,9034
33	6,9104	6,9174	6,9244	6,9313	6,9382	6,9451	6,9521	6,9589	6,9658	6,9727
34	6,9795	6,9864	6,9932	7,0000	7,0068	7,0136	7,0203	7,0271	7,0338	7,0406
35	7,0473	7,0540	7,0607	7,0674	7,0740	7,0807	7,0873	7,0940	7,1006	7,1072
36	7,1138	7,1204	7,1269	7,1335	7,1400	7,1466	7,1531	7,1596	7,1661	7,1726
37	7,1791	7,1855	7,1920	7,1984	7,2048	7,2112	7,2177	7,2240	7,2304	7,2368
38	7,2432	7,2495	7,2558	7,2622	7,2685	7,2748	7,2811	7,2874	7,2936	7,2999
39	7,3061	7,3124	7,3186	7,3248	7,3310	7,3372	7,3434	7,3496	7,3558	7,3619
40	7,3681	7,3742	7,3803	7,3864	7,3925	7,3986	7,4047	7,4108	7,4169	7,4229
41	7,4290	7,4350	7,4410	7,4470	7,4530	7,4590	7,4650	7,4710	7,4770	7,4829
42	7,4889	7,4948	7,5007	7,5067	7,5126	7,5185	7,5244	7,5302	7,5361	7,5420
43	7,5478	7,5537	7,5595	7,5654	7,5712	7,5770	7,5828	7,5886	7,5944	7,6001
44	7,6059	7,6117	7,6174	7,6232	7,6289	7,6346	7,6403	7,6460	7,6517	7,6574
45	7,6631	7,6688	7,6744	7,6801	7,6857	7,6914	7,6970	7,7026	7,7082	7,7138
46	7,7194	7,7250	7,7306	7,7362	7,7418	7,7473	7,7529	7,7584	7,7639	7,7695
47	7,7750	7,7805	7,7860	7,7915	7,7970	7,8025	7,8079	7,8134	7,8188	7,8243
48	7,8297	7,8352	7,8406	7,8460	7,8514	7,8568	7,8622	7,8676	7,8730	7,8784
49	7,8837	7,8891	7,8944	7,8998	7,9051	7,9105	7,9158	7,9211	7,9264	7,9317

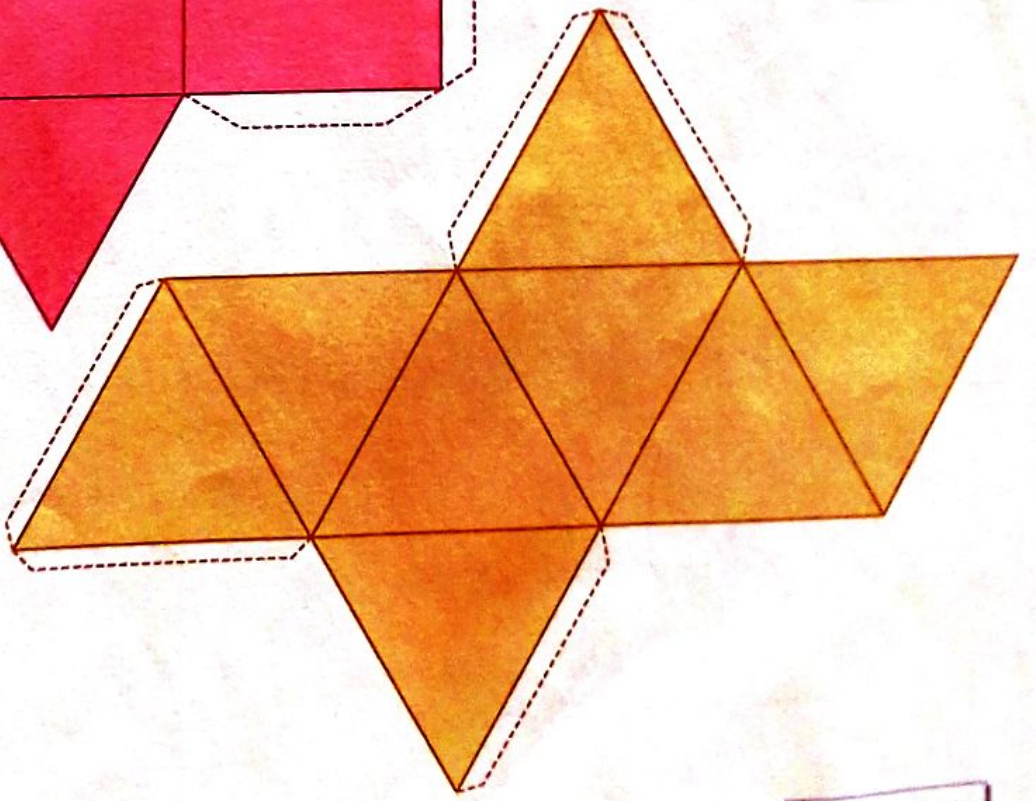
Tábua de quadrados: números 0 a 499

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1 024	1 089	1 156	1 225	1 296	1 369	1 444	1 521
4	1 600	1 681	1 764	1 849	1 936	2 025	2 116	2 209	2 304	2 401
5	2 500	2 601	2 704	2 809	2 916	3 025	3 136	3 249	3 364	3 481
6	3 600	3 721	3 844	3 969	4 096	4 225	4 356	4 489	4 624	4 761
7	4 900	5 041	5 184	5 329	5 476	5 625	5 776	5 929	6 084	6 241
8	6 400	6 561	6 724	6 889	7 056	7 225	7 396	7 569	7 744	7 921
9	8 100	8 281	8 464	8 649	8 836	9 025	9 216	9 409	9 604	9 801
10	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881
11	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161
12	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641
13	16 900	17 161	17 424	17 689	17 956	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321
14	19 600	19 881	20 164	20 449	20 736	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201
15	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281
16	25 600	25 921	26 244	26 569	26 896	27 225	27 556	27 889	28 224	28 561
17	28 900	29 241	29 584	29 929	30 276	30 625	30 976	31 329	31 684	32 041
18	32 400	32 761	33 124	33 489	33 856	34 225	34 596	34 969	35 344	35 721
19	36 100	36 481	36 864	37 249	37 636	38 025	38 416	38 809	39 204	39 601
20	40 000	40 401	40 804	41 209	41 616	42 025	42 436	42 849	43 264	43 681
21	44 100	44 521	44 944	45 369	45 796	46 225	46 656	47 089	47 524	47 961
22	48 400	48 841	49 284	49 729	50 176	50 625	51 076	51 529	51 984	52 441
23	52 900	53 361	53 824	54 289	54 756	55 225	55 696	56 169	56 644	57 121
24	57 600	58 081	58 564	59 049	59 536	60 025	60 516	61 009	61 504	62 001
25	62 500	63 001	63 504	64 009	64 516	65 025	65 536	66 049	66 564	67 081
26	67 600	68 121	68 644	69 169	69 696	70 225	70 756	71 289	71 824	72 361
27	72 900	73 441	73 984	74 529	75 076	75 625	76 176	76 729	77 284	77 841
28	78 400	78 961	79 524	80 089	80 656	81 225	81 796	82 369	82 944	83 521
29	84 100	84 681	85 264	85 849	86 436	87 025	87 616	88 209	88 804	89 401
30	90 000	90 601	91 204	91 809	92 416	93 025	93 636	94 249	94 864	95 481
31	96 100	96 721	97 344	97 969	98 596	99 225	99 856	100 489	101 124	101 761
32	102 400	103 041	103 684	104 329	104 976	105 625	106 276	106 929	107 584	108 241
33	108 900	109 561	110 224	110 889	111 556	112 225	112 896	113 569	114 244	114 921
34	115 600	116 281	116 964	117 649	118 336	119 025	119 716	120 409	121 104	121 801
35	122 500	123 201	123 904	124 609	125 316	126 025	126 736	127 449	128 164	128 881
36	129 600	130 321	131 044	131 769	132 496	133 225	133 956	134 689	135 424	136 161
37	136 900	137 641	138 384	139 129	139 876	140 625	141 376	142 129	142 884	143 641
38	144 400	145 161	145 924	146 689	147 456	148 225	148 996	149 769	150 544	151 321
39	152 100	152 881	153 664	154 449	155 236	156 025	156 816	157 609	158 404	159 201
40	160 000	160 801	161 604	162 409	163 216	164 025	164 836	165 649	166 464	167 281
41	168 100	168 921	169 744	170 569	171 396	172 225	173 056	173 889	174 724	175 561
42	176 400	177 241	178 084	178 929	179 776	180 625	181 476	182 329	183 184	184 041
43	184 900	185 761	186 624	187 489	188 356	189 225	190 096	190 969	191 844	192 721
44	193 600	194 481	195 364	196 249	197 136	198 025	198 916	199 809	200 704	201 601
45	202 500	203 401	204 304	205 209	206 116	207 025	207 936	208 849	209 764	210 681
46	211 600	212 521	213 444	214 369	215 296	216 225	217 156	218 089	219 024	219 961
47	220 900	221 841	222 784	223 729	224 676	225 625	226 576	227 529	228 484	229 441
48	230 400	231 361	232 324	233 289	234 256	235 225	236 196	237 169	238 144	239 121
49	240 100	241 081	242 064	243 049	244 036	245 025	246 016	247 009	248 004	249 001

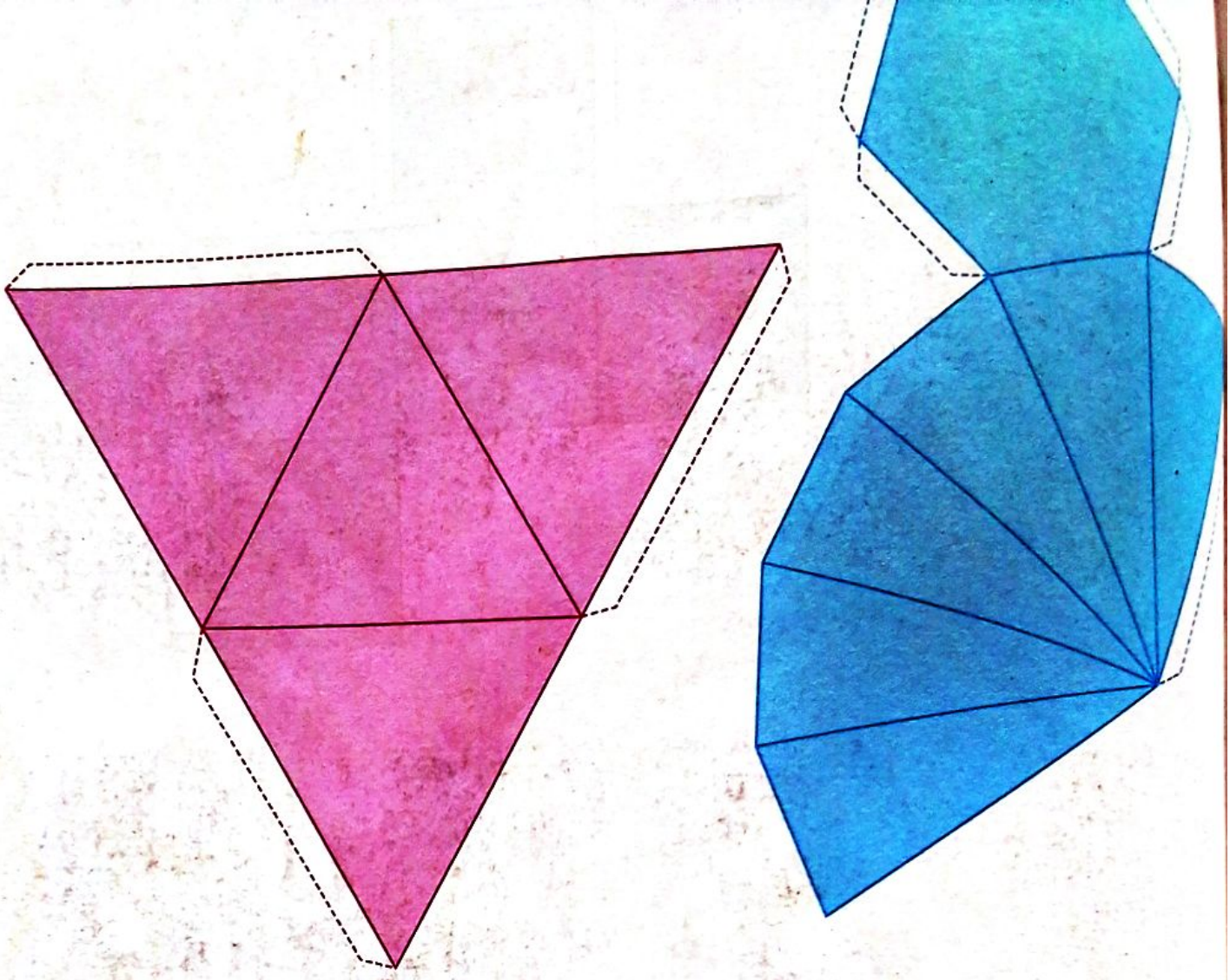
PLANIFICAÇÕES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

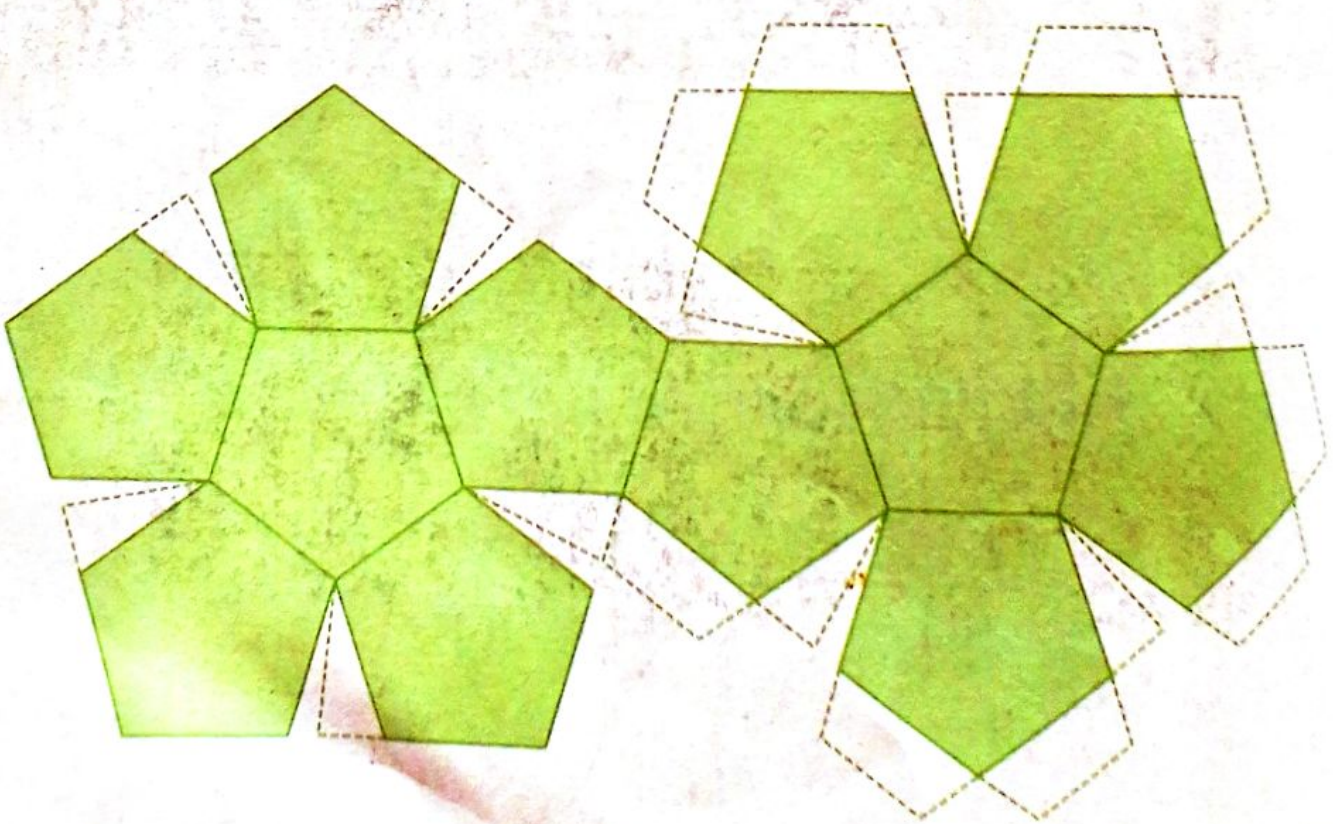






Copie-o e planifique-o. → Cole-o em cartolina. → Recorte a cartolina. → Construa o sólido geométrico.





Copie-o e planifique-o. → Cole-o em cartolina. → Recorte a cartolina. → Construa o sólido geométrico

Símbolos da República de Moçambique

BANDEIRA

EMBLEMA

HINO NACIONAL

Pátria Amada

Na memória de África e do Mundo,
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará

Coro
Moçambique nossa terra gloriosa
pedra a pedra construindo o novo dia
milhões de braços, uma só força
ó pátria amada vamos vencer!

Povo unido do Rovuma ao Maputo
colhe os frutos do combate pela Paz
cresce o sonho ondulando na Bandeira
e vai lavrando na certeza do amanhã

Flores brotando do chão do teu suor
pelos montes, pelos rios, pelo mar
nós juramos por ti, ó Moçambique:
nenhum tirano nos irá escravizar

9.ª classe

Matemática

Heitor Langa / Neto João Chuquela

LIVRO DO ALUNO

www.pluraleditores.co.mz

0957 13 13

789896 111458