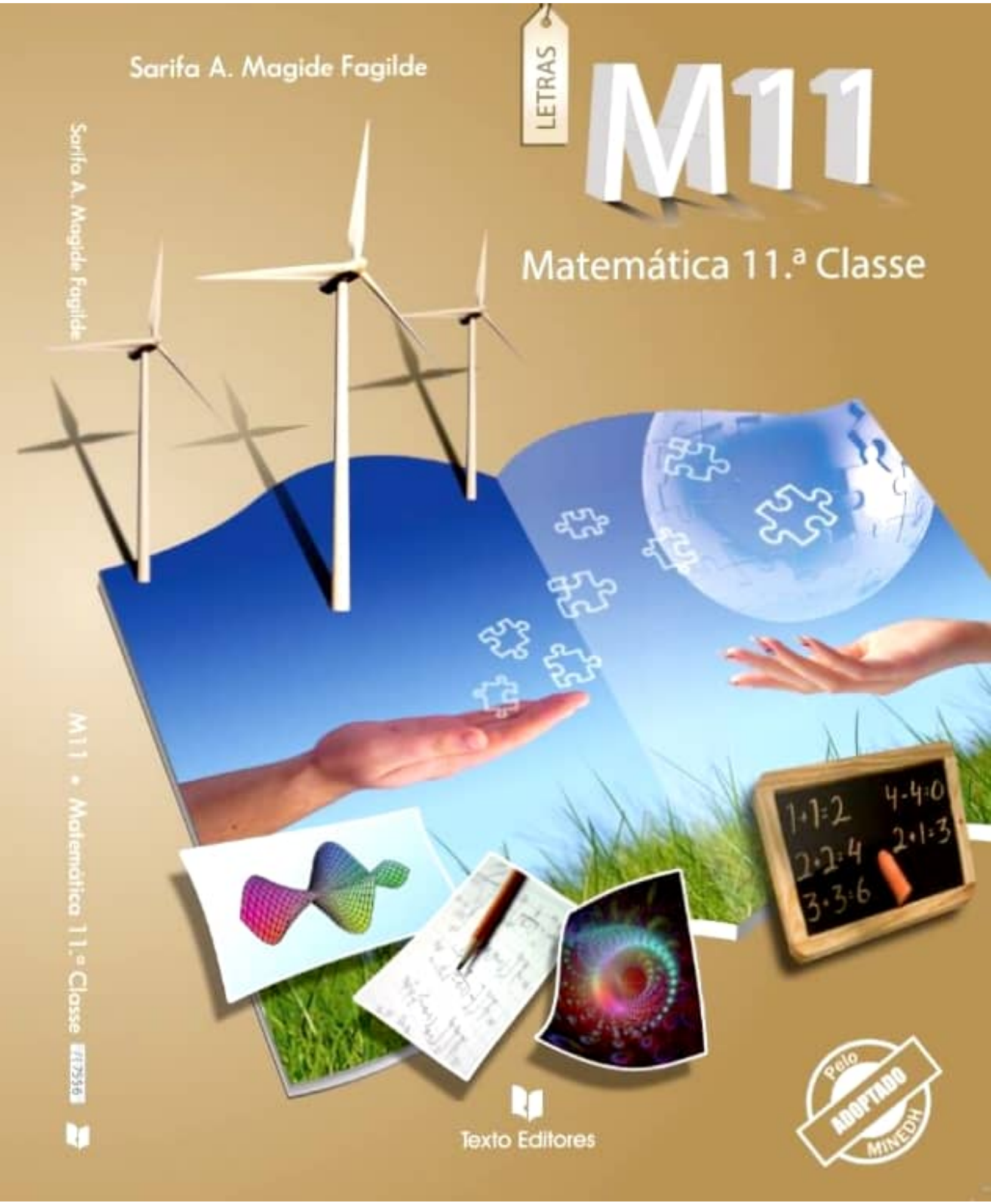


Digitalizada com CamScanner

Índice

Unidade 1: Introdução à Logica Matemática



Notas históricas 8
Noção de lógica 9
Termos e proposições 9
Operações lógicas sobre proposições 12
Condições universais e condições impossíveis 17
Operações lógicas sobre condições 17
Quantificação 20
Segundas Leis de De Morgan 22
Princípio de indução matemática 22
Exercícios resolvidos 24
Exercícios propostos 30

Unidade 2: Álgebra



Notas históricas 34
Álgebra 35
Transformações idênticas 35
Expressões algébricas 35
Identidades notáveis 37
Fracções racionais 37
Racionalização de denominadores 39
Equações 40
Conceitos gerais e equivalência de equações 40
Equações do 2.º grau 41
Equações do 3.º grau 43
Equações que se reduzem à equação quadrática 46
Equações do tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, onde n é um número natural maior que 3 47
Equações irracionais 47
Inequações irracionais 49
Resolução de inequações 50
Sistemas de equações 55
Sistemas de duas equações 55
Sistemas de três equações a três incógnitas 60
Exercícios resolvidos 65
Exercícios propostos 69

Unidade 3: Equações e Inequações Exponenciais



Notas históricas 72
Noção de equação exponencial 73
Propriedades de função exponencial 74
Transformação de gráficos de função exponencial 74
Equações exponenciais 76
Inequações exponenciais 77
Aplicação das equações exponenciais à vida real 77
Sistemas de equações envolvendo funções exponenciais 79
Exercícios resolvidos 80
Exercícios propostos 83

Digitalizada com CamScanner

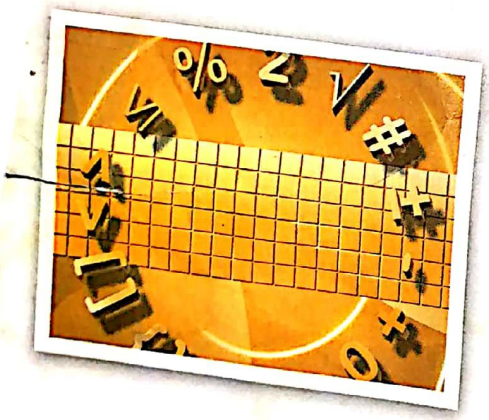
Índice

Unidade 4: Equações e Inequações Logarítimicas



Notas históricas 86
Noção de equação logarítmica 87
Função logarítmica 88
Propriedades da função logarítmica 90
Transformações dos gráficos das funções logarítmicas 90
Noção de característica e de mantissa de um logaritmo de base 10 91
Noção de antilogaritmo e de cologaritmo 92
Equações e inequações logarítmicas 93
Aplicação das equações logarítmicas à vida real 95
Exercícios resolvidos 97
Exercícios propostos 99

Unidade 5: Geometria Analítica no Plano



Notas históricas 102
Geometria analítica 103
Conceitos gerais sobre vectores 103
Igualdade de vectores 104
Colinearidade de vectores 104
Projecção de um vector sobre outro vector 105
Operações lineares 106
Adição de dois vectores 106
Diferença entre dois vectores 107
Mulplicação de um escalar por um vector 107
Decomposição de um vector em vectores da base 108
Ângulo entre dois vectores 109
Produto interno de vectores 110
Divisão de um segmento numa razão dada 114
Equação vectorial da recta no plano 116
Equação reduzida da recta 117
Equação de uma recta dados um ponto e o declive 119
Equação de recta que passa por dois pontos 120
Posição relativa de duas rectas 121
Condição de paralelismo de duas rectas 121
Condição de perpendicularidade 122
Distância de um ponto a uma recta no plano 123
Equação da bissectriz 125
Circunferência 126
Equação da circunferência 126
Elipse 128
Equação da elipse 128
Hipérbole 129
Equação da hipérbole 132
Exercícios resolvidos 133
Exercícios propostos 137

Digitalizada com CamScanner

Unidade 6: Funções, Equações e Inequações Trigonométricas

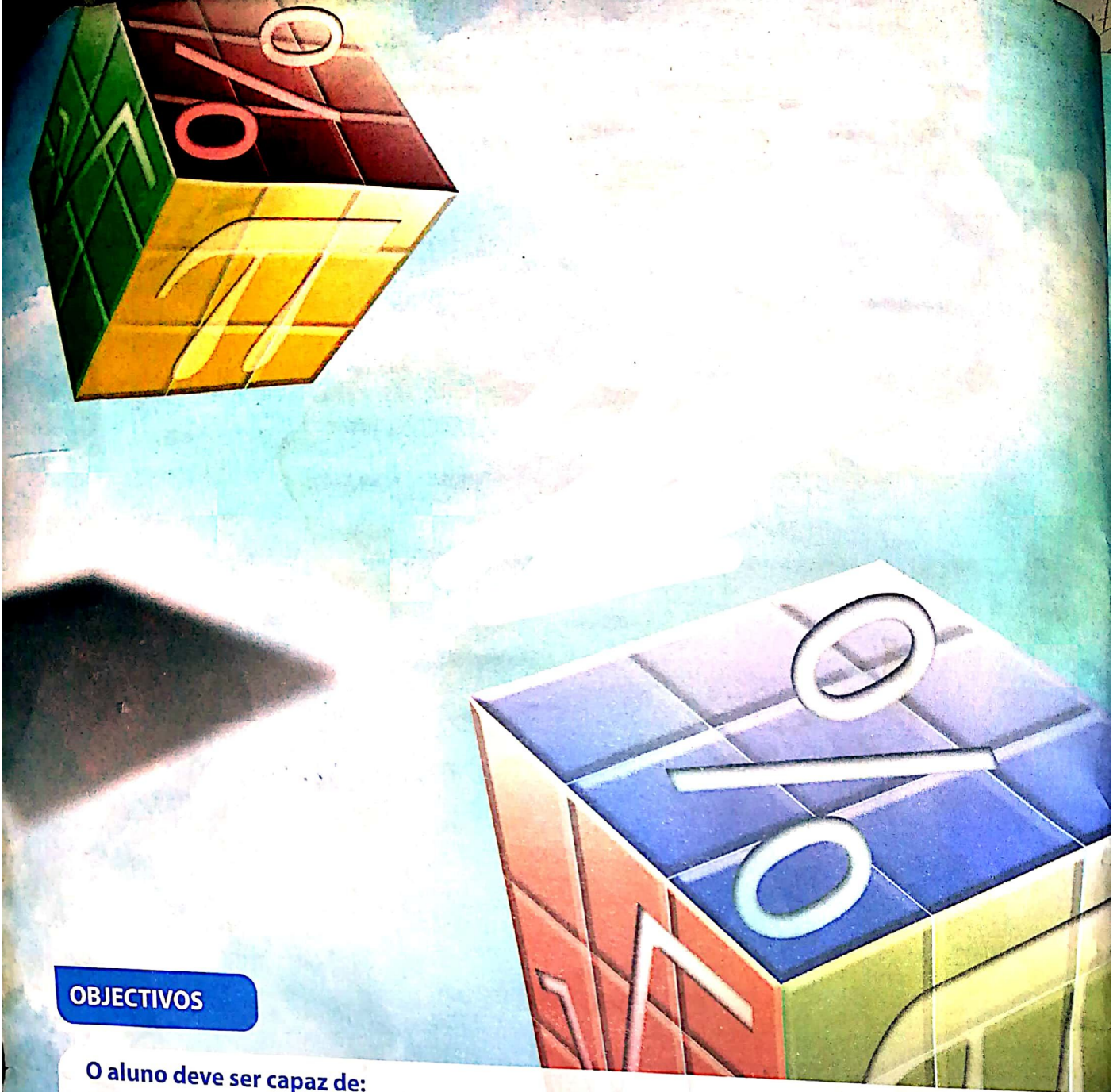
Notas históricas 146
Revisão de conceitos básicos 147
Linhas trigonométricas 148
Sinal das razões trigonométricas 149
Razões trigonométricas num triângulo rectângulo 150
Representações gráficas das funções trigonométricas 152
Período de uma função trigonométrica 154
Transformações dos gráficos das funções trigonométricas ... 155
Resolução de triângulos: Fórmula dos senos e dos co-senos .. 158
Relações fundamentais da Trigonometria 161
Redução de um ângulo ao 1.º quadrante 162
Transformações de expressões trigonométricas 163
Fórmulas da soma e da diferença 163
Fórmulas do ângulo duplo 165
Fórmulas de soma e do produto 165
Equações e inequações trigonométricas 166
Equações quadráticas 171
Exercícios resolvidos 172
Exercícios propostos 174

Soluções 176

Bibliografia 183



Digitalizada com CamScanner

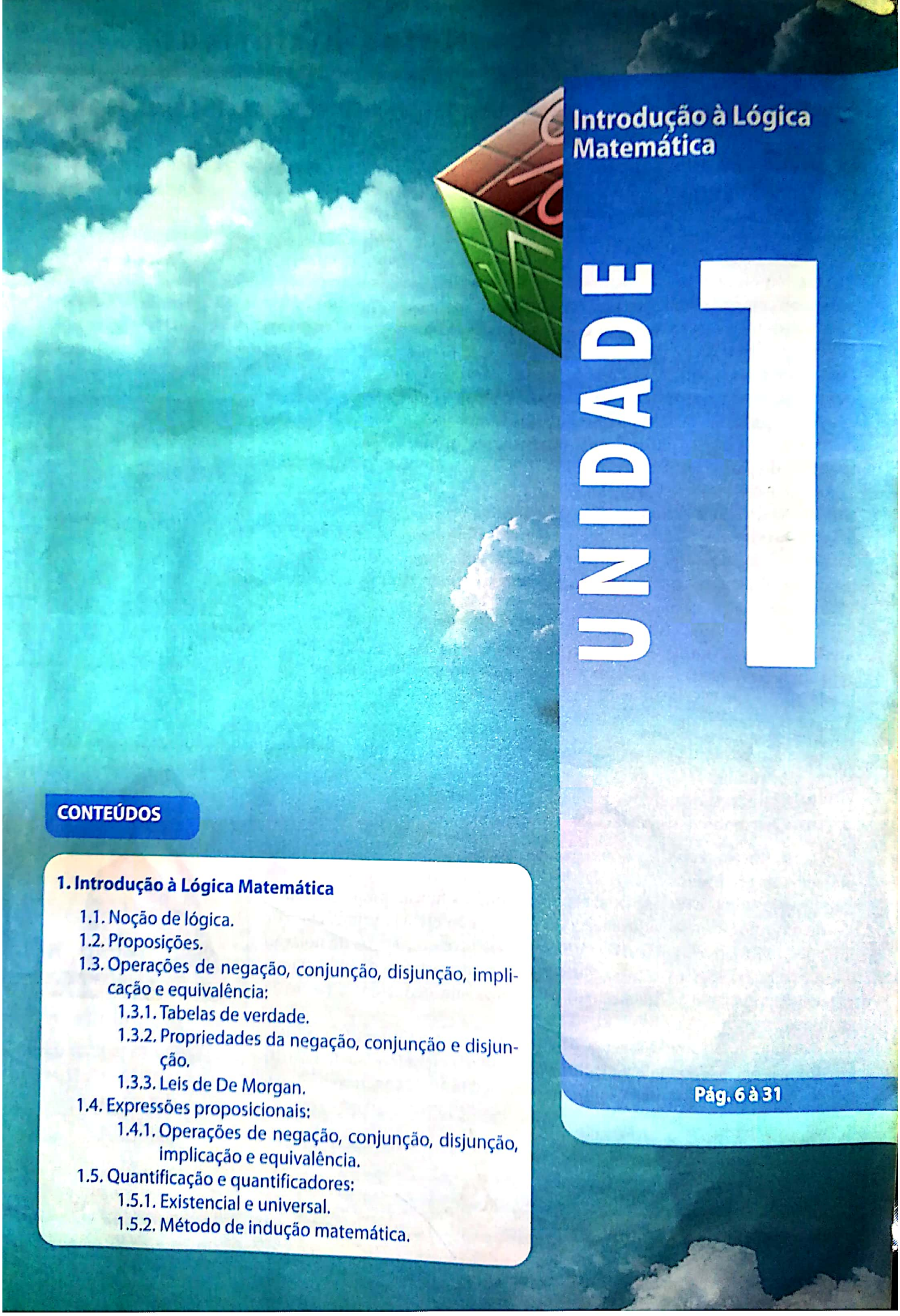


OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar proposições.
- Atribuir o valor lógico correcto a uma proposição.
- Aplicar as propriedades de negação, disjunção e conjunção.
- Demonstrar as propriedades através de tabelas de verdade.
- Interpretar as Leis de De Morgan.
- Aplicar as Leis de De Morgan na resolução de problemas.
- Distinguir a expressão proposicional de uma proposição.
- Provar com as tabelas de verdade as propriedades de negação, conjunção e disjunção.
- Operar com a negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência.
- Aplicar os quantificadores na tradução de expressões correntes em expressões quantificadas e vice-versa.
- Explicar os métodos de demonstração de teoremas por indução matemática.
- Aplicar os métodos de demonstração de teoremas por indução matemática.

Digitalizada com CamScanner



UNIDADE 1

Introdução à Lógica Matemática

Pág. 6 à 31

CONTEÚDOS

1. Introdução à Lógica Matemática

1.1. Noção de lógica.
1.2. Proposições.
1.3. Operações de negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência:
  1.3.1. Tabelas de verdade.
  1.3.2. Propriedades da negação, conjunção e disjunção.
  1.3.3. Leis de De Morgan.
1.4. Expressões proposicionais:
  1.4.1. Operações de negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência.
1.5. Quantificação e quantificadores:
  1.5.1. Existencial e universal.
  1.5.2. Método de indução matemática.

Digitalizada com CamScanner

1 Notas históricas

Aristóteles sistematizou o estudo das condições que permitem afirmar que um determinado raciocínio é correcto e definiu a lógica como a conhecemos hoje, constituindo-a como uma ciência autónoma.

A sua lógica tinha essencialmente um objectivo metodológico: mostrar o caminho correcto para a pesquisa, o conhecimento e a demonstração científica.

Foi na Idade Média (Sécs. XIII a XV) que foram realizados grandes progressos na lógica de Aristóteles. Ela tornou-se mais sistemática e mais progressiva. Tida como a «ciência» de todas as ciências, ela tinha por competência validar os actos da razão humana na procura da Verdade, através de um pensamento dedutivo. Procurava-se encontrar a explicação para todos os fenómenos particulares.

Já no século XVI, os métodos dedutivos preconizados pela lógica de Aristóteles começam a ser questionados e a ser postos em causa. A ideia de partir do Universal para o particular, deixa de existir, rompendo assim com estudos seculares da lógica dedutiva. As regras do raciocínio passaram a ser fundamentadas de forma indutiva e a investigação científica, conduzida da melhor forma, torna-se numa ascensão gradual indutiva, do particular para o geral.


Gottfried W. Leibniz (1646-1716)

O filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), figura de destaque na história da lógica, foi quem procurou aplicar à lógica, o modelo de cálculo algébrico da sua época. Neste projecto de Leibniz, o raciocínio torna-se susceptível de ser efectuado por uma máquina organizada para o efeito. Foi esta a ideia inspiradora não só para o desenvolvimento da lógica mas também para a criação de máquinas inteligentes.

No século XIX, século de uma verdadeira revolução para a lógica, investigadores de formação matemática concebem não só uma nova linguagem simbólica, mas também uma forma de transformar a lógica numa álgebra. É nessa altura que George Boole (1815-1864) cria a Lógica Matemática, sendo tratada como um cálculo de signos algébricos. Esta Álgebra Booleana torna-se uma base para:

i) A afirmação de que existia uma infinidade de raciocínios válidos e uma infinidade de raciocínios não válidos.
ii) A teoria de conjuntos.
iii) O desenho dos circuitos nos computadores electrónicos modernos.


Giuseppe Peano (1858-1932)

Já no fim do sec. XIX, são criados os sistemas para os cálculos, proposicional e de predicados. Frenge (1848-1925), o primeiro a apresentar o cálculo proposicional na forma moderna, introduziu a função proposicional, o uso de quantificadores e a formação de regras de inferência primitivas. Por outro lado Giuseppe Peano (1858-1932) desenvolveu o sistema de notação empregue pelos lógicos e matemáticos e demonstrou que os enunciados matemáticos não são obtidos por intuição, mas sim deduzidos a partir de premissas.

Por último, ao longo do séc. XX, assistiu-se a uma diversificação dos estudos da Lógica Matemática e a mesma atinge um elevado grau de formalização, passando a possuir um sistema completo de símbolos e regras para a obtenção de conclusões válidas.

Digitalizada com CamScanner

Noção de lógica

A lógica é uma ciência de índole matemática, fortemente ligada à filosofia. Ela cuida das regras do bem pensar, ou do pensar corrente, sendo, portanto, instrumento do pensar. A sua aprendizagem não é um fim em si, pois ela só tem sentido enquanto meio de garantir que o nosso pensamente proceda correctamente a fim de chegar a conhecimentos verdadeiros. Ela constituiu um meio auxiliar dos estudantes no raciocínio, na compreensão de conceitos básicos, na verificação formal de programas e preparação para melhor compreensão de conteúdos mais avançados. Estudemos pois alguns conceitos de lógica matemática.

Termos e proposições

Em qualquer língua, os nomes e frases constituem os dois tipos principais de expressões, que podem ou não ter significado. Evidentemente, interessam-nos expressões com significado.

As expressões com significado podem ser:

- Termos, nomes ou designações.
- Frases ou proposições.

Os termos ou designações são expressões que nomeiam ou designam coisas, pessoas, números, etc. Quando diferentes termos designam o mesmo objecto, como, por exemplo, $7 - 3$ e 4 os termos dizem-se equivalentes.

Para se exprimir que duas designações são iguais ou referem-se ao mesmo objecto, usa-se o sinal $=$ entre elas.

Para se exprimir que duas designações não se referem ao mesmo objecto usa-se o sinal $\neq$ entre elas.

Exemplos

1. São termos matemáticos, as expressões: 5; $5 + 1$; $\sqrt{3}$; e; $\frac{2}{7}$; 3,2; 4^5; etc.
2. Duas designações iguais: $7 - 3 = 4$ (lê-se $7 - 3$ é igual a 4).
3. Duas designações diferentes: $7 - 3 \neq 3 - 7$ (lê-se: $7 - 3$ é diferente de $3 - 7$).
4. São proposições ou frases em Matemática, as expressões:
   - «O número sete é maior que o número cinco mas menor que o número nove» simbolicamente $5 < 7 < 9$.
   - «O triângulo é igual à circunferência» simbolicamente $\triangle = \bigcirc$.

Chama-se proposição a toda a expressão a respeito da qual faz sentido dizer que é verdadeira ou falsa.

As proposições exprimem juízos que formamos relativamente aos objectos ou afirmam factos, isto é, transmitem pensamentos.

1

Considere as seguintes expressões:

Lua,

$4 + e$,

Maputo,

π,

Sol,

$\frac{1}{5}$,

$\sqrt[3]{8}$.

Quais de entre elas representam termos matemáticos?

2

Das expressões que se seguem indique as que são equivalentes:

A. $\pi + 3{,}5$

B. $-\frac{7}{2} + \pi$

C. $\pi^2 + 3$

D. $\frac{7}{2} + \pi$

E. $\pi^2 + \sqrt{9}$

F. $\sqrt{9} + \pi^2$

Digitalizada com CamScanner

Distinção entre o designado e a designação

Em geral, quando se pretende designar uma expressão ela é escrita entre aspas, para evitar ambiguidades. Quando, por exemplo, escrevemos:

- «6» é um algarismo árabe.
- 6 é um número par.

No primeiro caso referimo-nos a um símbolo (designação) e no segundo caso ao número designado por esse símbolo o qual também pode ser designado pelo símbolo: «4 + 2» ou a palavra «seis».

Contudo, não havendo qualquer perigo de confusão, as aspas podem ser omitidas.

3

Dê exemplo de uma designação e do correspondente designado.

Valor lógico das proposições

Como foi definido, as proposições dizem-se verdadeiras ou falsas.

Exemplos

Dizemos que são verdadeiras, por exemplo, as proposições:

1. «Quatro mais três é igual a sete».
2. «$2 < 5 < 15$».
3. «Quinze não é um número primo».

Em geral indica-se que uma proposição é verdadeira com a ajuda da letra V ou do número um (1) e que é falsa com a ajuda da letra F ou do número zero (0). Nestes casos, as letras V e F e os números 1 e 0, designam-se por valores lógicos.

Há, no entanto, expressões a respeito das quais não é possível dizermos se são verdadeiras ou falsas, como, por exemplo, «$\frac{x}{2} = 7$»; esta expressão para algum valor de x é verdadeira, mas para outros é falsa.

«15 é um número pequeno»; esta expressão suscita algumas dúvidas. Algumas pessoas podem considerá-la verdadeira e outras falsa.

Ora a Matemática que aspira a um rigor de linguagem de modo a que se evitem tais expressões duvidosas, imprecisas ou incompletas, adopta em particular para a Lógica Matemática dois princípios ou Axiomas:

4

Considere as seguintes expressões:

i. «O número 4 é divisor do número x».

ii. «$x > 15$»

iii. «$(x - 5)^2 < 15$»

iv. «x é um número primo»

Determine o seu valor lógico para os valores de x:

a) $x = 7$

b) $x = 15$

c) $x = 19$

Princípio da não contradição – uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.
Princípio do terceiro excluído – uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, não existe terceira possibilidade.

Os princípios da não contradição e do terceiro excluído afirmam que toda a proposição tem um e somente um dos valores lógicos V ou F.

Digitalizada com CamScanner

Representamos os resultados que obtemos das proposições através de tabelas designadas por tabelas de verdade.

Tabela 1

N.º da proposição	Valor lógico
(1)	V
(2)	V
(3)	F
(4)	V
(5)	F

A tabela 1 representa os valores lógicos de cinco proposições designadas pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Podemos, no entanto, reescrever esta mesma tabela colocando os números 1 ou 0 no lugar das letras V e F respectivamente, conforme a tabela 2.

Tabela 2

N.º da proposição	Valor lógico
(1)	1
(2)	1
(3)	0
(4)	1
(5)	0

Nota:

Nas tabelas 1 e 2 os números das proposições surgem entre parêntesis curvos como forma de evitar que se confundam com os valores lógicos 1 e 0.

Como acima mencionamos, há expressões nas quais substituindo a letra por um número a expressão torna-se verdadeira ou falsa. São expressões do tipo:

Exemplos

a) «o número três é divisor do número x».

b) «x é um número impar».

Se substituirmos a letra x pelo número 15 nas expressões, obtemos proposições verdadeiras, mas se substituirmos pelo número 30 a proposição a) torna-se verdadeira e a proposição b) torna-se falsa.

As expressões deste tipo designam-se por expressões proposicionais, condições (ou proposições).

Chama-se condição ou expressão proposicional a toda a expressão com variáveis que se pode transformar numa proposição, quando são substituídas as variáveis por valores, nos respectivos domínios.

Digitalizada com CamScanner

Operações lógicas sobre proposições

Muitas vezes, ao pensarmos, efectuamos certas operações sobre proposições, designadas por operações lógicas. Estudemos, pois, as principais operações lógicas:

Negação de proposições

5

a) Formule a negação das proposições seguintes:

p: 325 é um número par.

q: O número 21 é um número positivo.

r: O número $\sqrt{3}$ é um número racional

b) Indique se as proposições p, q e r ou suas negações são verdadeiras.

A **negação** é a operação lógica mais simples que consiste em converter uma dada proposição numa outra que é verdadeira se a primeira é falsa e é falsa se a primeira é verdadeira.

Simbolicamente a negação é indicada antepondo o símbolo «$\sim$» que se pode ler *não é verdade que*.

Assim a negação de «quatro mais três é igual a nove» escreve-se:

«$\sim$ quatro mais três é igual a nove», que se pode ler «não é verdade que quatro mais três é igual a nove».

Do mesmo modo, a negação da proposição «$(7 > 3 + 5)$» (Falsa) é a proposição «$\sim(7 > 3 + 5)$» (Verdadeira) que se pode ler «não é verdade que 7 é maior que $3 + 5$» ou simplesmente «7 não é maior que $2 + 5$» ou ainda «7 é menor que $2 + 5$».

A negação pode ser ilustrada com a ajuda da tabela de verdade:

Tabela 3

Valor lógico da proposição p	Valor lógico da proposição $\sim p$
V	F
F	V

6

Dadas as proposições:

A. $2 + 7 = 9 \wedge \sqrt{25} = 2$

B. $2 + 7 = 9 \wedge \pi > 4$

C. $\sqrt{15} \neq 4 \wedge \pi < 3{,}17$

D. $5 < 1 \wedge \sqrt{-9} = -3$

E. $17 > || \wedge \pi = 4$

Determine os seus valores lógicos.

Conjunção de proposições

Ao estudarmos alguns objectos matemáticas constatamos que o mesmo objecto pode ter simultaneamente propriedades diferentes. Por exemplo:

«O triângulo [ABC] tem os ângulos A e C iguais e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ iguais».

Esta proposição é verdadeira se as proposições «o triângulo [ABC] tem os ângulos A e C iguais» e «o triângulo [ABC] tem os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ iguais» são verdadeiras.

Se uma das proposições referidas for falsa, então a proposição dada será falsa.

Vejamos «$2 + 3 = 5$ e $\pi > 4$». A proposição $2 + 3 = 5$ é verdadeira, mas a proposição $\pi > 4$ é falsa. Então, a proposição $2 + 3 = 5$ e $\pi > 4$ é falsa.

Designemos as proposições que intervêm na proposição dada por p e q respectivamente e a expressão considerada por $p \wedge q$, onde o símbolo $\wedge$ lê-se «e».

Digitalizada com CamScanner

Conforme mencionado a proposição $p \wedge q$ é falsa se uma das duas proposições (p e q) for falsa.

A operação que a cada par de proposições p e q faz corresponder uma terceira proposição que é verdadeira se e somente se os valores lógicos de p e de q forem iguais a «Verdadeira», chama-se **conjunção de proposições**.

Os valores lógicos da conjunção podem ser definidos através de uma tabela conforme ilustra a tabela 4.

Tabela 4

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção de proposições

Consideremos duas proposições:

«O número 5 é impar ou é primo ou ambas as coisas».
q: «dois ao cubo é igual a oito ou é igual a dez, mas não as duas coisas».

Na primeira proposição indica-se que uma, pelo menos, das proposições «o número 5 é impar», e «o número 5 é primo», é verdadeira, podendo ambas ser. Contudo, no segundo caso, precisar-se que apenas uma só das proposições «dois ao cubo é igual a oito», e «dois ao cubo é igual a dez» é verdadeira.

Quando a duas proposições se indica que, pelo menos, uma delas é verdadeira, forma-se uma nova proposição, que se designa por **disjunção inclusiva**.

Deste modo, a primeira proposição do exemplo anterior é a disjunção inclusiva das proposições «o número 5 é impar», e «o número 5 é primo».

Designemos as proposições que intervêm na primeira proposição por p e por q respectivamente e a expressão considerada por $p \vee q$, onde o símbolo $\vee$ lê-se «ou».

A **disjunção inclusiva**, conforme se pode entender, é uma operação que só é falsa se e somente se são falsas as proposições nela intervenientes (p e q).

A operação que a cada par de proposições faz corresponder uma outra que só é falsa se as proposições p e q forem falsas chama-se **disjunção inclusiva**.

Os valores lógicos desta operação também podem ser representados numa tabela.

Tabela 5

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Quando, respectivamente a duas proposições consideradas se indica que uma, e só uma das proposições consideradas é verdadeira, forma-se

7

Mostre pela tabela de verdade que dadas duas proposições p e q:

a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

c) $p \vee q \Leftrightarrow (p \vee q)(p \wedge q)$

8

Determine justificando o valor lógico da proposição:

$41 - 10 = 31 \vee 21 > 35$

Digitalizada com CamScanner

9

Determine, usando a tabela da verdade, as seguintes propriedades:

a) $a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c$

b) $a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \dot{\vee} c)$

uma nova proposição que é denominada **disjunção exclusiva**. Assim, a segunda proposição do exemplo acima considerado é a disjunção exclusiva das proposições «dois ao cubo é igual a oito», e «dois ao cubo é igual a dez». Para este tipo de disjunção usa-se o símbolo $\dot{\vee}$, e lê-se «ou».

A disjunção exclusiva tem os seus valores, conforme se apresenta na tabela que se segue.

Tabela 6

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Propriedades da conjunção e da disjunção

Sejam a, b e c três proposições quaisquer.

1. Propriedades da conjunção

- Comutativa

$$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$$

- Associativa

$$a \wedge (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c \text{ e } a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c$$

- O elemento V é tal que:

$$a \wedge \mathrm{V} = a \text{ para todo o } a \text{ (V ou F)}$$

- O elemento F é tal que:

$$a \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}, \text{ para todo o } a$$

2. Propriedades da disjunção

- Comutativa

$$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$$

- Associativa

$$a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c$$

Digitalizada com CamScanner

• O elemento F é tal que:

$$a \vee F = a \text{ para todo o } a$$

• O elemento F é tal que:

$$a \vee V = V, \text{ para todo o } a$$

3. Propriedades mistas

• Distributiva da conjunção em relação à disjunção

$$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

• Distributiva da disjunção em relação à conjunção

$$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

A demonstração destas propriedades pode reduzir-se a uma simples verificação pelo uso de tabelas da verdade da conjunção e da disjunção tendo em conta todas as substituições possíveis das letras a, b e c por valores lógicos.

A título de exemplo, verifiquemos a propriedade comutativa da conjunção através de uma tabela da verdade.

Tabela 7

a	b	$a \wedge b$	$b \wedge a$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

Como pudemos verificar, os valores lógicos de $a \wedge b$ e de $b \wedge a$ são iguais, verificando-se a propriedade comutativa da conjunção.

Propriedades da negação e suas relações com a conjunção e a disjunção

A mais simples das propriedades da negação é a propriedade da dupla negação:

$$\sim \sim p = p, \text{ qualquer que seja a proposição } p$$

Isto significa que a dupla negação é equivalente à afirmação.

Digitalizada com CamScanner

A negação pode ser definida através da seguinte propriedade da conjunção e da disjunção:

Para todo o valor lógico b existe sempre um valor lógico x, e um só tal que $b \wedge x = \mathrm{F}$ e $b \vee x = \mathrm{F}$ onde x é exactamente o contrário de b, isto é, $x = \sim b$. Teremos pois: $b \wedge \sim b = \mathrm{F}$ e $b \vee \sim b = \mathrm{V}$ para todo o b.

10

Comprove a propriedade da dupla negação, aplicando-a à proposição p: «5 não é divisor do número 29».

Estas fórmulas traduzem, quando aplicadas a proposições, os dois princípios da lógica matemática, anteriormente vistos, sob nova forma, isto é:

11

Deduza, através das tabelas da verdade, as duas seguintes propriedades:

a) $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

b) $\sim (a \wedge b) = \sim a \wedge b \sim b$

Princípio da não contradição – afirmar que uma proposição é verdadeira e falsa ao mesmo tempo é sempre falso.
Princípio do terceiro excluído – afirmar que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro.

Por fim, através das tabelas da verdade podem ser deduzidas as seguintes propriedades:

$$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q \text{ e } \sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

Estas duas propriedades exprimem as seguintes leis do pensamento, designadas por **primeiras Leis de De Morgan**:

1. Negar que duas dadas proposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que uma, pelo menos, é falsa.
2. Negar que uma, pelo menos, de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

Exemplo

A negação de:

«5 é divisor de 20 e é impar» equivale a afirmar que «5 não é divisor de 20 ou não é impar»
«11 é primo ou par» equivale a afirmar que «11 não é primo e não é par».

Estas propriedades podem ainda ser expressas afirmando que a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção. Deste modo as primeiras leis de De Morgan mostram a possibilidade de definir a disjunção a partir da conjunção e da negação ou a conjunção a partir da disjunção e da negação:

$$p \wedge q = \sim p \vee \sim q \text{ e } p \vee q = \sim (\sim p \wedge \sim q)$$

Digitalizada com CamScanner

Condições universais e condições impossíveis

Consider no conjunto $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

$$p(x): x + 2 > x \text{ e } q(x): x + 2 + x$$

A condição $p(x)$ dá sempre origem a uma proposição verdadeira, qualquer que seja o número real x. A condição $q(x)$ dá sempre origem a uma proposição falsa, qualquer que seja o número real x. Diz-se então que $p(x)$ exprime uma **condição universal** e que $q(x)$ exprime uma **condição impossível**. Porém, o contrário de uma condição impossível é uma condição possível e não uma condição universal. Por exemplo, em $\mathbb{R}$, a condição $2x^2 - 1 = 0$ é possível, visto ser verificada pelos números $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, mas não é universal. No entanto em $\mathbb{N}$ a mesma condição $2x^2 - 1 = 0$ é impossível.

Assim, a negação de uma condição universal é uma condição impossível e a negação de uma condição impossível é uma condição possível.

12

Considere as seguintes condições em $\mathbb{R}$:

$p(x)$: «$4x + 7 = 0$»

$q(x)$: «$x^2 + 3x + 1 = 0$»

$r(x)$: «$(x + 3)^2 > x^2 + 2x$»

Classifique-as.

Operações lógicas sobre condições

Como já sabemos as expressões proposicionais $p(x)$ transformam-se em proposições quando substituímos x por um valor concreto em $p(x)$. Deste modo, torna-se possível definirmos as operações lógicas sobre condições de forma idêntica à definida para proposições.

Negação de condições

Chama-se negação de uma expressão proposicional à operação lógica que a uma expressão $p(x)$ faz corresponder uma outra expressão designada $\sim p(x)$ que se verifica para todos os valores x que não verificam $p(x)$.

Exemplo

$p(x): x + 3 > 5$

Esta condição é verdadeira para todos os valores de x maiores que 2 e é uma condição falsa para todos os valores de x, tais que x é menor ou igual a 2. Deste modo $\sim p(x)$ será uma proposição verdadeira quando se tomarem valores tais que x é menor ou igual a 2 e será uma proposição falsa quando x tomar valores tais que é maior que 2.

Então,

$$\sim (x + 3 > 5) \Rightarrow x + 3 \leq 5$$

13

Negue as condições indicadas no exercício 12 e classifica-as.

Digitalizada com CamScanner

e por outro lado,

$$x + 3 \leq 5 \Rightarrow \sim (x + 3 > 5).$$

Quando isto acontece diz-se que as condições são equivalentes e escreve-se:

$$\sim (x + 3 > 5) \Rightarrow x + 3 \leq 5$$

(lê-se, não é verdade que $x + 3 > 5$ é formalmente equivalente a $x + 3 \leq 5$).

Exemplos

1. Em $\mathbb{R}$: $\sim (x \geq y) \Leftrightarrow x \leq y$, isto é $\sim (x > y) \Leftrightarrow x = y \vee x < y$ e por outro lado:

   $$\sim (x = y) \Leftrightarrow x > y \vee x < y$$

2. Em qualquer universo: $\sim (x = y) \Leftrightarrow x \neq y$

Conjunção de expressões proposicionais

Chama-se conjunção de duas expressões proposicionais à operação lógica que a cada par de condições $p(x)$ e $q(x)$ faz corresponder uma nova condição que é designada $p(x) \wedge q(x)$ e que é somente verificada pelos valores de x que verificam ao mesmo tempo as expressões $p(x)$ e $q(x)$.

Consideremos duas condições:

$$p(x): x^2 + 1 > 5 \text{ e } q(x): x^2 + 3 > 5$$

A condição $p(x)$ é verdadeira quando $|x| > 2$ e a condição $p(x)$ é verdadeira quando $|x| > 1$. Assim, as duas condições são simultaneamente verdadeiras quando $|x| > 2$.

Do mesmo modo, a condição $x > 2 \wedge x < 5$ é a conjunção das condições $x > 2$ e $x < 5$. Assim atribuindo a x os valores 6, 4, 3, 2, -1, teremos sucessivamente.

Tabela 8

x	$x > 2$	$x < 5$	$x > 2 \wedge x < 5$
6	V	F	F
4	V	V	V
3	V	V	V
2	F	V	F
-1	F	V	F

É de se notar que a condição $x > 2 \wedge x < 5$, costuma escrever-se $2 < x < 5$.

De um modo geral, se a e b são números reais quaisquer, tem-se por definição: $a < x < b \Leftrightarrow x > a \wedge x < b$.

14

Indique uma condição formalmente equivalente às condições seguintes:

a) «Em $\mathbb{N}$: x é múltiplo de 21».

b) «Em $\mathbb{R}$: $2x < y$».

c) No universo dos triângulos «x é equivalente».

Digitalizada com CamScanner

Exemplos

1. No universo das figuras geométricas, x é um rectângulo $\wedge$ x é um losango $\Leftrightarrow$ x é um quadrado.
2. Em $\mathbb{R}$: $2x - 3y = 11 \wedge 2x - y = 5 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = -3$

   O que também se pode escrever: $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$
3. Em $\mathbb{N}$: 6 é divisível por $y \wedge 4$ é divisível por $x \Leftrightarrow 24$ é divisível por x.

Da definição da conjunção de duas expressões proposicionais segue que esta operação tem como propriedades a comutatividade e a associatividade, isto é,

$p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow q(x) \wedge p(x)$ – Comutativa

$p(x) \wedge [q(x) \wedge r(x)] \Leftrightarrow [p(x) \wedge q(x)] \wedge r(x)$ – Associativa

Agora usando a conjunção classifiquemos mais um tipo de expressões proposicionais.

15

Dê exemplo de duas condições incompatíveis.

Diz-se que duas condições $p(x)$ e $q(x)$ são **incompatíveis** num determinado universo se para todos os valores x deste Universo a condição $p(x) \wedge q(x)$ é sempre uma condição impossível. Caso contrário as condições dizem-se **compatíveis**.

Disjunção de expressões proposicionais

Chama-se disjunção de duas expressões proposicionais à operação lógica que a cada par de condições $p(x)$ e $q(x)$ faz corresponder uma nova condição que é designada $p(x) \vee q(x)$ e que é verificada por todo o valor x que verifique uma, pelo menos, das condições dadas.

Consideremos duas expressões proposicionais:

$p(x): x > 2$ $\qquad$ $q(x): x < -2$

Ligando estas duas condições pelo símbolo «$\vee$» obtemos uma nova condição: $x > 2 \vee x < -2$ que é verificada por todo o valor x que verifique uma, pelo menos, das condições dadas.

Representamos as condições acima referidas numa tabela de verdade, substituindo x pelos seguintes valores: $-4, -3, 0, 3$.

Tabela 9

x	$x < -2$	$x > 2$	$x < -2 \vee x > 2$
-4	V	F	V
-3	V	F	V
0	F	F	F
3	F	V	V

Digitalizada com CamScanner

Exemplos

1. Em $\mathbb{R}$: $x = 1 \vee x = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$
2. $x \leq y \Leftrightarrow x = y \vee x < y$

Implicação formal para condições

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas condições. Diz-se que $p(x)$ **implica formalmente** ou **implica necessariamente** $q(x)$, quando as variáveis que verificam $p(x)$ verificam igualmente $q(x)$.

A condição $p(x)$ é designada por **antecedente** e a condição $q(x)$ por **consequente**.

Quando temos a implicação formal $p(x) \Rightarrow q(x)$, diz-se que $q(x)$ é condição necessária para $p(x)$. Se o valor x que verifica $p(x)$ não verifica $q(x)$ então o valor lógico da implicação formal é falso. Consideremos agora o inverso. Quando $p(x) \Rightarrow q(x)$ tem um valor lógico verdadeiro, para verificar $q(x)$ é suficiente verificar $p(x)$. Por isso, $p(x)$ diz-se **condição suficiente** para $q(x)$.

16

Indique os valores logícos das seguintes implicações:

a) Em $\mathbb{N}$:
«x é múltiplo de 10 $\Rightarrow$ x é múltiplo de 5».

b) No universo das figuras geométricas «k é um rectângulo $\Rightarrow$ k é um quadrado».

c) Em $\mathbb{R}$: $x > 7 \Rightarrow x > 3$».

Exercícios resolvidos

$x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

Resolução

A expressão $x^2 - 5x + 4$ tem por raízes reais os números 1 e 4. Portanto, $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$. Deste modo verificamos que $x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$.

No caso em que tem lugar a implicação $p(x) \Rightarrow q(x)$ e a sua recíproca $q(x) \Rightarrow p(x)$ as condições $p(x)$ e $q(x)$ dizem-se **formalmente equivalentes** e tem-se $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

A condição $p(x)$ diz-se **condição necessária e suficiente** para $q(x)$ ou $p(x)$ é uma condição verdadeira se e somente se a condição $p(x)$ é verdadeira.

Exemplo

1. 3 é divisor de $x \Leftrightarrow x = 3y$
2. No universo dos triângulos: x é equilátero $\Leftrightarrow$ x tem todos os lados iguais.
3. No universo dos seres humanos: x é filho de $y \Leftrightarrow y$ é pai ou mãe de x.

Quantificação

Para além das operações lógicas estudadas, existem ainda duas de grande importância que são aplicadas unicamente a condições. Estudemo-las de seguida.

Digitalizada com CamScanner

Quantificação universal

Muitas vezes em matemática são usadas expressões do tipo:

- Qualquer que seja o número real x, $(x-1)^2 > x^2 - 2x$.
- Qualquer que seja o número x, $2x > x$.

A primeira condição é sempre verdadeira, portanto, é condição universal e a segunda é sempre verdadeira para $x \in \mathbb{N}$, mas pode ser falsa para $x \in \mathbb{R}$.

No simbolismo da lógica matemática para indicar que uma condição é universal, coloca-se antes da condição o símbolo «$\forall$» (lê-se «qualquer que seja»). Então, para as expressões consideradas tem-se:

- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x-1)^2 > x^2 - 2x$
- $\forall\, x \in \mathbb{N},\ 2x > x$

Desta forma, dada uma condição numa variável o símbolo «$\forall$» representa uma operação lógica que transforma a condição numa proposição verdadeira ou falsa. Esta operação é designada por quantificação universal e o símbolo «$\forall$» Quantificador Universal.

De modo análogo, quando se tem uma condição com mais de uma variável e se quer afirmar que é uma condição universal usa-se o mesmo símbolo, «$\forall$».

Assim,

$\forall\, a, b$: $(a+b)^2 > a^2 + b^2$ que é verdadeira em $\mathbb{N}$ e pode ser falsa em $\mathbb{R}$.

17

Indique o valor lógico das proposições dadas sobre o conjunto $\mathbb{R}$:

a) $\forall x, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $\forall x, x^2 - y^3 = (x+y)(x+y)$

c) $\forall x, (x-y)^3 = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$

Quantificação existencial

A quantificação existencial é uma operação lógica muito ligada à quantificação universal. Desta operação sabe-se que para que ela seja falsa basta que exista pelo menos um número real x tal que transforma a condição $p(x)$ numa proposição falsa. Isto é o mesmo que afirmar que a condição é possível. Para representar uma condição possível numa variável, escreve-se antes da condição o símbolo «$\exists$» seguido da variável e de uma vírgula, ou de dois pontos.

Vejamos as expressões:

- Existe pelo menos um número real x, tal que $x^4 + 3 = 0$.
- Existe pelo menos um número real a, tal que $a > a^2$.

A primeira expressão é falsa dado que para todo o número real x. Esta condição é impossível.

A segunda expressão é verdadeira em $\mathbb{R}$, pois existem números maiores que o seu quadrado. A condição é possível.

Usando o simbolismo da lógica matemática, tem-se pelas expressões acima referidas

$\exists\, x \in \mathbb{R}$: $x^4 + 3 = 0$
$\exists\, a \in \mathbb{R}$: $a > a^2$

Deste modo, considerada uma condição numa variável, o símbolo «$\exists$» representa uma operação lógica que transforma uma condição numa proposição que pode ser verdadeira ou falsa, conforme a condição é possível ou impossível. Esta operação toma a designação de quantificação existencial e o símbolo «$\exists$» Quantificador Existencial.

18

Determine o valor lógico das seguintes condições em $\mathbb{R}$.

a) $\forall x$: $|x| = x$

b) $\exists x$: $x^2 = x$

c) $\exists x$: $x + \frac{1}{4} > x$

d) $\exists x$: $x + 1 = x$

e) $\exists x$: $|x| = 0$

Digitalizada com CamScanner

Segundas Leis de De Morgan

Os quantificadores universal e existencial podem ser precedidos do símbolo de negação, «~». Por exemplo, consideremos, no Universo $\mathbb{R}$, as seguintes expressões:

$$\forall\, x: x + 1 > x \text{ e } \exists\, a: a^2 - 1 = 0$$

A primeira expressão representa uma condição universal e a segunda uma condição possível. Consideremos agora a negação destas expressões:

- $\sim(\forall\, x: x + 1 > x)$. Esta negação significa que $x + 1 > x$ não é uma condição universal o que quer dizer que existe pelo menos um número real x tal que $x + 1 \leq x$, o que é uma condição falsa.
- $\sim(\exists\, a: a^2 - 1 = 0)$. Esta negação significa que $a^2 - 1 = 0$ não é uma condição possível o que quer dizer que para todo o número real a, $a^2 - 1 \neq 0$, o que é uma condição falsa.

19

Nega as condições do exercício anterior, indicando o seu valor lógico.

Assim, tornam-se evidentes as seguintes equivalências:

- $\sim(\forall\, x: x + 1 > x) \Leftrightarrow \exists\, x, \sim(x + 1 > x) \Leftrightarrow \exists\, x, x + 1 > x$
- $\sim(\exists\, a: a^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow \forall\, a, \sim(a^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow \forall\, a, a^2 - 1 \neq 0$

Donde a negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial e vice-versa, isto é, transforma o quantificador existencial em quantificador universal seguido da negação. Assim, tem-se no geral:

$$\sim[\forall\, x, p(x)] \Leftrightarrow \exists\, x,\ \sim p(x) \qquad \sim[\exists\, x: p(x)] \Leftrightarrow \forall\, x,\ \sim p(x)$$

Estas duas propriedades são conhecidas por segundas **Leis de De Morgan**.

Princípio de indução matemática

Considere o seguinte problema:

Prova que para todo $n \in \mathbb{N}$ a seguinte afirmação é verdadeira:

$$p(n): n^2 + n \text{ é divisível por } 2$$

O que se pretende provar é que todas as afirmações $p(n)$ são verdadeiras para $n \in \mathbb{N}$, isto, é para $n = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Vejamos:

para $n = 0$; $0^2 + 0 = 0$, é divisível por 2.
para $n = 1$; $1^2 + 1 = 2$; é divisível por 2.
para $n = 2$; $2^2 + 2 = 6$; é divisível por 2.

Ao que tudo indica poderíamos prosseguir, analisando caso a caso, mas, como é óbvio, nunca esgotaríamos as possibilidades de verificação, uma vez que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito.

Para se resolverem problemas desta natureza usa-se o **princípio de Indução Matemática** que consiste no seguinte:

Seja $p(n)$ uma propriedade associada ao número natural n. Se $p(0)$ é verdadeira e se $p(k) \Rightarrow p(k + 1)$, isto é, se do facto de se supor $p(k)$ verdadeira,

Digitalizada com CamScanner

se puder concluir que $p(k+1)$ é verdadeira, então $p(n)$ é verdadeira para todo o número n natural.

Então, a solução para o problema proposto fica:

- Para $n = 0$, temos $0^2 + 0 = 0$, que é divisível por 2, logo a proposição é verdadeira para $n = 0$;
- Admitindo-se que $k^2 + k$ é divisível por 2 $(n + k)$, provemos que $(k+1)^2\,(k+1)$ é também divisível por 2 $(n + k + 1)$:

Ou seja:

- $(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k+1)$
- $(k^2 + k)$ é divisível por 2 por hipótese e

$2(k+1)$ é divisível por 2 $\Rightarrow (k^2 + k) + 2(k+1)$ é divisível por 2

Logo $p(n)$: *$n^2 + n$ é divisível por 2*, para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Exercícios resolvidos

1. Demonstre, usando a indução matemática:

$$1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + (3n - 1) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Demonstração:

1. A propriedade é verdadeira para $n = 1$

$$\frac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

2. Suponhamos que é verdadeira para um valor qualquer «n»

$$p(n) : 1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + (3n-1) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

e vamos demonstrar que é verdadeira para um valor «$n+1$»

$$p(n+1) : \underbrace{1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + (3n-1)}_{\frac{n(3n-1)}{2}} + \underbrace{(n+1)\,3(n+1) - 1}_{\frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2}} =$$

Por substituição teremos:

$$\frac{(n+1)[3(n+1)-1]}{2} =$$

$$\Leftrightarrow \frac{3n^2 - n + 6n + 6 - 4}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 2n + 3n + 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} \quad \text{c.q.d}$$

20

Mostre, por indução matemática, que:

Aplicando a indução matemática, demonstre:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

b) $1 + 2 + 3 + \frac{(n+1)n}{2}$

c) $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

d) $2+7+12+17+(5n-3) = \frac{n}{2}\left[5n - 1\right]$

Digitalizada com CamScanner

1. Considere as seguintes expressões:

i) $|2^3 - 4^5|$ ii) $|3^2 - 4^3| = 55$ iii) $3 + 4{,}7$ iv) Rectângulo

v) $|5 + 7| = 5 - 7$ vi) $-\frac{2}{3} \div \frac{13}{11}$ 3 é múltiplo de 21.

vii) A Ana estuda lógica matemática.

viii) Maputo é a capital de Moçambique.

a) Indique as que representam designações e as que representam proposições.
b) Diga justificando se algumas das proposições são equivalentes.
c) Indique o valor lógico das que são proposições.

Resolução

a) Designações – i); iii); iv)
Proposições – ii); v); vi); vii); viii)

b) Não temos expressões equivalentes, pois comparando-as elas não são iguais.

c) ii) V; v) F; vi) F; vii) V; viii) V.

2. Defina negação de uma expressão proposicional.

Resolução

Negação de uma expressão proposicional é uma operação lógica que a uma condição $p(x)$ faz corresponder uma outra condição $\sim p(x)$ que se verifica para todos os valores x que não verificam $p(x)$.

3. Formule a negação das proposições seguintes:

a) O número 25 é um número par.
b) O número $\sqrt{3}$ é um número racional.
c) O número 8 é um número positivo.
d) 3 não é divisor do número 32.
e) Não existem números primos pares.
f) $7 \cdot 6 \neq 24$

Resolução

a) Não é verdade que o número 25 é um número par ou seja o número 25 não é um número par.
b) Não é verdade que o número $\sqrt{3}$ é um número racional ou seja o número $\sqrt{3}$ não é um número racional.
c) Não é verdade que o número 8 é um número positivo ou seja o número 8 não é um número positivo;
d) 3 é divisor do número 32.
e) Existem números primos pares.
f) $7 \cdot 6 = 24$.

4. Dê exemplo de duas proposições que possam ser ligadas pela operação lógica implicação.

Resolução

p: 20 é múltiplo de 10
q: 20 é múltiplo de 5
Se 20 é múltiplo de 10 então 20 é múltiplo de 5

Digitalizada com CamScanner

5. Cada uma das seguintes afirmações pode ser formulada na forma «se-então». Reescreve as afirmações na forma «se A, então B».
   a) O produto de um inteiro impar e um inteiro par é par.
   b) O quadrado de um inteiro impar é impar.
   c) O quadrado de um número primo não é primo.
   d) O produto de dois inteiros negativos é negativo.
   e) As diagonais de um quadrado dividem-se ao meio pelo ponto da sua intersecção.
   f) Todo o número cujos dois últimos algarismos são zero têm quatro como seu divisor.

Resolução

a) Se x é um inteiro impar e y um inteiro par, então xy é um inteiro par.
b) Se x é um inteiro impar então x^2 é impar.
c) Se x é um inteiro primo então x^2 não é um primo.
d) Se x e y são inteiros negativos então xy é negativo.
e) Se a figura A é um quadrado então as diagonais de A dividem-se ao meio pelo seu ponto de intersecção.
f) Se x tem como dois últimos algarismos zero, então quatro é divisor de x.

6. Mostre que a implicação $A \Rightarrow B$ se verifica se e somente se $\sim B \Rightarrow \sim A$, isto é, $(\sim B \Rightarrow \sim A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

Resolução

i. Suponhamos que $A \Rightarrow B$ e pretendemos mostrar que $\sim B \Rightarrow \sim A$. Se $(A \Rightarrow B)$ é verdadeira e também é verdadeira $\sim B$, então temos que $\sim A$.
ii. Suponhamos que $\sim B \Rightarrow \sim A$ é verdadeira e que A é verdadeira. Como $\sim A$ é falso também é falso $\sim B$, pois $B = \sim \sim B$ é verdadeira. Fica então provado que $A \Rightarrow B$.

7. Uma tautologia é uma expressão lógica que avalia sempre como *verdadeiro*, independentemente dos valores lógicos das suas variáveis. Por exemplo, a expressão $x \vee \sim x$ é verdadeira tanto quando x é verdadeiro como quando x é falso, $x \vee \sim x$ é pois uma tautologia. Explica como se pode usar uma tabela da verdade para provar que uma expressão lógica é uma tautologia e prova que a seguinte expressão é uma tautologia:

$$(x \vee y)(x \vee \sim y)$$

Resolução

Para mostrar que a expressão indicada é uma tautologia construímos a seguinte tabela da verdade:

x	y	$x \vee y$	$xy \sim y$	$(x \vee y)(x \vee \sim y)$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	V	V

Digitalizada com CamScanner

8. Seja A {1, 2, 3, 4, 5, 6} e $p(x)$ a seguinte expressão proposicional:
$p(x)$: «o número x de A é um número par».
Preencha a tabela que segue:

Expressão proposicional	$p(1)$	$p(2)$	$p(3)$	$p(4)$	$p(5)$	$p(6)$
Valor lógico desta expressão						

Resolução

Expressão proposicional	$p(1)$	$p(2)$	$p(3)$	$p(4)$	$p(5)$	$p(6)$
Valor lógico desta expressão	F	V	F	V	F	V

2, 4, 6 são pares, então $p(2)$, $p(4)$, $p(6)$ são verdadeiras.

9. É um erro comum confundir as duas afirmações seguintes:
i. Se A então B.
ii. Se B então A.

Encontre duas condições A e B tais que a afirmação (i) seja verdadeira, mas a afirmação (ii) seja falsa.

Resolução

«Se (A) um animal é um gato, então (B) é um mamífero» é verdadeira, mas
«Se (B) um animal é mamífero, então (A) é um gato» é falsa.

10. Prove usando a tabela de verdade que $(a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$.

Resolução

a	b	c	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \wedge c$	$b \wedge c$	$a \wedge (b \wedge c)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

$\Rightarrow (a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$

11. Considere as proposições:
p: O Paulo gravou um disco.
q: A Helena cantou no domingo.

a) Traduza em linguagem corrente cada uma das proposições:
i. $p \wedge q$ ii. $\sim p \vee q$ iii. $\sim p \vee p$ iv. $p \Rightarrow \sim q$ v. $\sim q \vee p$

b) Supondo p verdadeira e q falsa, indique o valor lógico de cada uma das proposições.

Digitalizada com CamScanner

Resolução

a) i. O Paulo gravou um disco e a Helena cantou no domingo.
ii. O Paulo não gravou um disco ou a Helena cantou no domingo.
iii. O Paulo não gravou um disco ou o Paulo gravou um disco, mas não ambas as coisas.
iv. Se o Paulo gravou um disco então a Helena não cantou no domingo.
v. A Helena não cantou no domingo ou o Paulo gravou um disco.
b) i. F ii. F iii. V iv. V v. V

12. Considere as expressões seguintes:
i. $x^2 = 4$ ii. $x^2 + 8x = 0$ iii. $|x + 5| = 5$
iv. $x^2 + 2 > 0$ v. $(x - 3)(x + 3)$
a) Distinga as expressões designatórias das proposicionais.
b) Classifique em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{R}$ cada uma das condições.

Resolução

a) i. Condição ii. Condição iii. Condição
iv. Condição v. Expressão designatória
b) i. e ii. Condições possíveis em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{R}$.
iii. Condição possível em $\mathbb{R}$ e impossível em $\mathbb{N}$.
iv. Condição Universal em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{R}$.

13. Determine o valor lógico das seguintes condições no Universo $\mathbb{N}$:
a) $\forall x: |x| = x$ b) $\exists x: x^2 = x$ c) $\forall x: x + 1 > x$
d) $\exists x: x + 2 = x$ e) $\exists x: |x| = 0$

Resolução

a) V b) V c) V d) F e) F

14. Negue as condições do exercício 11.

Resolução

a) $\exists x: |x| \neq x$ b) $\forall x: x^2 \neq x$ c) $\exists x: x + 1 \leq x$
d) $\forall x: x + 2 \neq x$ e) $\forall x: |x| \neq 0$

15. Prove por indução matemática que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1 + n)n}{2}$

Resolução

$1 = \frac{(1 + 1)1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Verificamos que a condição é verificada para $n + 1$.

Digitalizada com CamScanner

De seguida supomos que ela é verdadeira para $n = k$, ou seja

$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{(k + 1)n}{2}$ e

mostramos que a formula é válida para $n = k + 1$;

$$1 + 2 + 3 + ... + k + k\,\frac{(k + 1)k}{2} + (k + 1) = \frac{(k + 1)\,k + 2(k + 1)}{2} =$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

que corresponde à expressão escrita para $k + 1$ e deste modo fica provado que

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(1 + n)n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

16. O método de demonstração pelo absurdo é um método que nos permite provar uma implicação A $\Rightarrow$ B. Para tal partimos da suposição de que B não se verifica significando que $\sim$B é verificada e então $\sim$A também se verifica. Isto conduz-nos a uma contradição: A e $\sim$A simultaneamente verificadas, o que não é possível pelo principio da não contradição, provando-se assim que A $\Rightarrow$ B. Mostra pois, pelo absurdo, que dadas as proposições A: «$2x$ é divisor do número 2^5» e B: «x é divisor do número 2^5» definidas em $\mathbb{N}$, temos A $\Rightarrow$ B.

Resolução

Suponhamos que x que verifica A não verifica B, o que quer dizer que:

$\frac{2^5}{x} = n + \alpha$ onde n é um número inteiro e $0 < \alpha < 1$. Como $2x$ é divisor de 2^5, temos $\frac{2^5}{2x} = m$. $m \in \mathbb{N}$.

Então $n + \alpha = 2m$, porém $n + \alpha \notin \mathbb{N}$ e $2m \in \mathbb{N}$.

Porém, da nossa suposição inicial de que x não verifica B, temos $\sim$B $\Rightarrow$ $\sim$A, o que significa que a proposição A é falsa, o que constitui uma contradição: x verifica e não verifica a proposição A simultaneamente, o que não é possível pelo principio da não contradição. Isto permite-nos concluir que os valores que verificam a condição A também verificam a condição B, sendo válida a implicação A $\Rightarrow$ B.

17. Seja A = {1, 2, 3, ..., 10} e $k(x, y)$ a expressão proposicional seguinte:
$k(x, y)$: «o número x é divisor do número y».
a) Indique todos os pares (x, y) que verificam $k(x, y)$.
b) Existem pares (x, y) tais que uma das expressões (x, y) e (y, x) é verdadeira e outra falsa? Indique-os.

Resolução

a) (2, 4); (2, 6); (2, 8); (2, 10); (3, 6); (3, 9); (4, 8); (5, 10); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (1, 8); (1, 9); (1, 10).

b) Todas as expressões indicadas em a) são verdadeiras e trocando as posições entre o 1.º e o 2.º números obtemos proposições falsas, portanto existem pares $k(x, y)$ verdadeiras e $k(y, x)$ falsas.

Digitalizada com CamScanner

18. Sendo $p \Rightarrow q$ uma proposição falsa, indique o valor lógico das seguintes proposições:

a) $\sim p \wedge q$

b) $\sim p \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

(1.ª Chamada – 1999)

Resolução

a) Falsa.

b) Verdadeira.

19. Sendo $p \vee \sim q$ uma proposição falsa, indique o valor lógico da seguinte proposição $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q$.

(1.ª Chamada – 2000)

Resolução

Sabendo que $p \vee \sim q$ é falsa, significa que p é falsa e q é verdadeira.
$(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow q$
É o mesmo que $V \wedge V \Leftrightarrow V$
Portanto $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow q$ é verdadeira.

20. Considere as seguintes proposições:

p: 15 é um número primo.

q: 15 é um número ímpar.

(1.ª Chamada – 2001)

Resolução

$p = F$; $q = V$

a) $p \wedge q = F \wedge V = F$

b) $p \Rightarrow q = F \Rightarrow V = V$

Digitalizada com CamScanner



Exercícios propostos

1. Considere as designações seguintes:
   i. $\sqrt{2^2 + 3^2}$
   ii. $|5 + 5^2|$
   iii. mmc (2, 4, 5)
   iv. $(2^2 + 3^2) \cdot 6^2$
   v. mdc (13 ,52)
   vi. mmc $(\sqrt{5}, \sqrt{45})^2$
   a) Calcule o número designado por cada uma delas.
   b) Dentre as designações indicadas existem designações equivalentes? Quais?

2. Dê exemplos de designações, proposições e expressões proposicionais.

3. Considere as seguintes proposições:
   p: 15 é um número primo.
   q: 10 é um número par.
   r: O sol é um planeta.
   s: $\sqrt{49} > 3$; t: $5^2 - 12 = 13$
   a) Indique o valor lógico de cada uma delas.
   b) Construa uma tabela da verdade.

4. O que entende por proposição?

5. Considere as seguintes proposições:
   p: Graça Machel foi Ministra da Educação de Moçambique.
   q: Matola é a capital de Maputo Cidade.
   r: O Sol é uma estrela.
   s: A Lua é um satélite da Terra.
   t: Vénus é um planeta.
   u: Vénus é uma estrela.

   Traduza as proposições seguintes simbolicamente e indique o seu valor lógico:

   a) Graça Machel foi ministra da Educação de Moçambique e Matola é a capital de Maputo Cidade.
   b) Graça Machel foi Ministra da Educação de Moçambique ou Matola é a capital de Maputo cidade.
   c) Matola não é a capital da Cidade de Maputo.
   d) O sol é uma estrela e a Lua é um satélite da Terra.
   e) Graça Machel não foi Ministra da Educação de Moçambique, nem Matola é a capital da cidade de Maputo.
   f) Vénus é uma estrela e a Lua um satélite da Terra.
   g) Ou Vénus é um planeta ou Vénus é uma estrela, mas não ambas as coisas.

6. Considere as duas afirmações:
   i. Se A então B.
   ii. (não A) ou B.
   Sob que circunstâncias essas afirmações são verdadeiras? Quando são falsas? Explique porque essas afirmações são, em essência, idênticas.

7. Prove que:
   a) $(x \wedge y) \vee (x \wedge \sim y)$ é logicamente equivalente a x.
   b) $(x \vee y) \Rightarrow z$ é logicamente equivalente a $(x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)$.

8. Com ajuda da tabela de verdade prove as seguintes propriedades das operações lógicas:
   a) $a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
   b) $a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

9. Use as propriedades das operações lógicas para simplificar as seguintes expressões:
   a) $\sim(\sim b \wedge \sim c)$
   b) $(a \vee b) \wedge \sim c$
   c) $a \vee (\sim a \wedge b)$

10. Uma contradição é uma expressão lógica que é sempre avaliada como falsa, independentemente dos valores das suas variáveis. Por exemplo $x \wedge \sim x$ é uma contradição. Prove que a seguinte expressão $(x \vee y) \wedge (x \vee \sim y) \wedge \sim x$ é uma contradição.

11. Considere as proposições p, q, e r:
   p: A equipa A tem dez jogadores.
   q: A equipa B tem onze jogadores.
   r: A equipa C tem oito jogadores.

   Traduza em linguagem corrente cada uma das proposições:

   a) $p \wedge q$ b) $\sim p \vee q$ c) $\Rightarrow \sim q$
   d) $p \wedge q \wedge r$ e) $\sim q \vee p$ f) $q \Leftrightarrow \sim r$
   g) $p \wedge q \Rightarrow r$ h) $\sim (q \wedge r)$

12. Considere em $\mathbb{R}$ as seguintes condições na variável x:

   $p(x)$: $|x + 6| \leq 2$

   $q(x)$: $x + 3 = \frac{1}{2} + x$

   $r(x)$: $3x^2 + 1 > 0$

   a) Classifique cada uma delas
   b) Indique um subconjunto de $\mathbb{R}$ em que a condição seja impossível.

Digitalizada com CamScanner

13. Dada a condição $x^2 + 1 = 0$, indique um universo em que a condição seja:
   a) Impossível.
   b) Universal.
   c) Possível mas não universal.

14. Seja A = {1, 2, 3, 4, 5}. Determine o valor lógico de cada uma das condições:
   a) $\exists x \in A: x + 3 = 10$
   b) $\forall x \in A: x + 3 < 10$
   b) $\exists x \in A: x + 3 \leq 10$

15. Negue as condições do exercício 14.

16. Considere as seguintes condições em $\mathbb{R}$:
   a) Classifique-as.
   b) Quantifique-as de modo a obter condições verdadeiras.
   c) Negue as condições da alínea b).

17. Seja A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} e P(x, y): «$x + y$» pertencem a «A». Indique todos os pares de elementos do conjunto A tais que verificam P(x, y).

18. Nos casos seguintes formule a implicação. $p \Rightarrow q$ e suas recíprocas. Indique os casos em que o teorema recíproco é verdadeiro.
   a) p: «O triângulo A tem 2 lados iguais».
      q: «Duas medianas do triângulo A são iguais».
   b) p: «O quadriláletero B é um losango».
      q: «As diagonais do quadrilátero dividem os seus ângulos ao meio».
   c) p: «O número q é divisor do número k»
      q: «O número 3 é divisor do número igual à soma dos algarismos do número k».

19. Escreva com a ajuda do quantificador $\forall$, $\exists$ as espressões seguintes:
   a) «Qualquer que seja o número natural x, existe um número natural y, tal que $x + y$ é um número primo».
   b) «Qualquer que seja o ponto x sobre a recta e existe um ponto y pertencente a e tal que a distância entre os pontos x e y é igual a 4».

20. Prove pelo método de indução matemática:
   a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
   c) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

21. Sejam A e B condições em x dadas sobre o conjunto dos números reais. Prove pelo método de redução ao absurdo que A $\Rightarrow$ B se:
   a) A(x): $x = \dfrac{1}{2} = 0 \wedge$ B(x): $2x^2 - 1 = 0$
   b) A(x): $x^2 < x \wedge$ B(x): $x < 1$

22. Formule a implicação recíproca das seguintes implicações indicando o seu valor lógico:
   a) Se n é divisível por 6, então é divisível por 3.
   b) Se o triângulo [ABC] é rectângulo, então: $c_1^2 + c_2^2 = h^2$
   c) Se $x < -1$ então $|x| > 1$

23. Demonstre, usando a indução matemática:
   a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$
   b) $1 + 2 + 4 + 8 \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

24. Sendo $p \vee \sim q$ uma proposição falsa, indique o valor lógico da seguinte proposição:
$$(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow q$$
(1.ª Chamada – 2000)

25. Sendo $p \vee \sim q$ uma proposição falsa, indique o valor lógico da seguinte proposição:
$$(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow q$$
(1.ª Chamada – 2000)

26. Sendo $p \Rightarrow q$ uma proposição falsa, indique o valor lógico das seguintes proposições:
   a) $\sim p \wedge q$
   b) $\sim p \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
(1.ª Chamada – 1999)

27. Prove, usando o método de indução matemática, que:
$$n^2 + 5n$$
é um número par, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

28. Mostre que a condição «$4n + 1$ é um múltiplo de 4» é impossível em $\mathbb{N}$ mas é hereditária.

Digitalizada com CamScanner



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar expressões algébricas.
- Classificar expressões algébricas.
- Determinar o domínio de existência de expressões algébricas racionais e irracionais.
- Operar com fracções racionais (adição, subtracção, multiplicação e divisão).
- Racionalizar o denominador de expressões irracionais.
- Resolver analiticamente as inequações irracionais.
- Resolver sistemas de 3 equações lineares com 3 incógnitas aplicando o método de substituição, adição ordenada e Cramer.
- Racionalizar o denominador de expressões irracionais.
- Resolver problemas que envolvem equações.
- Interpretar a solução da equação no contexto do problema apresentado.

Digitalizada com CamScanner

Álgebra

UNIDADE 2

CONTEÚDOS

2. Álgebra

2.1 Expressões algébricas:
- 2.1.1. Noção de expressão algébrica.
- 2.1.2. Classificação de expressões algébricas.
- 2.1.3. Transformações algébricas.

2.2. Fracções racionais:
- 2.2.1. Noção de fracção racional.
- 2.2.2. Domínio de existência.

2.3. Operações com fracções racionais:
- 2.3.1. Adição, subtracção e multiplicação.
- 2.3.2. Divisão através da simplificação.

2.4. Expressões irracionais:
- 2.4.1. Noção expressão irracional.
- 2.4.2. Domínio de existência.
- 2.4.3. Racionalização de denominadores de expressões algébricas irracional.

2.5. Equações:
- 2.5.1. Equivalência de equações.
- 2.5.2. Equações do 2.º grau (revisões).
- 2.5.3. Equações do 3.º grau (casos simples).
- 2.5.4. Equações que se reduzem a uma equação quadrática.
- 2.5.5. Equações com radicais.

2.6. Inequações irracionais:

2.7. Sistema de equações lineares a:
- 2.7.1. 2 incógnitas (revisão).
- 2.7.2. 3 incógnitas.

Pág. 32 a 69

Digitalizada com CamScanner

O principal objectivo da Álgebra Elementar é a resolução de equações polinomiais.

A Álgebra Moderna, também chamada Superior, desenvolveu-se em grande parte a partir dos estudos feitos por Évariste Galois sobre a Teoria dos Grupos.

É interessante saber que a chamada Álgebra Elementar teve início na Babilónia caracterizando-se pela introdução gradual do simbolismo e pela resolução de equações por vários métodos, alguns bastante sofisticados. Por exemplo, conta-se que Enkil, um rico comerciante, antes de falecer, distribuiu as suas terras do seguinte modo:

Lego ao meu fiel Nabu o equivalente à parte de um dos meus três maus filhos. Ao bravo Kurlil dou um terço do que sobra do terço depois das partes.

(Nabu e Kurlil servos de Enkil)

Problemas como este e a necessidade da sua resolução levaram ao desenvolvimento do cálculo matemático.

Em Alexandria, Diofanto (200-284), conhecido como o «pai da Álgebra», desenvolveu um processo engenhoso que consistia em encontrar resposta para as equações indeterminadas do tipo:

$$Ax^2 + Bx + C = y^2 \qquad Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$$

O árabe Al-Khwarizmi (788-850), num livro sobre simplificação de equações com o título Hisab «*al-jabr wal-mugabala*» (*ciência da redução e da confrontação*), utiliza pela primeira vez a palavra *al-jabr*, donde derivou o termo «álgebra», enquanto que o termo algoritmo deriva duma latinização do nome do próprio autor.



Al-Khwarizmi.

Al-Khwarizmi apresenta um método de resolução de equações do tipo:

$ax^2 = c$ $\qquad$ $bx = c$

$ax^2 = bx$ $\qquad$ $ax^2 + bx = c$

$ax^2 + c = bx$ $\qquad$ $bx^2 + c = ax^2$

Os persas seguiram o seu exemplo e, entre outros, Al-Mahani, Al-Khazin e Omar Khayyam dedicaram-se ao estudo da resolução de equações.

Omar Khayyam publicou um livro em que resolveu 14 equações do 3.º grau por métodos geométricos, utilizando intersecções de cónicas.

Alguns séculos mais tarde, na Itália, com Scipione de Ferro (1465-1526), surge a resolução de uma equação do 3.º grau, embora de Ferro não divulgue o método seguido.

Em 1545, Gerolamo Cardano (1501-1576) publicou *Ars Magna*, onde surge um método de resolução de equações do 3.º e 4.º graus.

O método apresentado era da autoria de Tartaglia que, apesar de ter pedido a Cardano para não o publicar, viu o método ser divulgado, contra a sua vontade, e usado pelos matemáticos seus contemporâneos.



Niccolo Fontana (Tartaglia) (1500-1557).

Há vários algebristas que consideram a publicação de tal obra como o início da Matemática Moderna.

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,\ a_0 \neq 0,$$

é equivalente a $y^3 + ay + b = 0$, obviamente, depois de transformar $x = \frac{y - a_1}{3a_0}$ a sua solução é dada por:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Conceitos Fundamentais da Matemática, Bento de Jesus Caraça, Livraria Sá da Costa.

Desde essa época vários outros matemáticos se interessaram pelo tema, como Rafael Bombelli (1526-1573), Viète (1540-1603), e desenvolveram a Álgebra, mas... a equação do 5.º resiste!

É só com o norueguês Niels Henrick (1802-1829) que, apesar de por algum tempo pensar ter resolvido a equação do 5.º grau, detecta um erro e prova a impossibilidade de resolver a equação do 5.º grau por meio de radicais.

Digitalizada com CamScanner

Álgebra

A Álgebra é uma ciência inserida na matemática que generaliza as questões numéricas, representando normalmente as grandezas por letras.

O historial desta ciência começou no Egipto e na Babilónia, onde as pessoas aprenderam como resolver equações lineares $(ax + b)$ e quadráticas $(ax^2 + bx = c)$ bem como equações indeterminadas tais como, $x^2 + y^2 = z^2$. É interessante notar que os Babilónios resolveram as equações quadráticas usando procedimentos de ensino similar aos que usamos na actualidade.

1

Dê 3 exemplos de expressões algébricas.

Transformações idênticas

Expressões algébricas

Como sabemos, uma grandeza, geralmente representada por uma letra e que pode tomar valores arbitrários pertencentes a um domínio é designada por variável.

A composição entre variáveis (pode ser apenas uma) e números com a ajuda das operações aritméticas (adição, subtracção, multiplicação e divisão) ou outras tais como a radiciação, a logaritmização, a potenciação, etc., formam as designadas expressões algébricas ou expressões com variáveis.

2

Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

a) $A(x) = \sqrt{x} - \dfrac{2}{x}$ é uma expressão algébrica.

b) $C(z) = 2^z - 2^{-z}$ não é uma expressão algébrica.

Expressões idênticas

Na prática é importante simplificar uma expressão dada, isto é, transformá-la numa outra mas conservando o conteúdo. Matematicamente esta transformação exprime a noção de identidade.

Duas expressões algébricas dizem-se idênticas se elas têm o mesmo domínio de definição e tomam o mesmo valor.

Exemplos

1. Expressões algébricas: $A(x) = 2x^2 - x + \dfrac{3}{2x}$; $B(x,y) = 2xy + x - 5$
2. As expressões $(x - 1)(x + 2)$ e $x^2 + x - 2$ são idênticas em $\mathbb{R}$, isto é, $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$.
3. As expressões $\left(\sqrt{x}\right)^2$ e x não são idênticas. Elas são iguais para valores de x positivos, mas têm domínios de definição diferentes. A primeira expressão é determinada só para $x \geq 0$ enquanto que a segunda é determinada para qualquer valor de x.

Digitalizada com CamScanner

Domínio de definição

Consideremos agora a expressão algébrica $\sqrt{x-2}$. Esta expressão só terá sentido se a expressão que está sob o sinal de radical não for negativa, o que acontece para este caso, se $x - 2 \geq 0$, isto é, se $x \geq 2$. Neste caso diz-se que o domínio de existência da expressão dada é:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 \geq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$$

Para todos os valores de x maiores ou iguais a dois a expressão será determinada. Substituindo o valor de x por qualquer número deste intervalo, obtemos como resultado um valor numérico. Porém, há casos em que uma expressão se considera indeterminada. Nesses casos, certas operações não são realizáveis, como, por exemplo, a divisão por zero, o cálculo de raízes quadradas de números negativos, a logaritmização de números não positivos, etc.

Chama-se **domínio de existência** de uma expressão algébrica ao conjunto dos valores das variáveis (ou variável), para os quais a expressão é determinada, isto é, ao conjunto dos valores das variáveis (ou variável) para os quais esta expressão tem sentido.

3

3. Determine o domínio de definição das expressões seguintes:

a) $\frac{a^2 + b^2}{a - 1}$

b) $\sqrt{x^2 - 1}$

c) $\sqrt{x^2 + 1}$

d) $\sqrt{x^2 - 6x + 8}$

e) $\frac{x}{\sqrt{x - 1}}$

Exercício resolvido

1. Determine os domínios de existência das expressões algébricas seguintes:

a) $A(x) = \frac{1 - x}{x^2 + 2x} + \frac{15}{2}$

b) $B(x) = 5x^3 + \sqrt{x} - \frac{3}{x - 2}$

Resolução

a) A expressão $A(x)$ só será determinada se a expressão no denominador for diferente de zero, pois, como sabemos, a divisão por zero, em $\mathbb{R}$, não é possível. Então:

$D_A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x + 2) \neq 0\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

b) A expressão $B(x) = 5x^3 + \sqrt{x} - \frac{3}{x - 2}$ contém um termo com sinal de radical, portanto a expressão sob o sinal de radical não pode ser negativa e um termo com uma expressão no denominador, a qual, como sabemos, deverá ser diferente de zero. Então:

$D_B = \{x : x \geq 0 \text{ e } x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \text{ e } x \neq 2\} \Leftrightarrow D_B = [0, 2[\cup]2, +\infty[$

4

Indique a expressão idêntica da expressão $\sqrt{x^2}$, e o respectivo domínio.

Digitalizada com CamScanner

Expressões racionais e irracionais

As expressões algébricas designam-se por **racionais** ou **irracionais** consoante a variável não aparece ou aparece sob o sinal de radical, respectivamente.

Dentre as expressões racionais temos as denominadas **inteiras**, se nelas não figura a variável (ou variáveis) no denominador; e **fraccionárias**, caso a variável (ou variáveis) figure no denominador.

Exemplos

1. As expressões $x^2 + 2$ e $(x-1)^2 + x - 5$ são racionais inteiras.
2. As expressões $\frac{x^3-3}{(x-1)(x+2)^2}$ e $\frac{3x^3+x+1}{x}$ são fraccionárias.
3. As expressões $\sqrt{x^2+2x-1}$ e $\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$ são irracionais.

Identidades notáveis

As principais identidades notáveis com as quais trabalharemos são as seguintes:

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$
- $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

Exercício resolvido

1. Factorize as expressões: a) $x^6 - 64$ b) $x - 2$ c) $125 + a^3$

Resolução

a) $x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3-8)(x^3+8) =$
$= (x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4) =$
$= (x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

b) $x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$

c) $125 + a^3 = (5+a)(25-5a+a^2)$

Fracções racionais

As fracções algébricas nem sempre são divisíveis umas pelas outras. Contudo, se recordarmos a noção de fracção ordinária, por analogia, podemos considerar razões de expressões algébricas. Por exemplo:

$$\frac{3x^2-2y+4}{4x+y} \quad ; \quad \frac{x^2+2y^3+7x-3}{2x^2-x-3}$$

5

Determine se as expressões que se seguem são racionais (inteiras ou fraccionárias) ou irracionais:

a) $x^2 - 1$

b) $\frac{2x+1}{3x^2}$

c) $x^4 - 3x + 2$

d) $(x+2)(x-3)$

e) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-2x}}$

f) $\frac{\sqrt{2}x+4}{x^2-2x+2}$

g) $\frac{x^8-3}{(x-1)(x-3)^2}$

h) $3x^5 - 4x + \frac{1}{4}$

i) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x+1}}\sqrt{x^2+2x-1}$

6

Determine os números reais a e b, por forma que sejam idênticas as seguintes expressões algébricas:
$x^3 + (5a-b)x^2 + x + ab$ e
$x^3 + ax^2 + x + (a-b)$

7

Mostre que:
$(x+y)^3 =$
$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

8

Calcule:

a) $(3b^2 - 2bc)^2$

b) $\left(2y + \frac{1}{3y}\right)^3$

Digitalizada com CamScanner

9

Factorize as expressões:
a) $u^2 + 6u - 7$
b) $x^2 + 27$
c) $a^2x^2 - 16^2y^6$

Estas espressões, razões de expressões algébricas, são designadas por **fracções racionais**. As operações sobre fracções racionais são realizadas do mesmo modo que sobre os números racionais. Deste modo, para multiplicar uma fracção racional por outra é necessário multiplicar de forma separada os seus numeradores e os seus denominadores, e sempre que possível simplificar o resultado.

Exercício resolvido

Determinemos o produto das seguintes fracções racionais:

$$\frac{x^2 - 3y}{2x^2 + x + 1} \text{ e } \frac{2x^3 - 1}{4 + x^2}$$

Resolução

$$\frac{x^2 - 3y}{2x^2 + x + 1} \cdot \frac{2x^3 - 1}{4 + x^2} = \frac{(x^2 - 3x) \cdot (2x^3 - 1)}{(2x^2 + x + 1) \cdot (4 - x^2)} =$$

$$= \frac{2x^5 - x^2 - 6x^4 + 3x}{8x^2 - 2x^4 + 4x - x^3 + 4 - x^2} = \frac{2x^5 - x^2 - 6x^4 + 3x}{7x^2 - 2x^4 + 4x - x^3 + 4}$$

10

Simplifique a fracção:

$$A = \frac{4a^2 - x^2}{x^3 - 8a^3}$$

11

Indique as trasformações idênticas, mostrando em cada caso o domínio da equivalência.

a) $\frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x^2 - x}$

b) $\frac{x^4 - x^2}{x^4 - x}$

c) $\frac{2x^2 - 32}{x^2 + x - 20}$

No numerador e no denominador de cada uma das fracções racionais temos expressões algébricas não racionais e, como podemos verificar, o produto de duas expressões algébricas, não racionais, é uma expressão algébrica cujos termos se obtêm multiplicando cada termo da primeira expressão pelos termos da segunda e adicionando os produtos dos termos semelhantes.

Para a adição e a subtracção de fracções racionais é necessário, do mesmo modo que para os números fraccionários, reduzi-los ao mesmo denominador e só depois adicionar ou subtrair os seus numeradores, e por fim simplificar o resultado, caso seja possível.

Exercício resolvido

Determine a diferença das fracções racionais seguintes:

$$\frac{2x - 4}{x^3 + 8} \wedge \frac{3x + 4}{x^3 - 4x}$$

Resolução

$$\frac{2x - 4}{x^3 + 8} - \frac{3x + 4}{x^3 - 4x} = \frac{(2x - 4) \cdot (x^3 - 4x)}{(x^3 + 8) \cdot (x^3 - 4x)} - \frac{(3x - 4) \cdot (x^3 + 8)}{(x^3 + 8) \cdot (x^3 - 4x)} =$$

$$= \frac{2x^4 - 8x^2 - 4x^4 + 16x}{x^6 - 4x^4 + 8x^3 - 32x} - \frac{3x^4 + 24x + 4x^3 + 32}{x^6 - 4x^4 + 8x^3 - 32x} = \frac{-x^4 - 8x^2 + 40x + 32}{x^6 - 4x^4 + 8x^3 - 32x}$$

Consideremos agora o caso da divisão de expressões algébricas racionais. Para este caso, como já o sabemos, podemos transformar a divisão numa multiplicação invertendo os termos da fracção racional divisor, isto é, o numerador dessa fracção passa a denominador e vice-versa, e procede-se de igual modo que para a multiplicação.

Digitalizada com CamScanner

Uma outra possibilidade, é de imediato olhar-se para os numeradores e para os denominadores constantes na divisão, factorizá-los e simplificá-los, caso seja possível.

Exercício resolvido

1. Resolva:

a) $\frac{2x^2-6x}{x^2+x+1} \div \frac{9+x^2}{x^3-1}$ b) $\frac{y^3-a^3}{a^2-4a+3} \div \frac{(a+y)^2}{a^2-1}$

Resolução

a) $\frac{2x^2-6x}{x^2+x+1} \div \frac{9+x^2}{x^3-1} = \frac{2x^2-6x}{x^2+x+1} \cdot \frac{x^3-1}{9-x^2} =$

$= \frac{2x(x-3)(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(3-x)(3+x)} = -\frac{2x(x-1)}{3+x} = \frac{2x(1-x)}{x+3}$

b) $\frac{y^3+a^3}{a^2-4a+3} \div \frac{(a+y)^2}{a^2-1} =$

$= \frac{(a+y)(y^2-ay+a^2)}{(a-1)(a-3)} \cdot \frac{(a-1)(a+1)}{(y+a)^2} =$

$= \frac{(y^2-ay+a^2)(x+1)}{(a-3)(y+a)}$

12

Calcule:

a) $\frac{2x^2-6x}{x^2+x+1} \cdot \frac{x^3-1}{9-x^2}$

b) $\frac{2x-8}{x^3-8} - \frac{3x-4}{x^3-4x} + \frac{1}{x^2+4x+4}$

Racionalização de denominadores

Para racionalizar denominadores de expressões algébricas irracionais multiplicamos ambos os termos da fracção por um radical de modo a obtermos um radical em que o índice seja igual ao expoente do radicando.

Exercícios resolvidos

1. Racionalize os denominadores das seguintes expressões algébricas irracionais:

a) $\frac{1+\sqrt[3]{3x}}{5\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{3x}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{4x^2}{2\sqrt{3}-\sqrt{5x}}$

Resolução

2. a) $\frac{1+\sqrt[3]{3x}}{5\sqrt[3]{2}} = \frac{1+\sqrt[3]{3x}}{5\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{(1+\sqrt{3x}) \cdot (\sqrt[3]{2^2})}{5\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{12x}}{10}$

b) $\frac{3x}{\sqrt{5}} = \frac{3x}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}x}{5}$

c) $\frac{4x^2}{2\sqrt{3}-\sqrt{5x}} = \frac{4x^2}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}x} \cdot \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}x}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}x} = \frac{4x^2(2\sqrt{3}+\sqrt{5}x)}{12-5x^2}$

Digitalizada com CamScanner

Equações

Conceitos gerais e equivalência de equações

Chama-se **equação** a uma igualdade em que aparece uma ou mais letras a representar um ou mais valores dsconhecidos: A essa(s) letra(s) chama-se incógnita(s).

Exemplos

1. $\sqrt{x+1} = x^2 - x + 2$
2. $x^3 - 2x + 3y = xy$

À semelhança do que acontece para as expressões algébricas, para as equações também se define o domínio de definição.

Chama-se **domínio de definição** de uma equação ao conjunto de valores das incógnitas para os quais ambos os membros da equação são definidos.

Exercício resolvido

Determine os domínios de definição das equações seguintes:

a) $\frac{2x-3}{x-1} = \frac{4x+5}{x-2}$ b) $\sqrt{x-4} = \sqrt{2-x}$

Resolução

a) A equação não está definida para os valores de x tais que $x - 1 = 0$ e $x-2=0$. Então, o domínio é:
$D = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 \neq 0 \wedge x - 2 \neq 0\} \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$.

b) Como intervêm radicais as expressões sob o sinal de radical devem ser positivas ou iguais a zero. Então:
$x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ e $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Tendo em conta estas duas condições vemos que o domínio de definição é o conjunto vazio, pois não existem valores que simultaneamente verifiquem as duas condições e, como é óbvio, a nossa equação não tem solução.
$D = \{x \in \mathbb{R}: x - 4 \geq 0 \wedge 2 - x \geq 0\} \Leftrightarrow D = \emptyset$.

13 Determine os domínios de definição das seguintes equações:

a) $5(x - 4) = 2(x + 1) - 7$

b) $\frac{2y+4}{3} - \frac{3y}{9} = 5$

c) $\frac{1}{y} = 8 - \frac{3}{y}$

d) $\sqrt{2x+1} + 8 = 0$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}x - 3}$

f) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+2} = 4$

Como já sabemos, a solução de uma equação é o conjunto de valores das incógnitas que verificam a equação, isto é, que transformam ambos os membros numa igualdade verdadeira.

No processo de resolução de equações, isto é, de determinação das suas soluções, deparamos com equações que têm as mesmas soluções num mesmo domínio. São as chamadas **equações equivalentes**.

Digitalizada com CamScanner

Exemplos

1. As equações $x = 2$ e $2x + 4 = 8$ têm por domínio o conjunto $\mathbb{R}$ e têm a mesma solução $x = 2$, portanto são equações equivalentes.
2. As equações $x - 3 = 0$ e $x^2 - 3x = 0$ embora tenham o mesmo domínio $\mathbb{R}$, não são equivalentes, pois a segunda equação $x^2 - 3x = 0$ para além da solução $x = 3$ admite a solução $x=0$ que não é solução de $x - 3 = 0$. Se se fizesse uma restrição ao domínio para $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ as duas equações seriam equivalentes relativamente a esse domínio.

Antes de passarmos à resolução de diferentes tipos de equações consideremos algumas operações tidas em conta nas transformações de equações:

Substituição de um dos membros por outro equivalente.

$$3(x^2 - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 3(x - 1)(x + 1) = x - 1$$

Transporte de uma expressão contida num membro de uma equação para o outro membro.

$$x^2 + y^2 = 2xy + 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 5$$

Elevação de ambos os membros de uma equação ao quadrado.

$$\sqrt{x + 4} = 1 \Rightarrow x + 4 = 1$$

Extracção da mesma raiz a ambos os membros de uma equação.

Esta operação só é possível se ambos os membros forem positivos.

$$(x - 1)^2 = 1$$

Extraindo a raiz quadrada desta equação temos $|x - 1| = 1$ que é equivalente à equação dada.

No processo de aplicação das operações possíveis na resolução de equações podemos restringir ou estender o domínio de definição, o que por vezes resulta na perda de soluções ou no aparecimento de soluções estranhas. No processo de resolução das equações lidaremos com casos desta natureza.

Equações do 2.º grau

O primeiro tipo de equações que estudámos nas classe anteriores foram as equações lineares do 1.º grau, isto é, equações da forma $ax + b = 0$, onde a e $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Como sabemos, a sua solução é-nos dada por:

$$x = -\frac{b}{a}$$

14

Verifique para cada uma das equações que se seguem a solução indicada:

a) $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x = -1$; $x = -4$

b) $3x = 2$; $x = \frac{2}{3}$

c) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x} = 5$

$x = 4$; $x = \frac{1}{3}$

d) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 1} = 1$

$x = -\frac{3}{4}$

e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x - 1}$; $x = 3$

Digitalizada com CamScanner

15

Resolva as seguintes equações:

a) $5(x-4) = 2(x+1) - 7$

b) $2x^2 + 15x + 7 = 0$

c) $\frac{1}{y} = 8 - \frac{3}{y}$

d) $x^2 - 3x + 2 = 0$

e) $-3x^2 + 3x = 0$

f) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

g) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-2}$

h) $(x+1)^2 = 16$

i) $(2x+1)^2 + (2x-1)^2 = 34$

16

Separar o quadrado perfeito, determinar as raízes e factorizar os trinómios quadráticos incompletos:

a) $x^2 - 2x$

b) $5 - \frac{x^2}{2}$

17

Sem resolver a equação

$2x^2 - 7x + 6 = 0$

determine uma outra equação quadrática, cujas raízes sejam inversas das raízes da equação inicial.

Uma **equação do 2.º grau** é a vulgarmente conhecida por equação quadrática ou ainda por trinómio quadrado e, como sabemos, a sua forma geral é $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e x é a variável.

A equação quadrática é bastante conhecida da 10.ª classe e vamos recordar apenas os conceitos fundamentais.

Em termos gerais as soluções são-nos dadas pela conhecida fórmula resolvente:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nesta fórmula a expressão $\Delta = b^2 - 4ac$ é designada por **discriminante**. Na sua determinação podem surgir três possibilidades:

- $\Delta > 0$: então $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b + \Delta}{2a}$ e temos assim duas raízes reais distintas.
- $\Delta = 0$: neste caso $x_1, x_2 = \frac{-b}{2a}$ e assim $x_1 = x_2$ e a nossa equação tem assim duas raízes reais e iguais.
- $\Delta < 0$: tendo em conta que o quadrado de um número real não pode ser negativo, neste caso a nossa equação não tem raízes reais.

Um conceito importante no estudo das equações quadráticas é o teorema que relaciona as raízes da equação.

Teorema de Bezout: se $ax^2 + bx + c = 0$ é uma equação quadrática cujas raízes são x_1 e x_2 então:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Demonstração

Usando a fórmula resolvente temos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) =$$

$$= \frac{b^2 - b\sqrt{b^2 - 4ac} + b\sqrt{b^2 - 4ac} - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

c.q.d.

Digitalizada com CamScanner

Muitas vezes a soma das raízes é designada por S e o produto por P e assim tem-se:

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = P = \frac{c}{a}$$

Como $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}, (a \neq 0) \Leftrightarrow$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

que é uma fórmula que permite escrever facilmente uma equação do 2.º grau cujas raízes sejam conhecidas.

Exercícios resolvidos

1. Escrever uma equação do 2.º grau que tem por raízes os números $-\frac{7}{2}$ e 1.

Resolução

Como $S = -\frac{7}{2} + 1 = -\frac{5}{2}$ e $P = -\frac{7}{2} \cdot 1 = -\frac{7}{2}$

tem-se $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0$

2. Considere a equação $3x^2 - 7x - 2$. Calcule a soma e o produto das suas raízes.

Resolução

Como sabemos $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \frac{-7}{3} = \frac{7}{3}$; $P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = -\frac{2}{3}$

Equações do 3.º grau

Chama-se **equação do 3.º grau** em $\mathbb{R}$ a toda a equação real que pelos princípios de equivalência pode ser reduzida a uma equação da forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a, b, c, d, \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0 \qquad (1)$$

Casos particulares:

- Se $a = 0$ e $b \neq 0$ tem-se uma equação do 2.º grau, com a qual já lidámos.
- Se $d = 0$, a nossa equação (1) pode ser reduzida a uma equação de grau inferior, pois

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow (ax^2 + bx + c)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 + bx + c = 0$$

18

Resolva as equações:

a) $x^3 - x = 0$

b) $x^3 + x = 0$

c) $x^3 - 4x^2 + 5x = 0$

19

Determine as soluções das equações seguintes:

a) $x^3 + x - 2 = 0$

b) $2x^3 - 3x^2 - 2x = 0$

c) $7x^3 - x^2 = 0$

d) $x^3 - 4x^2 + 6x - 6 = 0$
Sabemos que 2 é uma das suas soluções.

Digitalizada com CamScanner

Assim, as soluções desta equação são-nos dadas por $x = 0$ e pela solução da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ cujas raízes facilmente sabemos determinar.

Exercício resolvido

Resolva a equação $x^3 - x^2 - 6x = 0$

Resolução

Como vimos, a equação pode ser reduzida a uma equação de grau inferior.

$x^3 - x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - x - 6 = 0$

$x = 0 \vee x = 3 \vee x = -2.$

$S = \{-2, 0, 3\}$

c.a.

$x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-6)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

- Se $b = c = 0$, temos a equação $ax^3 + d = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{d}{a} = 0$. Usando a substituição $\frac{d}{a} = t$, obtemos $x^3 + t = 0 \Leftrightarrow x^3 + (\sqrt[3]{t})^3 = 0$. Usando uma das identidades notáveis.

20

Escreva uma equação cúbica com as raízes:

a) 0,1 e 2

b) −1,2 e 3

$x^3 + (\sqrt[3]{t})^3 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt[3]{t})(x^2 - x\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t^2}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt[3]{t}) = 0 \vee (x^2 - x\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t^2}) = 0$

Resolvendo as duas últimas equações já sobejamente conhecidas, obtemos as soluções da nossa equação. Como é óbvio t representa um número real pois é o quociente entre dois números reais.

Exercícios resolvidos

Resolva a equação: $2x^3 + 54 = 0$

Resolução

$2x^3 + 54 = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{54}{2} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 27 = 0.$

$(x^3 + 27) = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 3^3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x^2 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$S = \{-3\}$

Por uma das identidades notáveis

c.a.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = -27$

A equação do 2.º grau não tem raízes reais

Digitalizada com CamScanner

• Se $c = d = 0$, temos uma equação na forma $ax^3 + bx^2 = 0$. Para a sua resolução, dado que x^2 é o factor comum, coloca-se este factor em evidência e obtemos:

$$ax^3 + bx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee ax + b = 0.$$

• Deste modo $x_1 = x_2 = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$

Exercício resolvido

Determine a solução da equação $5x^3 - 9x^2 = 0$

Resolução

Factorizando $5x^3 - 9x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(5x - 9) = 0$ de onde $x^2 = 0$ ou $5x - 9 = 0$. Como solução temos $x = 0 \vee x = \frac{9}{5}$.

$S = \left\{0, \frac{9}{5}\right\}$

21

Determine a e b de modo que:

a) 3 seja raiz dupla da equação $x^3 + ax^2 - 5x + b = 0$;

b) 1 seja raiz dupla da equação $x^3 - ax^2 + 3x + b = 0$.

• Caso geral: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Iremos considerar apenas os casos em que d é um número inteiro. Para a sua solução consideram-se os divisores de d e por tentativas procura-se uma das raízes da equação. Encontrada a raiz por vias conhecidas são determinadas as restantes, caso existam.

Exercício resolvido

Determine as soluções da equação $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$.

Resolução

Se existem raízes inteiras, elas deverão ser divisores de 5 que representa o d na equação geral do 3.º grau.

O conjunto dos divisores de 5 é $D = \{-5, -1, 1, 5\}$. Vamos substituindo os valores contidos em D na nossa equação até encontrarmos a 1.ª raiz, procedendo como se estivéssemos a determinar as raízes de um polinómio.

Então, $P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 5 = -1 + 5 + 1 - 5 = 0$ sendo assim -1 raiz da equação.

Encontrada a primeira raiz, usando a Regra de Ruffini, iremos obter uma equação quadrática.

Deste modo:

$x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 4x - 5) = 0$
$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee x^2 + 4x - 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1 \vee (x - 1)(x + 5) = 0$
$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = -5$
$S = \{-5, -1, 1\}$

c.a

	1	5	−1	−5
−1		−1	−4	5
	1	4	−5	0

$(x + 1)(x^2 + 4x - 5)$

c.a
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = 16 + 20$
$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$
$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-4 + 6}{2} \vee x_2 = \frac{-4 - 6}{2}$
$\Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = -5$

Digitalizada com CamScanner

Tendo em conta os casos vistos, verificamos que para a resolução de equações da 3.º grau destacam-se as seguintes técnicas de resolução:

- Redução da equação a um grau inteiro.
- Substituição $\frac{b}{a} = t$ e uso de identidades notáveis.
- Colocação de factores comuns em evidência.
- Determinação da 1.ª raiz de entre os divisores de d e depois da aplicação da Regra de Ruffini para determinar as outras raízes.

22

Resolva as equações seguintes:
a) $x^4 - 1 = 0$
b) $x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} = 0$

Equações que se reduzem à equação quadrática

Equação biquadrada

Chama-se equação biquadrada a uma equação da forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a, b, c, \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

23

Resolva as equações seguintes:
a) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$
b) $x^6 - 1 = 0$

Esta equação pode ser considerada equação quadrática relativamente a x^2, pois é equivalente a $a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0$. Fazendo a substituição $x^2 = t$, obtemos a equação $at^2 + bt + c = 0$ e podemos, assim, aplicar a teoria das equações quadráticas.

Exercício resolvido

Resolva as equações
a) $x^4 - 14x^2 + 40 = 0$ b) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.

Resolução

a) Para a resolução desta equação façamos a substituição $t = x^2$ obtendo assim $t^2 - 14t + 40 = 0$. Usando a fórmula resolvente obtemos $t = \{4, 10\}$. Como é óbvio, para a obtenção da solução da equação inicial teremos voltar à nossa substituição.
Para $t = 4$, tem-se:
$x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$.
Para $t = 10$, tem-se:
$x^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$.
$S = \{-\sqrt{10}, -2{,}2, \sqrt{10}\}$

b) Efectuemos a substituição $x^2 = t$ e teremos:
$t^2 - 5t + 6 = 0$ que é uma equação quadrática. Pelas técnicas já conhecidas, $t = \{2, 3\}$.
Para $t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ Para $t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$
$S = \{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$

Digitalizada com CamScanner

Equações do tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, onde n é um número natural maior que 3

A resolução deste tipo de equações faz-se mediante a substituição $t = x^n$. Feito isto, obtemos uma equação quadrática com a qual já sabemos lidar.

Exercício resolvido

Resolva a equação $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

Resolução

Façamos a substituição $x^3 = t$. Obtemos uma nova equação em t: $t^2 - 10t + 9 = 0$. Facilmente obtemos as soluções $t = \{1, 9\}$, pois, por exemplo, sabemos que a soma das duas raízes é 10 e o produto é 9.
Para $t = 1$, vem:
$x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 + x + 1 = 0$.
Esta equação não tem raízes reais. Aqui temos apenas $x = 1$ por solução.
Para $t = 9$, vem:
$x^3 = 9 \Leftrightarrow x^3 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt[3]{9})(x^2 + x\sqrt[3]{9} + (\sqrt[3]{9})^2) = 0$
A última equação também não tem raízes reais e assim o conjunto das nossas soluções é:

$S = \{1, \sqrt[3]{9}\}$

Em geral, temos $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $a, b, c, \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Para este tipo de equações, como vimos, usamos a substituição $t = x^n$.

Exercício resolvido

Qual é a substituição para a resolução da equação $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$?

Resolução

Faz-se a substituição, por exemplo, $z = x^3$.

Equações irracionais

Chama-se **equação irracional** a toda a equação em que pelo menos um dos membros é uma expressão irracional da(s) incógnita(s).

Para a resolução deste tipo de equações são tidas em conta as operações usadas nas transformações das equações e os domínios de definição.

Exercício resolvido

1. Resolva as seguintes equações irracionais:

a) $\sqrt{x-3} = -1$ b) $\sqrt{x-2} = \sqrt{1-x}$ c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 4$

Digitalizada com CamScanner

Resolução

a) $\sqrt{x-3} = -1$ $D = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \geq 0\}$; $D = [3, +\infty[$

$\Rightarrow (\sqrt{x-3})^2 = (-1)^2$. Elevar ambos os membros ao quadrado.

$\Leftrightarrow x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$

Verificação

$x = 4$; $\sqrt{4-3} = -1 \Leftrightarrow 1 = -1$ (Falso)

Logo, $x = 4$, não é solução da equação $S = \varnothing$

b) $\sqrt{x-2} = \sqrt{1-x}$

c.a.

$x - 2 \geq 0 \wedge 1 - x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 2 \wedge x \leq 1$

$D = \varnothing$

$D = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 \geq 0 \wedge 1 - x \geq 0\}$ $D = \varnothing$

Como as expressões não estão definidas no mesmo domínio este é vazio e, portanto, a equação não tem solução. $S = \varnothing$

c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 4$

c.a.

$x - 1 \geq 0 \wedge x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 1 \wedge x \geq -2$

$D = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 \geq 0 \wedge x + 2 \geq 0\}$

$D = [1, +\infty[$

$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 4 - \sqrt{x+2}$ Isolar o radical.

$\Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 = (4 - \sqrt{x+2})^2$

$\Leftrightarrow x - 1 = 16 - 8\sqrt{x+2} + x + 2 \Leftrightarrow x - x - 1 - 18 = -8\sqrt{x+2}$ Elevar ambos os membros ao quadrado.

$\Leftrightarrow -19 = -8\sqrt{x+2}$

$\Rightarrow (-19)^2 = (-8\sqrt{x+2})^2 \Leftrightarrow 361 = 64(x + 2)$ Simplificar e isolar o radical.

$\Leftrightarrow 361 = 64x + 128 \Leftrightarrow x = \frac{233}{64}$ Elevar ambos os membros ao quadrado.

Verificação $x = \frac{233}{64}$ Simplificar e determinar o valor de x.

$\sqrt{\frac{233}{64} - 1} + \sqrt{\frac{233}{64} + 2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{233 - 64}{64}} + \sqrt{\frac{233 + 128}{64}} = 4$ Substituir x por $\frac{233}{64}$.

$\frac{13}{8} + \frac{19}{8} = 4 \Leftrightarrow \frac{32}{8} = 4$

$4 = 4$ (Verdade) $S = \left\{\frac{233}{64}\right\}$

Como $A^2 = B^2 \neq A = B$, é necessário verificar se as soluções encontradas são as soluções da equação ou se são soluções estranhas, ou seja, se são soluções da equação $A^2 = B^2$ e não são solução da equação $A = B$.

$A = B \Rightarrow A^2 = B^2$

$A = B \Leftrightarrow A^3 = B^3$

Digitalizada com CamScanner

Inequações irracionais

Antes de entrarmos a fundo no estudo das inequações irracionais, recordemos alguns conceitos já conhecidos, tais como a noção de inequação e sua resolução.

Para a definição de inequação, um conceito importante é o de desigualdade.

Chama-se **desigualdade** a toda a fórmula que se obtém ligando duas expressões algébricas por meio dos sinais «>», «<», «≥» ou «≤».

Exemplo

1. $a^2 + b^2 \geq -2ab;\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
2. $3 + \sqrt{10} < 17$.

Chama-se **inequação** a uma desigualdade em que pelo menos num dos membros aparece uma ou mais incógnitas.

Dentre as inequações podemos encontrar as que podem ser escritas numa das seguintes formas-padrão:

$$ax + b > 0;\quad ax + b \geq 0 \qquad a, b, x \in \mathbb{R}$$
$$ax + b < 0;\quad ax + b \leq 0$$

designam-se por inequações do 1.º grau.

À semelhança da resolução de equações, **resolver uma inequação** é determinar o conjunto de valores do seu domínio que verificam a inequação, isto é, é determinar as soluções da inequação.

Duas inequações dizem-se **equivalentes** se elas têm o mesmo domínio de existência e o mesmo conjunto de soluções.

Exemplos

1. Inequações:
   a) $5x + \frac{1}{3} > 0$.
   b) $35 - 7x \leq 0$.
2. Inequações equivalentes:
   a) $5x + \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow 5x > -\frac{1}{4}$
   b) $-4x \leq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 0$.

De um modo geral, as definições utilizadas para as equações são válidas para as inequações, porém, existem algumas particularidades que se baseiam nas seguintes propriedades:

24

Considere as seguintes expressões:

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$
2. $\sqrt{x-1} > x$

Qual das duas expressões representa uma desigualdade?

25

Escreva uma inequação equivalente a $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} > 0$.

Digitalizada com CamScanner

26

Determine a solução das seguintes equações irracionais:

a) $\sqrt{x+5} = 4$

b) $\sqrt{18-2x} = 4$

c) $3\sqrt{x+1} = \sqrt{6}$

d) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$

e) $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$

f) $\sqrt{14-x} = \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1}$

g) $2x - \sqrt{4x} = 12$

h) $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} = 6$

i) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2x} = 0$

j) $\sqrt{x+7} = \sqrt[3]{x-5}$

- O sentido de uma inequação não se altera quando adicionamos a ambos os membros da inequação a mesma expressão, isto é, se por exemplo, num domínio D, $f(x) > g(x)$ e $h(x)$ é uma função nesse domínio, então:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$$

- O sentido de uma inequação não se altera quando ela é multiplicada ou dividida por um número positivo.
- O sentido de uma inequação altera-se quando ela é multiplicada ou dividida por um número negativo.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x. As inequações do tipo

$$f(x) \cdot g(x) > 0; f(x) \cdot g(x) \geq 0 \wedge f(x) \cdot g(x) < 0; f(x) \cdot g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

são denominadas inequações produto.

Do mesmo modo se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções na variável x as inequações na forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0; \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \wedge \frac{f(x)}{g(x)} < 0; \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0, \text{ com } g(x) \neq 0$$

são denominadas inequações quociente.

Resolução de inequações

Inequações do 1.º grau

Consideremos a inequação $ax + b > 0$.

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}, a \neq 0$$

ou seja, a inequação admite como solução todos os números reais excepto $a = 0$. Se se considerasse $a = 0$, então a inequação não admitiria qualquer solução e, como tal, seria impossível.

Exercício resolvido

Resolva as seguintes inequações:

a) $2(2x - 9) \leq 3$

b) $x(x + 11) \geq 0$

c) $(x + 1)(3x - 4) < 0$

Digitalizada com CamScanner

Resolução

a) $2(2x + 9) \leq 3 \Leftrightarrow 4x + 18 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq -\frac{15}{4}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{15}{4}\right\}$$

b) Como sabemos, para que um produto seja maior ou igual a zero, ou ambos os factores são positivos ou ambos os factores são negativos. Então:

$$x(x+11) \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x+11 \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge x+11 \leq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \geq -11) \vee (x \leq 0 \wedge x \leq -11) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0 \vee x \leq -11$$

C.S = $[0, +\infty[\cup]-\infty, -11]$.

c) Como sabemos, para que um produto seja negativo os factores devem ter sinais contrários. Então:

$(x+1)(3x-4) < 0 \Leftrightarrow (x+1 < 0 \wedge 3x-4 > 0) \vee (x+1 > 0 \wedge 3x-4 < 0)$

$$\Leftrightarrow \left(x < -1 \wedge x > \frac{4}{3}\right) \vee \left(x > -1 \wedge x < \frac{4}{3}\right)$$

Muitas vezes, para a resolução de inequações utiliza-se um processo prático designado **método dos intervalos**.

Para este método utiliza-se uma tabela onde na 1.ª linha se escrevem, por ordem crescente, as raízes das expressões intervenientes. No caso do produto as raízes dos factores e no caso do quociente as raízes do numerador e do denominador. Nas linhas seguintes escrevem-se as expressões intervenientes. Na intersecção das linhas contendo as expressões intervenientes com as colunas que contêm as raízes, coloca-se o zero. Os sinais resultam das regras da multiplicação e da divisão de números inteiros.

Os sinais + e − na tabela indicam os sinais das expressões nos intervalos correspondentes.

Exercício resolvido

Resolva as inequações seguintes, usando o método dos intervalos:

a) $\frac{x+1}{x+7} \geq 0$ b) $(x+1)(3x-1) < 0$

Resolução

a) Construamos a tabela. As raízes do numerador e do denominador são −1 e −7 respectivamente. Assim temos:

Como pretendemos o caso em que a expressão seja positiva ou igual a zero, então:

$S = x \in]-\infty, -7[\cup [-1, +\infty[$

x		-7		-1	
$x+1$	−		−	○	+
$x+7$	−	○	+		+
$\frac{x+1}{x+7}$	+	‖	−	○	+

Digitalizada com CamScanner

b) $(x+1)(3x-1)<0$,

As raízes dos dois factores intervenientes são: $x=-1$ e $x=\frac{1}{3}$

x		-1		$\frac{1}{3}$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$3x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+1)(3x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

A solução será: $S = x \in \left]-1, +\frac{1}{3}\right[$

27

Resolva as inequações seguinte

a) $2x-3<5x+7$

b) $x(x^2+1)(x^2+1)>0$

c) $\frac{x-1}{x-5}>0$

d) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+1}\leq 0$

e) $3x+\frac{1}{x}-\frac{7}{2}>0$

f) $\frac{1}{x}+\frac{3}{4x}>\frac{7}{8}$

g) $\frac{x^2-5x}{x-3}\leq 0$

h) $\frac{5}{x+4}<x$

i) $|x^3-1|>1-x$

j) $\frac{4x+5}{x^2+x}\leq 0$

k) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}<0$

Inequações do 2.º grau

Chama-se inequação do 2.º grau, às expressões do tipo:

$$ax^2+bx+c>0;\quad ax^2+bx+c\geq 0 \qquad a,b,c\in\mathbb{R}\ \text{e}\ a\neq 0$$
$$ax^2+bx+c<0;\quad ax^2+bx+c\leq 0$$

A resolução das inequações do 2.º grau (ou inequações quadráticas) pode ser efectuada de duas formas: analítica ou geométrica.

Resolução analítica

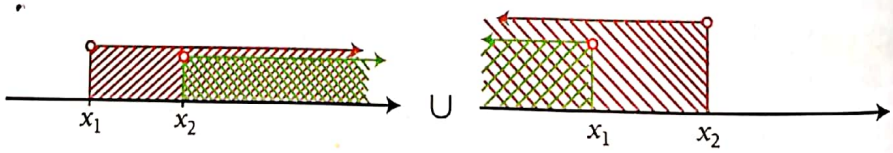
Para este tipo de resolução são possíveis dois casos:

- $ax^2+bx+c>0$

Iniciamos a resolução determinando as raízes da mesma. Sejam elas x_1 e x_2. Por factorização, a nossa expressão inicial toma a forma $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Assim:

$$\begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>x_1 \\ x>x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x<x_1 \\ x<x_2 \end{cases}$$

Usando o eixo numérico:



Solução: $x\in\ ]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$

- $ax^2+bx+c<0$

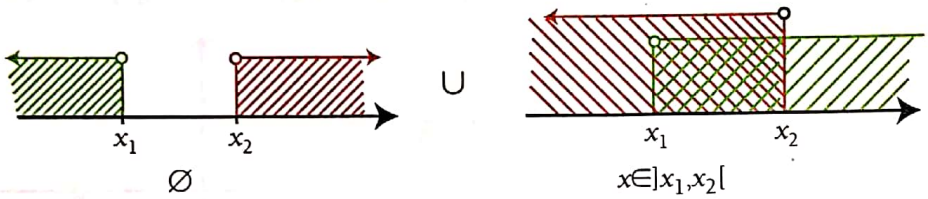
Neste caso a equação inicial toma a forma $(x-x_1)(x-x_2)<0$.

Digitalizada com CamScanner

Assim:

$$\begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x > x_1 \\ x < x_2 \end{cases}$$

Usando o eixo numérico:



Solução: $x \in]x_1, x_2[$

Exercício resolvido

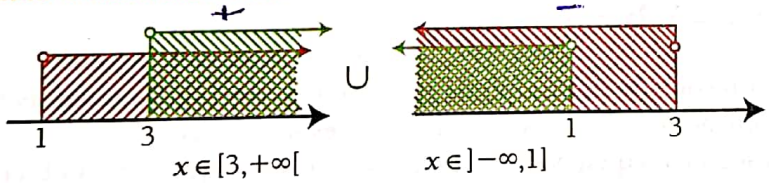
Determine a solução da seguinte inequação $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Resolução

As raízes da equação do 2.º grau são 1 e 3. Factorizando temos:

$$(x-1)(x-3) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ x < 3 \end{cases}$$

Usando o eixo numérico:



A solução é: $x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$

Para o caso das inequações de grau superior a dois, os métodos de resolução são os mesmos que para os casos anteriores. Particularmente no caso das inequações polinomiais, inicia-se a resolução factorizando o polinómio e depois procede-se de forma já conhecida, tendo em conta os diferentes casos.

Resolução geométrica

Para este tipo de resolução, como é óbvio, recorremos à representação gráfica da equação e dependendo do caso; se a inequação for maior ou igual a zero a resposta encontra-se na parte do gráfico representada acima do eixo dos x, caso contrário a solução encontra-se na parte do gráfico representada abaixo do eixo dos x.

28

Resolva as inequações que se seguem, aplicando o método dos intervalos:

a) $x^2 - 9 \geq 0$

b) $\frac{x-7}{x+2} < 0$

c) $\frac{x(x-5)}{x+1} \geq 0$

d) $\frac{2x}{3} - \frac{x-1}{2} > \frac{3x-5}{4} + \frac{2-x}{6}$

29

Determine a solução das inequações que se seguem:

a) $\frac{x^2+2}{x^2-1} < -2$

b) $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -2$

Digitalizada com CamScanner

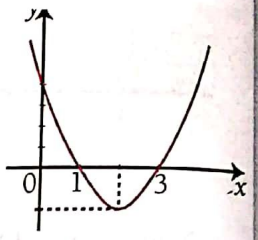
Exercícios resolvidos

Determine geometricamente a solução da inequação $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Resolução

Fazemos o gráfico correspondente e tiramos a solução.
Aplicando o princípio de que a equação do 2.º grau é positiva fora das raízes e negativa dentro.

x	$-\infty$		1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	$+$		0	$-$	0	$+$



A solução é:
$S =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$

30

Resolva geometricamente as seguintes inequações:

a) $\frac{1-x}{2} > x$

b) $-x^2 + 3 > 2$

Vejamos agora o que se significa inequação irracional.

Chama-se inequação irracional a toda a inequação em que a(s) incógnita(s) aparece(m) sob, pelo menos, um sinal de radical.

31

Resolva graficamente as inequações:

a) $2x^2 - 5x - 7 \leq 0$

b) $x^2 > 7x - 10$

c) $\frac{1}{2}x^2 \leq 5 - 3x$

d) $x^2 + 9 \leq 6x$

Exemplos

1. $2 \geq \sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

2. $\sqrt{4x-3} > -2$

3. $\sqrt{3x-2} \geq \sqrt{2x-3}$

Para a resolução deste tipo de inequações, são válidas todas as normas para a resolução de equações e de inequações já estudadas.

Ao resolver inequações irracionais verificamos que para a obtenção da sua solução é necessário ter em conta o seguinte:

- $\sqrt{f(x)}$ existe apenas para $f(x) \geq 0$.
- Para esses valores $f(x) \geq 0$: as desigualdades $f(x) \geq h(x)$, $f^2(x) \geq h^2(x)$ são equivalentes no mesmo domínio, se $g(x) \geq h(x)$, $\forall\, x \in D$.

32

Resolva as seguintes inequações irracionais:

a) $\sqrt{x+2} > x$

b) $\sqrt{4 - \sqrt{1-x}} > \sqrt{2-x}$

c) $\sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14$

d) $x + 1 \leq \sqrt{x+3}$

e) $\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2 + 12x + 11}$

f) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 0$

g) $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geq 1$

Exercício resolvido

Resolva a seguinte inequação:

$x + 1 > \sqrt{x+3}$

Resolução

$x + 1 > \sqrt{x+3}$

$D = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 \geq 0\}$, logo $D = [-3, +\infty[$

Antes de elevarmos ambos os membros ao quadrado é preciso unificar de modo que ambos sejam não negativos. Por isso $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Digitalizada com CamScanner

Passemos agora à elevação de ambos os membros ao quadrado:

$(x+1)^2 > x+3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x > -2 \wedge x > 1) \vee (x < -2 \wedge < 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 1 \vee x < -2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$

Para a nossa solução interessam-nos os valores no domínio. Portanto, $x > 1$. Falta-nos verificar o caso $x \leq -2$, isto é, $-3 \leq x < -2$. Porém, neste caso torna-se negativo enquanto que o segundo é positivo. Por isso, a nossa solução é $x > 1$, ou seja,

$S = [1, +\infty[$

Sistemas de equações

Sistemas de duas equações

Como já sabemos, duas equações lineares, sejam $3x + 4y = -5$ e $2x - 3y = 8$, podem ser resolvidas de modo a obtermos valores de x e y que satisfazem as duas equações simultaneamente. Ao procurarmos os pares (x, y) que verificam simultaneamente as duas equações, a nossa condição é designada sistema de duas equações a duas incógnitas.

Em geral são-nos dadas duas condições num certo domínio $f(x, y) = 0$ e $g(x,y) = 0$ que se escreve na forma:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

procuramos os pares (x,y) que verificam esta condição.

Do mesmo modo que para as equações se define a equivalência para os sistemas de equações resultantes. Assim, dois sistemas de equações dados no mesmo domínio dizem-se equivalentes se têm nesse domínio o mesmo conjunto de soluções.

Para o estudo da equivalência de sistemas de equações, para além dos conhecidos métodos da resolução de equações, dois novos métodos são tidos em conta:

33

Escreva um sistema de equações impossível e um determinado.

34

Calcule as dimensões de um rectângulo de área 25 m² e de perímetro 12 cm.

Método de substituição

Num sistema, podemos resolver uma das equações relativamente a uma das incógnitas e substituir na outra equação (ou nas outras equações, caso o sistema tenha mais que duas) essa incógnita pela expressão obtida, pois o sistema mantém-se equivalente.

Digitalizada com CamScanner

Exercício resolvido

Resolva os sistemas que se seguem:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Resolução

a) Resolvendo a 1.ª equação em ordem a x e substituindo a expressão na 2.ª, temos:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11 + 3y}{2} \\ 2 \cdot \dfrac{11 + 3y}{2} - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 11 + 3y - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11 + 3(-3)}{2} \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \qquad S = \{(1, -3)\}$$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = 1 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + y)^2 + y^2 = 5 \\ ____ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2y + y^2 + y^2 = 5 \\ ____ \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 2y - 4 = 0 \\ ____ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \\ ____ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(1)(2)}}{2} \\ ____ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \\ ____ \end{cases} \vee \begin{cases} y = \dfrac{-1 + 3}{2} \\ ____ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1 - 3}{2} \\ ____ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$S = \{(2, 1); (-1, -2)\}$

Onde aparece o traço significa que a equação não sofreu qualquer alteração.

Método de redução ou da adição ordenada

Substituindo qualquer das equações de um sistema pela que se obtém adicionando ordenadamente os seus dois membros aos da outra equação, o sistema é equivalente. Neste processo estaremos a lidar com equações de coeficientes simétricos que permitirão a eliminação de uma das incógnitas e deste modo a determinação da outra incógnita.

Exercício resolvido

Resolva o sistema:

$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$

Digitalizada com CamScanner

Resolução

Para resolvermos por este método procedemos do seguinte modo: multiplicamos a 1.ª equação por 4 e a 2.ª por 3. Em seguida, adicionamos as duas equações e obtemos o valor de x.

$$\begin{matrix}(4)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}2x-3y=1\\3x+4y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8x-12y=4\\9x+12y=21\end{cases}$$

$$17x = 25$$

$$x=\frac{25}{17}$$

Voltamos ao sistema inicial e procedemos da mesma forma para determinarmos o valor y. Multiplicamos a 1.ª equação por 3 e a 2.ª por -2. Em seguida, adicionamos as duas equações e obtemos o valor de y.

$$\begin{matrix}(3)\\-(2)\end{matrix}\begin{cases}2x-3y=1\\3x+4y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-9y=13\\-6x-8y=14\end{cases}$$

$$-17y=-11$$

$$y=\frac{11}{17}$$

Logo, a solução do sistema é:

$$S=\left\{\left(\frac{25}{17},\frac{11}{17}\right)\right\}.$$

35

Resolva os sistemas que se seguem, usando o método de substituição:

a) $\begin{cases}2x+4y=0\\x+8y=1\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+y=2\\x+2y=1\end{cases}$

c) $\begin{cases}5x+y=3\\3x-2y=1\end{cases}$

d) $\begin{cases}2x+y=0\\3x+2y=1\end{cases}$

e) $\begin{cases}6x+2y=7\\3x+y=8\end{cases}$

f) $\begin{cases}x+3y=2\\5x+7y=4\end{cases}$

g) $\begin{cases}11x+13y=8\\x+y=1\end{cases}$

Muitas vezes, no processo de resolução de sistemas, usamos o designado **método misto**. Este método surge como uma mistura dos dois métodos: substituição e redução. Neste método determina-se a 1.ª incógnita pelo método de redução e a 2.ª pelo método de substituição.

Exercício resolvido

Resolva o sistema:

$$\begin{cases}2x+3y=5\\-3x+5y=7\end{cases}$$

Resolução

Inicialmente utilizamos o método de redução. Multiplicamos a 1.ª equação por 3 e a 2.ª por 2. Em seguida, adicionamos as duas equações e obtemos o valor de y.

$$\begin{matrix}(3)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}2x+3y=5\\-3x+5y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+9y=15\\-6x+10y=14\end{cases}$$

$$19y=29$$

$$y=\frac{29}{19}$$

Digitalizada com CamScanner

Obtido o valor de y voltamos ao sistema inicial, resolvemos uma das equações em ordem a x e substituímos o y pelo valor obtido. Deste modo calculamos o valor de x.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -3x + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 - 3y}{2} \\ y = \dfrac{29}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 - 3 \cdot \dfrac{29}{19}}{2} \\ y = \dfrac{29}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{95 - 87}{19}}{2} \\ y = \dfrac{29}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{19} \\ y = \dfrac{29}{19} \end{cases}$$

$$S = \left\{\left(\frac{4}{19}; \frac{29}{19}\right)\right\}$$

Regra de Cramer

Um conceito importante para a formulação da Regra de Cramer é o de determinante.

Determinante é, por definição, no caso de uma função com 4 variáveis

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \ \forall \ a, b, c \text{ e } d \in \mathbb{R}.$$

Voltando ao nosso sistema de duas equações a duas incógnitas. Pelos princípios de equivalência

$$\begin{matrix} (-a') \\ (a) \end{matrix} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} (1) \Leftrightarrow \begin{cases} -aa'x - ba'y = -ca' \\ aa'x + ab'y = c'a \end{cases}$$

$$(ab' - ba')y = c'a - ca'$$

$$y = \frac{c'a - ca'}{ab' - ba'}$$

Voltando ao nosso sistema (1) e pelo mesmo processo podemos determinar a outra variável x.

$$\begin{matrix} (-b') \\ (b) \end{matrix} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ab'x - bb'y = -b'c \\ a'bx + bb'y = c'b \end{cases}$$

$$(ab' - a'b)x = b'c - c'b$$

$$x = \frac{b'c - c'b}{ab' - ba'}$$

A solução do nosso sistema é $\left(\dfrac{b'c - c'b}{ab' - ba'}, \dfrac{c'a - ca'}{ab' - ba'}\right)$ (2)

Como é do nosso conhecimento o denominador deverá ser diferente de zero, então $ab' - ba' \neq 0$.

36

Usando o método da adição ordenada, resolva cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = y + 3 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x - 9y = 0 \\ 8x + 6y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$

37

Resolva cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

Digitalizada com CamScanner

Prestando atenção a esta expressão, ela não é mais do que o chamado determinante do sistema (1).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$$

que se representa pelo símbolo Δ. Então $\Delta = ab' - ab'$

Se o determinante do sistema é diferente de zero, então o sistema tem uma única solução dada por (2).

Tendo em conta a solução do nosso sistema, (2), tomemos:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b \wedge \Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$$

Então:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \text{ e } y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Regra de Cramer: os valores de x e de y que verificam o sistema são obtidos por duas fracções que têm por denominador o determinante do sistema e os numeradores são os determinantes deduzidos deste, substituindo os coeficientes de x e y respectivamente, pelos termos independentes das respectivas equações.

Exercício resolvido

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

Resolução

Calculemos Δ, Δx e Δy.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5; \text{ e}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10;$$

Então: $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2$

$S = \{(1, 2)\}$

Digitalizada com CamScanner

Se o determinante do sistema é $\Delta = 0$ então o sistema não é determinado. Colocam-se então as seguintes possibilidades:

- $\Delta = 0 \wedge \Delta x = 0$ — Sistema indeterminado.
- $\Delta = 0 \wedge \Delta x \neq 0$ — Sistema impossível.
- $\Delta = 0 \wedge \Delta y = 0$ — Sistema indeterminado.
- $\Delta = 0 \wedge \Delta y \neq 0$ — Sistema impossível.
- $\Delta = 0 \wedge c \neq 0 \vee c' \neq 0$ — Sistema impossível.
- $\Delta = 0 \wedge c = c' = 0$ — Sistema duplamente indeterminado.
- Para os primeiros dois casos $a \neq 0 \vee a' \neq 0$.
- Para os dois casos seguintes $b \neq 0 \vee b' \neq 0$.
- Para os dois últimos casos $a = a' = b' = b = 0$.

38

Resolva os sistemas seguintes:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$

Sistemas de três equações a três incógnitas

A definição de sistema de três equações a três incógnitas pode ser dada de forma semelhante à do sistema de duas equações a duas incógnitas.

Como é obvio, para este caso intervêm as incógnitas x, y e z e o sistema pode ser escrito do seguinte modo:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Resolver este sistema significa determinar o terno ordenado de números reais (x, y, z) que verifica simultaneamente as três equações que formam o sistema (1). Neste sistema a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_1 e b_2 representam os coeficientes que intervêm no sistema.

Para a resolução deste tipo de sistema, (1), podem ser usados os métodos adoptados para o caso de sistemas de duas equações a duas incógnitas.

39

Resolva, aplicando a regra de Cramer, os sistemas seguintes:

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 7y = 3 \\ 11x - 3y = 2 \end{cases}$

Exercícios resolvido

Resolva os sistemas seguintes:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ 4x + 2y + 6z = 8 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

Digitalizada com CamScanner

Resolução

a) A resolução pode ser efectuada através dos dois métodos já conhecidos. Consideremos as duas possibilidades:

- Método de substituição

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y-z \\ 2(1-y-z)+y+z=2 \\ 1-y-z+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 2-2y-2z+y+z=2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ -y-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ z=y \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$S = \{(1,0,0)\}$

- Método misto

Adicionando a 1.ª e a 2.ª equações obtemos $x = 1$.

$$\begin{matrix} \\ -1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y-z=-1 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2x+y+z=2 \\ 1+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ y+z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ z=-0 \\ -2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$S = \{(1,0,0)\}$

Seguindo-se o raciocínio da parte final da resolução pelo método de substituição, obtemos a solução (1, 0, 0).

b) $\begin{cases} 4x+3y+z=5 \\ 3x+2y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-3y-z=-5 \\ 3x+2y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y=-2 \\ 3x+2y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

Multiplicando a 1.ª equação por (−1) e adicionando a 1.ª e a 2.ª equações.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 3x+2y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ -3x-2y-z=-3 \\ 2x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ -x-y=+1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Multiplicando a 3.ª equação por (−1) e adicionando a 2.ª e a 3.ª equações.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=+1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$$

Verificamos as duas primeiras equações deste sistema são as condições $x + y = 2$ e $x + y = +1$. Isto não é possível, então o nosso sistema não tem solução e diz-se que o sistema é **impossível**.

Digitalizada com CamScanner

c) Dividindo a 2.ª equação do sistema obtemos a 1.ª equação.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ 4x + 2y + 6z = 8 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Estamos, pois, perante um sistema equivalente de 2 equações com 3 incógnitas. Para a sua resolução fixamos uma das incógnitas, por exemplo z e podemos determinar x e y usando os métodos já conhecidos para a resolução de um sistema de duas equações a duas incógnitas.

Usemos a Regra de Cramer.

Estamos perante o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 - 3z \\ x + y = -z \end{cases}$$

Então:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 - 3z & 1 \\ -z & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3z + z = 4 - 2z$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 4 - 3z \\ 1 & -z \end{vmatrix} = -2z - 4 + 3z = z - 4$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 4 - 2z$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = z - 4$$

A solução do nosso sistema é $(4 - 2z;\ z - 4;\ z)$. Dado que fixamos z, o nosso sistema tem uma infinidade de soluções e diz-se que o sistema é indeterminado.

Note-se que a Regra de Cramer é válida para os sistemas de três equações a três incógnitas.

Consideremos o nosso sistema (1):

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = b_1 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = b_2 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = b_3 \end{cases}$$

Os determinantes deste sistema, tendo em conta que é de 3 equações a 3

Digitalizada com CamScanner

incógnitas, terão 3 linhas e 3 colunas. Os coeficientes colocam-se na mesma ordem que no caso de sistemas de 2 equações a 2 incógnitas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

Deste modo,

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \qquad \text{e} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

O cálculo de determinantes de 3.ª ordem, com os quais lidamos na resolução de sistemas de 3 equações a 3 incógnitas, será aprofundado mais adiante. Porém, é importante saber como calcular este determinante, pois permite-nos, por vezes, resolver os sistemas de 3 equações a 3 incógnitas com relativa facilidade.

A título de exemplo, consideremos:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22})$$

É importante prestar atenção ao seguinte: tomamos o 1.º coeficiente da 1.ª linha e procedemos como se não existissem a linha e a coluna que contêm este 1.º coeficiente.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & — & — \\ — & a_{22} & a_{23} \\ — & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Para a obtenção do 1º termo temos então $a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23})$. A expressão entre parêntesis é obtida procedendo como no caso do cálculo dos determinantes de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas. De igual modo procedemos para os termos seguintes:

$$\begin{vmatrix} — & a_{12} & — \\ a_{21} & — & a_{23} \\ a_{31} & — & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{vmatrix} — & — & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & — \\ a_{31} & a_{32} & — \end{vmatrix}$$

40

Resolva os sistemas que se seguem:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 3 \\ x + 5y + 3z = 2 \\ 7x + 8y + z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$

Digitalizada com CamScanner

Exercício resolvido

Resolva $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$

Resolução

Para este caso usemos a Regra de Cramer. Assim,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-6) - 1(4-3) + 1(4-1) = -4 - 1 + 3 = -2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-6) - 1(6-12) + 1(6-4) = -4 + 6 + 2 = 4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-12) - 1(4-3) + 1(8-3) = -6 - 1 + 5 = 6 - 2$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1(4-6) - 1(8-3) + 1(4-1) = -2 - 5 + 3 = -4$$

Então:

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{4}{-2} = -2;$

$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-2}{-2} = 1;$

$z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

e a nossa solução é: $S = \{(-2, 1, 2)\}$.

41

Resolva cada um dos sistemas que se seguem:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 9y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 8x + 12y + 3z = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

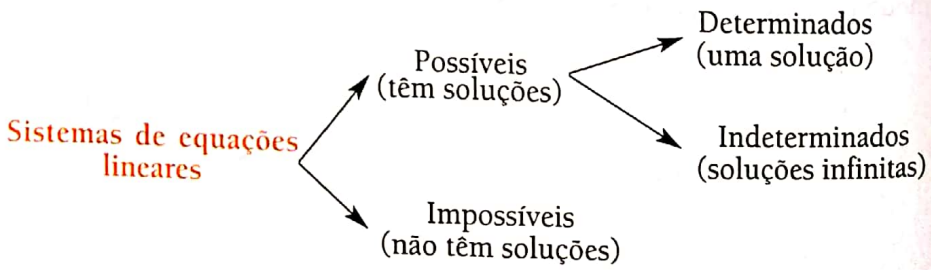
42

Resolva os sistemas seguintes aplicando a Regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 4x + y + 3z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$

O estudo que efectuamos sobre sistemas de equações permite-nos verificar que os sistemas de equações lineares podem ser classificados do seguintes modo:



Digitalizada com CamScanner

1. Determine o domínio de definição das seguintes expressões:

a) $\sqrt{x-4} = x^2 - 3x + 3$

b) $x^2 - 2 = \frac{1}{2-x}$

c) $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4$

d) $(2x+1)^2 (2x-1)^2 = 34$

Resolução

a) A expressão sob o sinal de radical deve ser sempre positiva ou igual a zero. $D = \{x \in \mathbb{R}: x - 4 \geq 0\}$

$D = [4, +\infty[$

b) A expressão no denominador não pode ser igual a zero. Então,

$2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, logo $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

c) $D = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 \geq 0 \wedge 2x - 1 \geq 0\}$, pois ambas as expressões encontram-se sob sinal de radical. Então, $x \geq -3 \wedge x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$, logo

$D = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

d) $D = \mathbb{R}$, pois não há qualquer restrição.

2. Determine o valor da expressão algébrica seguinte: $\frac{\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y}}{x+y}$ se:

a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 1$ e $y = 0$ c) $x = 0$ e $y = 4$

Resolução

a) Vamos à expressão e substituímos pelos valores correspondentes, obtendo

$$\frac{\sqrt{4-2} + \sqrt{4+2}}{4+2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{6}$$

b) Procedendo do mesmo modo que para a alínea a) obtemos 2.

c) Procedendo de modo idêntico para as duas alíneas anteriores, obtemos que a expressão não tem solução em $\mathbb{R}$, pois não podemos calcular raízes quadradas de números negativos.

3. Das expressões seguintes determine quais delas são racionais, irracionais. inteiras ou fraccionárias:

a) $x^4 + x - 7$ b) $\frac{4}{3x^2 - x^3 + 4x - 8}$ c) $\frac{x+21}{x-5}$ d) $\frac{x^2+5}{3}$

e) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}$ f) $\sqrt{x^2 - x + x^3}$ g) $\frac{x+4}{\sqrt{x-2}}$

Digitalizada com CamScanner

Resolução

a) Racional inteira
b) Racional fraccionária
c) Racional fraccionária
d) Racional inteira
e) Irracional
f) Irracional
g) Irracional

4. Efectue as seguintes operações:

a) $\frac{x^2-2x-3}{x^4+2x^3+x^2+x} \cdot \frac{x+1}{2}$
b) $\frac{4}{x}+\frac{6}{2x}+\frac{8}{3x}-\frac{10}{4x}$
c) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x1}{x^2-2x-8}$

Resolução

a) $\frac{x^2-2x-3}{x^4+2x^3+x^2-x} \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x^3-2x^2-3x+x^2-2x-3}{2(x^4+2x^3+x^2-x)} = \frac{x^3-x^25x-3}{2(x^4+2x^3+x^2-x)}$

b) $\frac{4}{x}+\frac{6}{2x}+\frac{8}{3x}-\frac{10}{4x} = \frac{48+36+32+30}{12x} = \frac{86}{12x} = \frac{43}{6x}$

c) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+1}{x^2-2x-8} = \frac{x-1}{(x+2)(x-4)} = \frac{(x-1)(x-4)+(x+1)}{(x+2)(x-4)} =$

$= \frac{x^2-5x+4+x+1}{(x+2)(x-4)} = \frac{x^2-4x+5}{(x+2)(x-4)}$

5. Resolva a equação irracional $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}=1$.

Resolução

Comecemos a resolução determinando o domínio:

$D=\{x\in\mathbb{R}: x+3\geq 0 \wedge x+1\geq 0\} \Leftrightarrow D=\{x\in\mathbb{R}: x\geq -3 \wedge x\geq -1\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D=\{x\in\mathbb{R}: x\geq -1\} \Leftrightarrow D=[-1,+\infty[$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=1+\sqrt{x+1}$ Isolar o radical

$\Rightarrow x+3=1+2\sqrt{x+1}+x+1$ Efectuar as operações

$\Leftrightarrow (1)^2=(2\sqrt{x+1})^2$ Elevar ao quadrado

$\Rightarrow 1=4(x+1)$ Resolver em ordem a x

$\Leftrightarrow 1=4x+4$

$\Leftrightarrow -3=4x$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$

Verificação

$\sqrt{-\frac{3}{4}+3}-\sqrt{-\frac{3}{4}+1}=1$ Para $x=-\frac{3}{4}$

Digitalizada com CamScanner

$$\sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$1 = 1$ Verdadeiro

$S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

6. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$ usando a Regra de Cramer.

Resolução

Calculemos primeiro o determinante Δ do sistema e depois os outros determinantes Δx, Δy e Δz. Como já sabemos que Δ é formado pelos coeficientes dos termos que intervêm em cada uma das equações, então:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - 3) - 2 \cdot (4 - 9) + 1 \cdot (2 - 9) = 3 + 10 - 7 = 6$$

Para o cálculo de Δx, na coluna correspondente aos termos em x, colocamos os termos independentes do nosso sistema,

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - 3) - 2 \cdot (4 - 3) + 1 \cdot (2 - 3) = 3 - 2 - 1 = 0$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 3) - 1 \cdot (4 - 9) + 1 \cdot (2 - 6) = 1 + 5 - 4 = 2$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 - 2) - 2 \cdot (2 - 6) + 1 \cdot (2 - 9) = 1 + 8 - 7 = 2$$

Assim, $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{0}{6} = 0$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

E a nossa solução é: $\left\{\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$.

Digitalizada com CamScanner

7. Resolva o sistema $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y^2 = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ usando o método de substituição.

Resolução

Resolvendo a 1.ª equação do sistema em ordem a x e substituindo na 2.ª equação, temos:

$$\begin{cases} x + y^2 = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = -y^2 \\ 2(1 - y^2) - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 2(1 - y^2) - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 2y^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ y(2y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \\ 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{(1, 0); \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

8. Determine o valor da inequação seguinte:

$|x - 5| < |x + 1|$

Resolução

A equação $|x - 5| < |x + 1|$ tem por domínio $\mathbb{R}$ e é equivalente a:

$|x - 5|^2 < |x + 1|^2$. Então,

$$|x - 5| < |x + 1| \Leftrightarrow (x - 5)^2 < (x + 1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 - x^2 - 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -12x + 24 < 0 \Leftrightarrow -12x < -24 \Leftrightarrow 12x > 24 \Leftrightarrow x > 2$$

Solução é $x > 2$, ou seja: $S = [2, +\infty[$

9. Demostre a identidade:

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Resolução

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y) = (x^2 + yx + yx + y^2)(x + y) =$$
$$= (x^2 + 2xy + y^2)(x + y) = x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + y^2x + y^3 =$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \qquad \text{c.q.d.}$$

Digitalizada com CamScanner



1. Dada a expressão $\frac{3a^2+b^2}{a+b}$, calcule os valores da mesma para:
   a) $a=1; b=1$
   b) $a=\sqrt{2}; b=-\sqrt{2}$

2. Mostre que as expressões $\sqrt{(x-5)(x-1)}$ e $(x-1)\sqrt{x-5}$ são idênticas em $\mathbb{R}$.

3. Factorize as expressões seguintes:
   a) $4x^3-x^2-8x+2$
   b) x^4+2x^2-3
   c) $\frac{3x^2-x}{x^3+4x}$
   d) $\frac{x^3-8}{x^2-49}$
   e) $\frac{x^2-5}{4a^2+x^2}$

4. Determine k de modo que a expressão $2x^2-3x+k=0$ defina uma equação quadrática com:
   a) Duas soluções.
   b) Uma solução.
   c) Não tenha solução.

5. Escreva uma equação do 2.º grau que tem por soluções:
   a) $-\frac{3}{2}$ e 7
   b) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$
   c) $\frac{3}{5}$ e $\frac{10}{3}$
   d) 23 e 3

6. Calcule dois números reais sabendo que:
   a) A sua soma é $\frac{4}{5}$ e o seu produto $\frac{7}{36}$.
   b) A sua soma é 2,2 e o seu produto 1,05.

7. Um pai tem 50 anos e a filha 25. Determine o tempo necessário para que a idade do pai seja n vezes a idade da filha.

8. Determine as soluções das equações que se seguem:
   a) $x^4-x^2+2=0$
   b) $2x^4-3x^2-5=0$
   c) $x^7-5x^4+4x=0$
   d) $x^3-6x^2+5x=0$
   e) $x^4+5x^2-36=0$
   f) $x^4-6x^2+5=0$

9. Resolva a equação: $x^4-5x^3+2x^2+20x-24=0$, sabendo que -2 e 2 são duas das suas raízes.

10. Resolva a equação $x^5-x^4-3x^3+x^2+2x=0$, sabendo que -1 é raiz dupla.

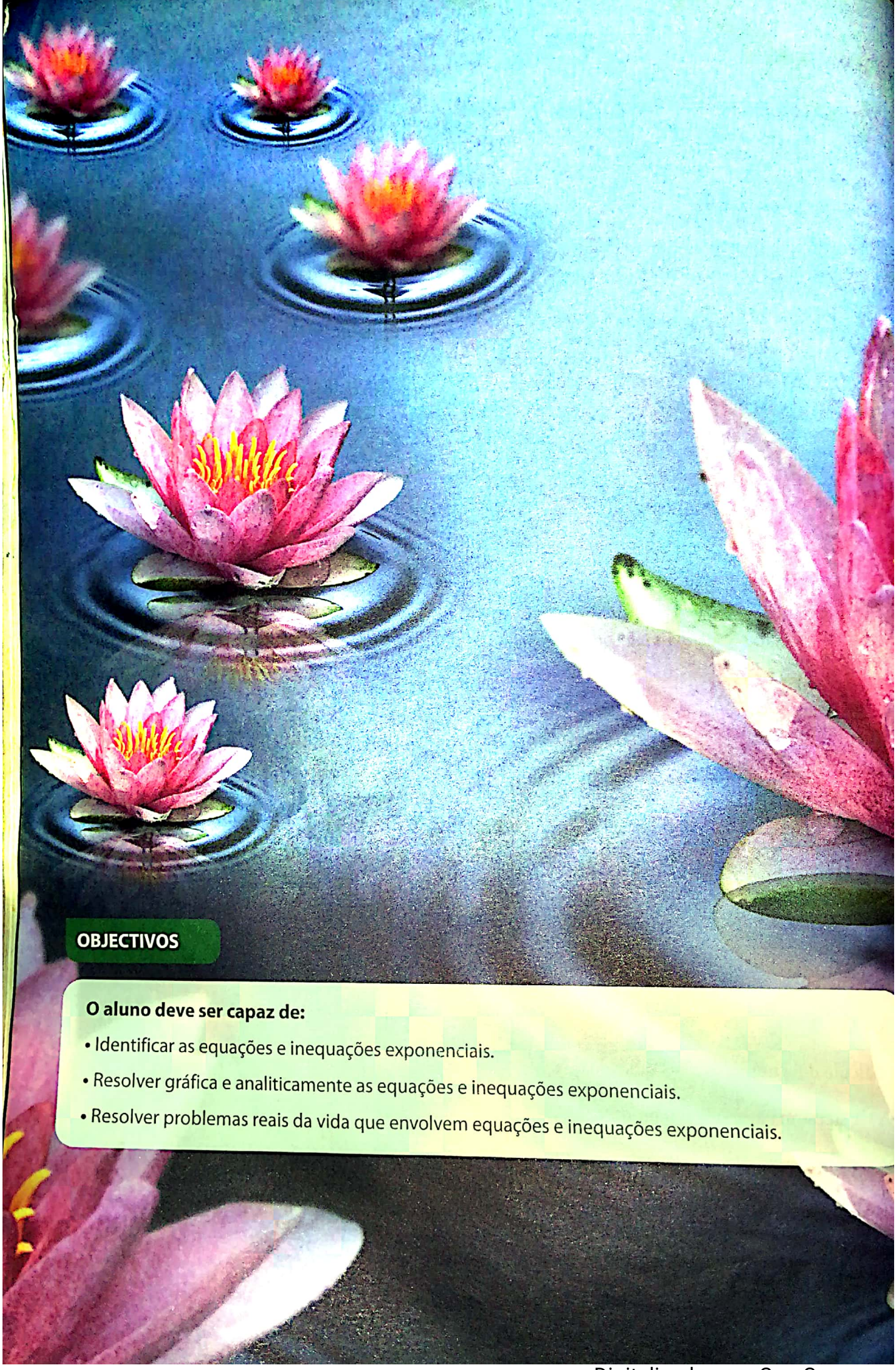
11. Determine o valor de p para que a divisão de x^3+px^2+2 por $x-1$ seja exacta.

12. Resolva as seguintes equações irracionais:
   a) $\sqrt{x^2+1}=x-1$
   b) $\sqrt{x^2+4x+4}=x-3$
   c) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x^2-3x}=0$

13. Resolva as seguintes inequações:
   a) $(x^2-3x^2+2)(x^2-7x+12)\leq 0$
   b) $\frac{x(x^2+4x)}{x-1}<0$
   c) $\sqrt{x+2}>x$
   d) $\sqrt{x^2+3x+2}<1+\sqrt{x^2-x+1}$
   e) $\sqrt{x^2-55x+250}<x-14$

14. Resolva cada um dos sistemas seguintes:
   a) $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 2x-2y+4z=-2 \\ -x+\frac{1}{2}y-z=0 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x+3y-2z=5 \\ 3x+5y+6z=7 \\ 2x+4y+3z=8 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} 2x+y-2z=4 \\ x-y+z=2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$

Digitalizada com CamScanner

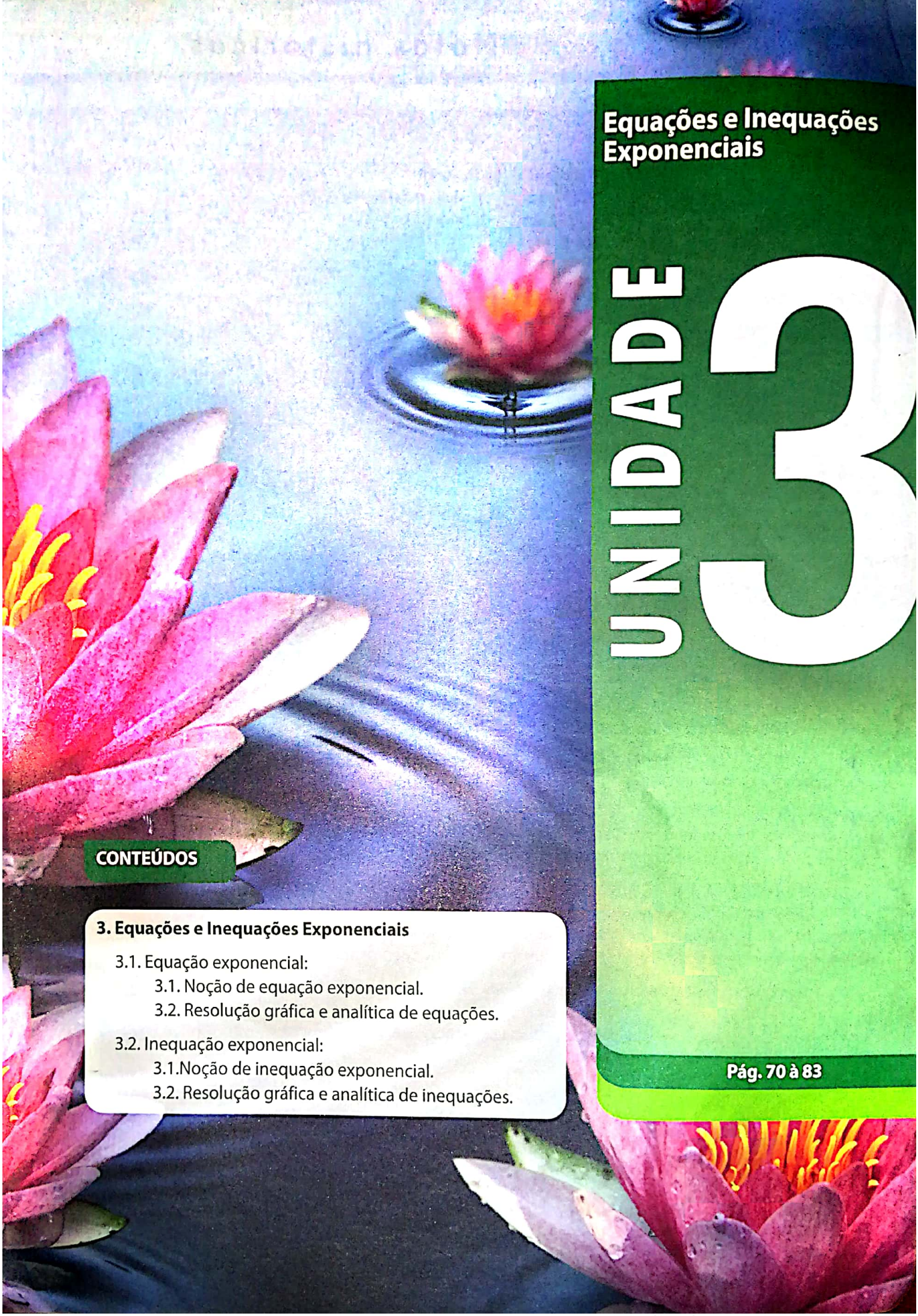


OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar as equações e inequações exponenciais.
- Resolver gráfica e analiticamente as equações e inequações exponenciais.
- Resolver problemas reais da vida que envolvem equações e inequações exponenciais.

Digitalizada com CamScanner



Equações e Inequações Exponenciais

UNIDADE 3

CONTEÚDOS

3. Equações e Inequações Exponenciais

3.1. Equação exponencial:
- 3.1. Noção de equação exponencial.
- 3.2. Resolução gráfica e analítica de equações.

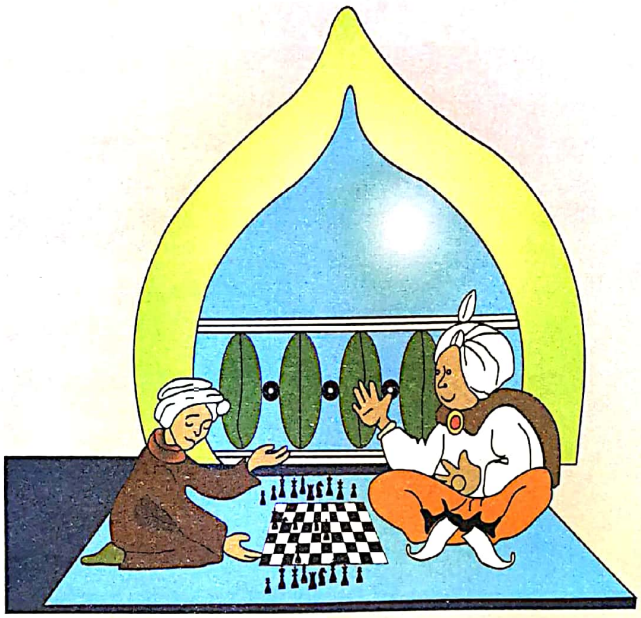
3.2. Inequação exponencial:
- 3.1.Noção de inequação exponencial.
- 3.2. Resolução gráfica e analítica de inequações.

Pág. 70 à 83

Digitalizada com CamScanner

Notas históricas

Conta uma lenda que um príncipe Shiram solicitou aos seus súbditos que lhe inventassem um novo jogo, com o fim de diminuir o seu tédio. O inventor do jogo considerado melhor teria direito a realizar qualquer desejo. Um dos seus súbditos inventou o jogo de xadrez. O principe ficou maravilhado e sentiu-se na obrigação de cumprir com a sua promessa. Mandou chamar o inventor e disse-lhe que ele poderia pedir o que desejasse.



O esperto inventor Sissa Ben Dahin pediu que as 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com grãos de trigo, seguindo a seguinte condição:

- Na primeira casa seria colocada um grão e em cada casa seguinte seria colocado o dobro dos grãos que havia na casa anterior.
- O príncipe satisfeito com o pedido, pois considerou-o fácil de ser atendido ordenou que o pagamento fosse providenciado. A sua surpresa foi quando lhe vieram dizer que nem a produção de vários anos de toda a Índia chegaria para pagar tal recompensa.

Só na última casa o total de grãos era 2^{63}, o que corresponde ao produto de 4 294 967 296 por 2 147 483 648. Isto só na última casa.

Imagine-se agora a soma dos grãos contidas em todas as casas... Quantas toneladas seriam? Supondo que grãos pesam 1 grama de determina quantas toneladas de trigo pediu o sábio?

Investiga qual a produção mundial de trigo nos últimos anos e faz uma avaliação do pedido de Sissa Ben Dahim.

Esta é uma aplicação das funções exponenciais, particularmente da função $y = 2^x$.

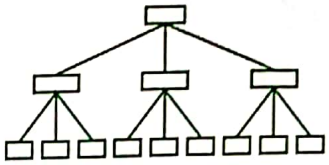
Digitalizada com CamScanner

Noções de equação exponencial

Para que possamos ter uma noção correcta de equação exponencial, recordemos alguns conceitos referentes à função exponencial.

A função exponencial é muito importante pois é usada nas mais variadas situações da vida real.

Vejamos, a título de exemplo, o seguinte caso: num charco de águas paradas havia 1 milhão de bactérias até ao fim do mês de Abril de 2005. Supondo que, em média, cada bactéria se divide em três ao fim de uma hora e representando por t o número de horas decorridas após 30 de Abril, determinemos uma expressão algébrica que modela a situação e calculemos o número de bactérias que existiam passados 10 dias, caso nada tenha sido feito para contrariar o crescimento das mesmas.



Observemos a tabela que se segue, onde t representa o tempo em horas e N o número de bactérias:

t (horas)	N (milhões)
0	1
1	3
2	9
3	27
...	...
t	3^t

Verificamos que $N(t) = 3^t$. Deste modo, passados 10 dias (240 horas), teremos como número de bactérias $N(240) = 3^{240}$ e, como podemos ver, o número de bactérias seria muitíssimo elevado.

Ao estudarmos funções teremos casos de funções como a que acabámos de usar para o cálculo do número de bactérias. Neste tipo de funções a base é uma constante e o expoente é variável.

A **função exponencial** de base a e expoente, a variável x, de domínio $\mathbb{R}$ define-se por:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto f(x) = a^x,$$

onde a é um número real e diferente de 1.

Representação gráfica

Num mesmo referencial representemos os gráficos das seguintes funções exponenciais:

$y_1 = 2^x$;

$y_2 = 2^{-x} \Leftrightarrow y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

$y_3 = 3^x$;

$y_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

1

Um biólogo estuda a evolução de amibas, que cultiva no seu laboratório. Num dia D, denotado por O, o biólogo avalia em um milhão o número de amibas e constata que este número duplica em cada dia.

Dia	0	1	2	3	4	5	6
Efectivo	1	2	4	8	16	32	64

Verifique na tabela acima que para todo o número natural n, $0 \leq n \leq 6$, o efectivo no dia n é de 2^n.

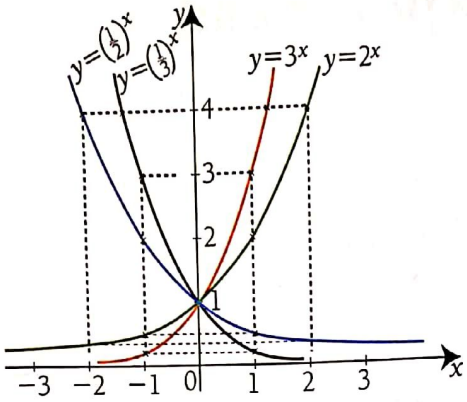
2

Represente num mesmo referencial os gráficos das seguintes funções exponenciais:

$y = 4^x$ e $y = 4^{-x}$

Digitalizada com CamScanner

x	$2x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4



Para a representação gráfica da função exponencial, como já o sabemos, podemos efectuar uma tabela de valores e esboçar o gráfico. A título de exemplo, consideraremos apenas a tabela para a função $y_1 = 2^x$.

Propriedades da função exponencial

- A função é estritamente crescente para $a > 1$ e é estritamente decrescente para $0 < a < 1$.
- Todos os seus gráficos intersectam o eixo dos yy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.
- O contradomínio da função é: $D'_f =]0, +\infty[$ e o seu domínio é $\mathbb{R}$.
- A função é injectiva.
- A função é contínua.
- A função é sempre positiva.
- Os gráficos de $y = 2^x$ e de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ são simétricos em relação ao eixo dos yy.

É importante notarmos que para o caso particular das funções exponenciais de base a, com $0 < a < 1$, as mesmas podem ser escritas com uma base superior a um e um expoente negativo.

Sabe-se que $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$. Em particular se a $\frac{1}{5}$ tem-se $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{5} = 5^{-x}$

Transformações dos gráficos da função exponencial

Partindo dos gráficos das funções, $y = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$ por transformações podemos obter os gráficos das funções do tipo $y = ca^{(x+d)} + b$. Para tal, é importante ter em conta a tabela que se segue:

$y = f(x) + a$	Translação de a na direcção do eixo dos yy.
$y = f(x + a)$	Translação de $-a$ na direcção do eixo dos xx.
$y = af(x)$	Esticar ou encolher segundo o factor a, na direcção do eixo dos xx.

Digitalizada com CamScanner

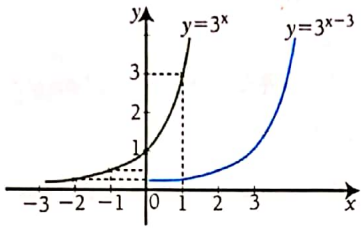
$y = f(ax)$	Esticar ou encolher segundo o factor $\frac{1}{a}$, na direcção do eixo dos xx.
$y = -f(x)$	Simetria em relação ao eixo dos xx.
$y = f(-x)$	Simetria em relação ao eixo dos yy.
$y = \|f(x)\|$	A parte do gráfico que se encontra abaixo do eixo dos xx é reflectida simetricamente em relação ao mesmo eixo.
$y = f(\|x\|)$	Mantêm-se os pontos de abcissa positiva e o gráfico fica simétrico relativamente ao eixo dos yy.

3

Partindo do gráfico de $y = 2^x$ construa o gráfico de $y = |2^{-x} - 3|$.

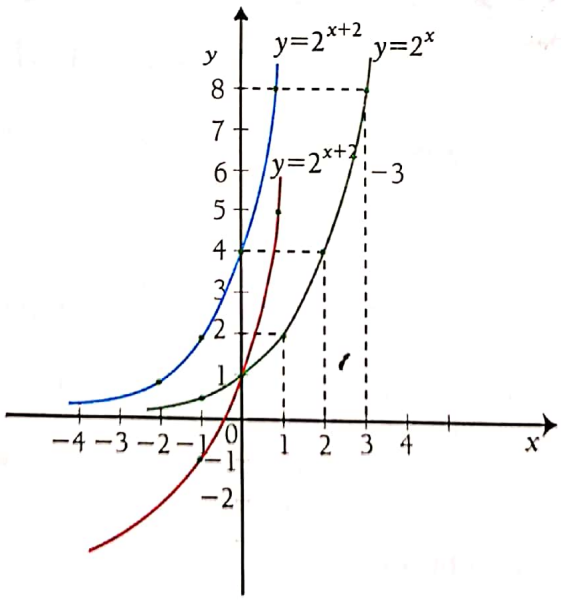
Exemplos

1. Partindo do gráfico de $y = 3^x$, deslocando três unidades para a direita obtemos o gráfico de $y = 3^{x-3}$.



2. Partindo do gráfico da função $y = 2^x$, deslocando duas unidades para a esquerda obtemos o gráfico de $y = 2^{x+2}$ e deste último, subtraindo 3 unidades, efectuamos uma translação do mesmo em três unidades para baixo.

   Obtemos o gráfico de $y = 2^{x+2} - 3$



Digitalizada com CamScanner

Equações exponenciais

Tendo em conta que as funções exponenciais são injectivas para $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, se $a^x = a^y$ então $x = y$.

Esta é uma propriedade usada para a resolução de equações exponenciais.

Exercícios resolvidos

1. Resolva cada uma das seguintes equações:

a) $2^{x-3} = 64$

b) $2^{x+1} = 6$

c) $2^{x+2} - 2^x = 96$

d) $5^{2x} - 3^x - 15 \cdot 25^x + 15 \cdot 3^x = 0$

Resolução

a) $D = \mathbb{R}$

$2^{x-3} = 64 \Leftrightarrow 2^{x-3} = 2^6 \Leftrightarrow x - 3 = 6 \Leftrightarrow x = 9$; $S = \{9\}$

b) $D = \mathbb{R}$

$2^{x+1} = 6 \Leftrightarrow x + 1 = \log_2 6 \Leftrightarrow x = -1 + \log_2 6$

$S = \{-1 + \log_2 6\}$

c) $D = \mathbb{R}$

$2^{x+2} - 2^x = 96 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^2 - 2^x = 2^5 \cdot 3 \Leftrightarrow 2^x(4 - 1) = 2^5 \cdot 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x \cdot 3 = 2^5 \cdot 3 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$; $S = \{5\}$

d) $D = \mathbb{R}$

$5^{2x} - 3^x - 15 \cdot 25^x + 15 \cdot 3^x = 0 \Leftrightarrow 25^x - 15 \cdot 25^x = 3^x - 15 \cdot 3^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-15)25^x = (1-15)3^x \Leftrightarrow 25^x = 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{25}{3}\right)^x = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{25}{3}\right)^x = \left(\frac{25}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0$;

$S = \{0\}$

2. A função $C(x) = 200\,000\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$, $x \geq 0$ é usada para determinar o preço de um carro x anos depois da sua compra.

a) Qual é o custo inicial do carro?

b) Determine o custo do carro dois anos depois da sua compra.

c) Quanto desvaloriza o carro por ano?

Resolução

a) O custo inicial do carro obtém-se subtraindo na equação dada x por 0.

$P(x) = 200\,000\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$, $x \geq 0$; $P(0) = 200\,000$.

O carro custa 200 000 Mt.

➡

4

Resolva cada uma das seguintes equações:

a) $100^{\frac{1}{2}} = 0{,}1^x$

b) $e^{3x-1} = 1$

c) $2^{x^2} + 2^{-x^2} = \frac{5}{2}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^4$

e) $9^{x^2+4x-4{,}5} = 9^{0{,}5}$

f) $1^{5x+1} - 1^{2x+3} = 0$

g) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$

h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{5x-9}$

i) $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$

5

Resolva as inequações seguintes:

a) $2^{-x} < 3^{-x}$

b) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 > 0$

c) $\frac{4^x + 2^x - 4}{x - 1} \leq 2$

d) $(x^2 + x + 1)^x > 1$

Digitalizada com CamScanner

b) O custo 2 anos depois obtém-se substituindo na equação x por 2.

$P(2) = 200\,000\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = 200\,000\left(\frac{4}{3}\right)^{2} = 112\,500$ MT.

logo 2 anos depois da compra o carro vale 112 500 MT.

c) $P(x) = 200\,000\left(\frac{4}{3}\right)^{-x} = 200\,000\left(\frac{4}{3}\right)^{2}, x \geq 0.$

Então subtraímos $\frac{4}{3} - 1 = = -0{,}25$.

logo o valor do carro diminui em cada ano 25%.

Inequação exponencial

Para a resolução de inequações, as regras são já do nosso conhecimento e como é óbivio são válidas para o caso das inequações exponenciais.

Exercício resolvido

Resolva a seguinte inequação: $x\,e^{x-1} - x > 0$

Resolução

$x\,e^{x-1} - x > 0 \Leftrightarrow x\,(e^{x-1} - 1) > 0.$

Determinando as raízes e usando o método dos intervalos, temos:

$x = 0 \vee e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Logo, $S =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

x		0		1	
x	−	0	+	|	+
$e^{x-1}-1$	−	|	−	0	+
$x(e^{x-1}-1)$	+	0	−	0	+

Aplicação das equações exponenciais à vida real

A introdução do presente capítulo foi feita através de um exemplo concreto. Tomemos mais alguns exemplos de aplicação de conceitos relacionados com a função exponencial na vida corrente.

Um exemplo bem presente nas nossas vidas é o caso dos juros. Num primeiro mês o Paulo vai ao banco e deposita 1000 meticais a um juro de 3% ao mês. Passado um mês o seu rendimento será 1000 MT mais 30 MT, logo o Paulo terá 1030 MT, isto é, $1000(1 + 0{,}03) = 1000 \cdot 1{,}03$. No mês seguinte o seu juro será calculado sobre 1030 MT, que constitui o seu capital neste mês e que será a base para o cálculo de juros deste mês. Então no fim do segundo mês o seu capital será $(1030 \cdot 3\%)$, isto é,

$$[(1000 \cdot 1{,}03) \cdot 1{,}03] \Leftrightarrow 1000 \cdot (1{,}03)^2$$

Ao fim do 10.º mês, o saldo do Paulo, caso ele não retire e nem coloque mais capital no banco será $1000 \cdot (1{,}03)^{10}$, isto é, o capital inicial multiplicado

Digitalizada com CamScanner

pelo juro elevado ao tempo de aplicação. Deste modo, o montante final M é-nos dado pelo capital C multiplicado por, 1 acrescido pela taxa unitária i elevado ao tempo de aplicação ou seja $M = (1 + i)^t$, designada por fórmula dos juros compostos.

Tomemos de seguida mais alguns exemplos de aplicação da função exponencial.

Exercícios resolvidos

1. O número de bactérias num meio de cultura cresce aproximadamente segundo a função

$$n(t) = 2000 \cdot 3^{0,04t}$$

sendo t o número de dias após o início da experiência. Calcule:
a) O número n de bactérias no início da experiência.
b) Em quantos dias o número inicial de bactérias irá triplicar?

Resolução

a) Sabemos que no início $t = 0$, logo temos que calcular $n(0) = 2000 \cdot 3^{0,04t} = 2000 \cdot 3^0 = 2000$.
Logo, o número de bactérias no início da experiência era 2000.
b) Temos agora que o número inicial era de 2000 e quando ele triplicar o número será de 6000. Assim precisamos de ter $n(t) = 6000$. Mas como sabemos $n(t) = 2000 \cdot 3^{0,04t}$. Temos então que

$2000 \cdot 3^{0,04t} = 6000 = 2000 \cdot 3$
$3^{0,04t} = 3 \Leftrightarrow 0,04\,t = 1$

$$t = \frac{1}{0,04} \Leftrightarrow t = 25$$

Logo para triplicar as bactérias do início da experiência serão necessários 25 dias.

2. O João Massinga aplicou 12 000,00 MT durante 6 anos numa instituição bancária a uma taxa de juro de 1,5% ao mês, no sistema de juros compostos.
a) Qual será o saldo ao fim de 12 meses?
b) Qual será o montante final?

Resolução

a) Após 12 meses: O capital C é 1200; a taxa unitária $i = 1,5\% = 0,015$ e $t = 12$ meses. Logo,
$M = C(1 + i)^t = 1200\,(1 + 0,015)^{12} =$
$= 1200 \cdot (1,195618) = 1434,74$ MT
Após 12 meses o João Massinga terá um saldo de 1434 meticais.
b) Montante final: ao fim de 6 anos temos 72 meses, então,
$M = 1200 \cdot (1 + 0,015)^{72} = 1200 \cdot (1,015)^{72} =$
$= 1200 \cdot (2,921158) = 3505,39$
Após 6 anos ele terá um saldo de 3505,39 meticais.

3. Sob determinadas condições, o número de bactérias N de uma cultura, em função do tempo t é dado por $N(t) = 2^{\frac{t}{25}}$. Qual será o número de bactérias 6 dias após a hora zero?

Resolução

6 dias = 6,24 = 144 horas, logo $N(t) = 2^{\frac{t}{25}} \Leftrightarrow N(144)^{\frac{144}{12}} = 2^{12} = 4\,096$
A cultura terá 4 096 bactérias.

Digitalizada com CamScanner

Sistemas de equações envolvendo funções exponenciais

Para o caso da resolução de sistemas, temos apenas uma aplicação prática das regras das funções envolvidas.

Exercícios resolvidos

1. Resolva o seguinte sistema: $\begin{cases} x - y = 7 \\ 13^{4x+3y} = 1 \end{cases}$

Resolução

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 13^{4x+3y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ 13^{4x+3y} = 13^0 \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y = 7 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 21 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

$7x = 21$

$x = 3$

$S = \{(3, -4)\}$

2. Qual é a solução do sistema: $\begin{cases} 2^x + 2^y = \frac{3}{8} \\ x - y = 1 \end{cases}$?

A. $(-2, -3)$ B. $(-2, 3)$ C. $(2, -3)$ D. $(2, 3)$

1.ª Época, 2010

Resolução

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = \frac{3}{8} \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ x = 1 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1+y} + 2^y = \frac{3}{8} \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2^y + 2^y = \frac{3}{8} \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^y = \frac{3}{8} \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = \frac{1}{8} \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 2^{-3} \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

$S = \{(-2, -3)\}$

Opção: A

Digitalizada com CamScanner

1. Partindo do gráfico da função $y = 3^x$ descreva como pode obter o gráfico das funções seguintes:

a) $y_1 = 3^{x-1}$ b) $y_2 = -3^{x-1}$ c) $y_3 = 3^{|x|}$

Resolução

a) Partindo do gráfico de 3^x, deslocando uma unidade para a direita obtemos o gráfico de 3^{x-1}.

b) O gráfico de $y_2 = -3^{x-1}$ obtém-se do gráfico de $y_1 = 3^{x-1}$, efectuando-se uma simetria relativamente ao eixo dos xx.

c) O gráfico de $y_3 = 3^{|x|}$ obtém-se do gráfico de $y = 3$, por simetria em relação ao eixo dos yy.

2. Resolva cada uma das seguintes equações:

a) $5^x = \frac{1}{25}$ b) $64 = 4^{2-x}$ c) $\left(\frac{1}{16}\right)^x = 256$

Resolução

a) $5^x = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^x = 5^{-2} \Leftrightarrow x = -2$; $S = \{-2\}$

b) $64 = 4^{2-x} \Leftrightarrow 4^3 = 4^{2-x} \Leftrightarrow 3 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1$; $S = \{-1\}$

c) $\left(\frac{1}{16}\right)^x = 256 \Leftrightarrow 4^{-2x} = 4^4 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$; $S = \{-2\}$

3. Resolva cada uma das seguintes equações:

a) $e^{7x-1} = e^{3x+5}$ b) $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$

Resolução

a) $e^{7x+1} = e^{3x+5} \Leftrightarrow 7x + 1 = 3x + 5 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$; $S = \{1\}$

b) $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$; seja $3^x = t$

$t^2 - 6 \cdot t - 27 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} \Leftrightarrow$

$t^2 - 6t - 27$

$\Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{6 \pm 12}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_1 = \frac{6 + 12}{2} = 9 \quad \vee \quad t_2 = \frac{6 - 12}{2} = -3$

$3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

$3^x = -3$ impossível

$S = \{2\}$

Digitalizada com CamScanner

4. Resolva a seguinte equação exponencial $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$.

Resolução

$7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$

$\Leftrightarrow 7^x \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^x 7^{-1} = 347$

$\Leftrightarrow 7^x\left(7^2 + \frac{4}{7}\right) = 347$ Colocar em evidência o factor comum.

$\Leftrightarrow 7^x\left(\frac{343 + 4}{7}\right) = 347$ Resolver em ordem x.

$\Leftrightarrow 7^x\left(\frac{347}{7}\right) = 347 \Leftrightarrow 7^x = 347 \cdot \frac{7}{347} \Leftrightarrow 7^x = 7 \Leftrightarrow x = 1$ $S = \{1\}$

5. Partindo do gráfico da função, indique os passos necessários para construir o gráfico da função $y = |2^{x-1} - 2|$.

Resolução

Deslocando uma unidade para a direita, o gráfico de $y = 2^x$ obtemos o gráfico de $y = 2^{x-1}$. Efectuando uma translação em duas unidades, para baixo, ao longo do eixo, dos yy obtemos o gráfico de $y = 2^{x-1} - 2$. Reflectindo a parte que se encontra abaixo do eixo dos xx, em relação ao mesmo eixo obtemos o gráfico da função pretendida $y = |2^{x-1} - 2|$.

6. Resolva a seguinte inequação: $x\, e^{2x-1} - x > 0$

Resolução

$x\, e^{2x-1} - x > 0 \Leftrightarrow x\,(e^{2x-1} - 1) > 0$

Determinar os zeros:

$e^{2x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} = e^0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$x = 0 \ \vee \ e^{2x-1} - 1 = 0$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$e^{2x-1} - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(e^{2x-1} - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

S: $]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$

7. Um funcionário público aumentou o seu salário, nos últimos cinco anos, em 15% ao ano. Hoje ganha 34 970 meticais. Quanto ganhava há cinco anos?

Resolução

$f(t) = ab^t\, f(t) \Leftrightarrow f(t) = a \cdot (1{,}15)^t$ $f(t) = a \cdot (1{,}15)^t$

$f(5) = 34\,970$, logo $a \cdot (1{,}15)^5 = 34\,970 \Leftrightarrow a = 17\,386$

R: Há cinco anos ganhava 17 386 meticais.

Digitalizada com CamScanner

8. Considere as condições:

I. $x \cdot 3^{x+2} = x$

II. $8^{x+3} = 4 \cdot 2^{3x-1}$

III. $2^{x+1} + 2^{x+1} = 64$

IV. $2^{1-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3}$

As resoluções seguintes estão erradas. Descobre onde se cometeu o erro em cada uma delas e resolve-a correctamente.

I. $x \cdot 3^{x+2} = x \Leftrightarrow 3^{x+2} = \frac{x}{x} \Leftrightarrow 3^{x+2} = 1 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

II. $8^{x+3} = 4 \cdot 2^{3x-1} \Leftrightarrow 8^{x+3} = 8^{3x-3} \Leftrightarrow x + 3 = 3x - 1 \Leftrightarrow 4 = 2x \Leftrightarrow x = 2$

III. $2^{x+1} + 2^{x+1} = 64 \Leftrightarrow 2^{x+1} + 2^{x+1} = 2^6 \Leftrightarrow x + 1 + x + 1 = 6 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

IV. $2^{1-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1+x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3} \Leftrightarrow -1 + x > -x + 3 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$

Resolução

I. Como x pode tomar o valor zero, ao dividirmos os dois membros da equação por x não obtemos uma equação equivalente.

$S = \{0, -2\}$

II. $4 \cdot 2^{3x-1} \neq 8^{3x-1}$; os factores não estão escritos com o mesmo expoente.

$S = \varnothing$

III. A soma de potências com a mesma base não é uma potência com a mesma base e expoente igual à soma dos expoentes e, por isso, $2^{x+1} + 2^{x+1} = 6$ não é equivalente a $x + 1 + x + 1 = 6$.

$S = \{4\}$

IV. A exponencial de base $\frac{1}{2}$ é decrescente e, portanto, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3} \Leftrightarrow -1 + x < -x + 3$.

$S =]-\infty, 2[$

9. Resolva as inequações seguintes:

a) $4^{x+1} > \sqrt{2}^{3x}$

b) $9^{1-x} < \frac{1}{3}$

c) $3^x - x^2 \cdot 3^x \geqslant 0$

Resolução

a) $4^{x+1} > \sqrt{2}^{3x} \Leftrightarrow 2^{2(x+1)} > 2^{\frac{3x}{2}} \Leftrightarrow 2x + 2 > \frac{3x}{2} \Leftrightarrow 4x - 3x > -4 \Leftrightarrow x > -4$

b) $9^{1-x} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{2(1-x)} < 3^{-1} \Leftrightarrow 2 - 2x < -1 \Leftrightarrow -2x < -3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

c) $3^x - x^2 \cdot 3^x \geqslant 0 \Leftrightarrow 3^x (1 - x^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \geqslant 0$ porque $3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

Digitalizada com CamScanner



1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

A. Existe um par ordenado de números reais (x, y), tal que:

$$\begin{cases} 5^x = 25^{-1-y} \\ x + y = 11 \end{cases}$$

B. A equação $2^{-x} = \frac{1}{2}$ é impossível.

C. $6^{x^2} - 7x + 10 = 1 \Leftrightarrow x = 5$

D. $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

E. $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$

2. Um psicólogo desenlveu uma fórmula que relaciona o número n de símbolos que uma pessoa pode memorizar no tempo t, em minutos. A fórmula é:

$$n(t) = 30\left(1 - e^{-\frac{t}{3}}\right).$$

a) Calcule, de acordo com a função $n(t)$ e com aproximação às unidades, quantos símbolos uma pessoa pode memorizar em 4 minutos.

b) Uma pessoa memorizou 26 símbolos. Quanto tempo precisou, aproximadamente, para realizar tal tarefa?

3. Partindo dos gráficos da função $y = 2^x$ obtenha a representação gráfica para cada uma das funções:

a) $y = |2^x|$
b) $y = -2^x$
c) $y = 2^x - 1$

4. Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{x^2} + 2^{x^2} = 4$

b) $25^x = \frac{1}{5}$

c) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$

d) $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} + 288 = 0$

e) $3^{2x} - 3^x - 15 \cdot 25^x + 15 \cdot 3^x = 0$

f) $5^{1+\frac{2}{x}} - 7 \cdot 10^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$

5. Resolva as seguintes inequações:

a) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 > 0$ b) $3^{x-1} \leq \frac{9^{4x^2}}{27}$

c) $(x^2 + x + 1)^x < 1$ d) $\frac{4^x + x - 4}{x - 1} \leq 2$

e) $|x|^{x^2-x-2} < 1$ f) $(x^2 + x + 1) < 1$

6. Das afirmações que se seguem diga, justificando, quais são as falsas:

A. A função $f(x) - (-4)^x$ é uma função exponencial.

B. A função $f(x) = x^3$ é uma função exponencial.

C. Se $4^x = -\frac{1}{64}$, então $x = -1$.

D. Se $f(x) = 2^x$ e $f(x) = 8$, então $t = 3$.

E. Se $f(x) = 10^x$, então $f(0) = 0$.

F. Se $f(x) = e^x$, então $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$.

G. A função $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ e idêntica à função $f(x) = 2^0$.

H. $2^{-x} < 3^{-x}$, se $x \in]-\infty, 0[$

I. O domínio da função $f(x) = 27^x$ é $\mathbb{R}$.

7. Resolva em $\mathbb{R}$, as condições:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq 25^{1-x}$

b) $0{,}25^x \leq 8^{x+1}$

c) $4^{x^2} > 2^x$

d) $81^x \geq 27^{x^2-5}$

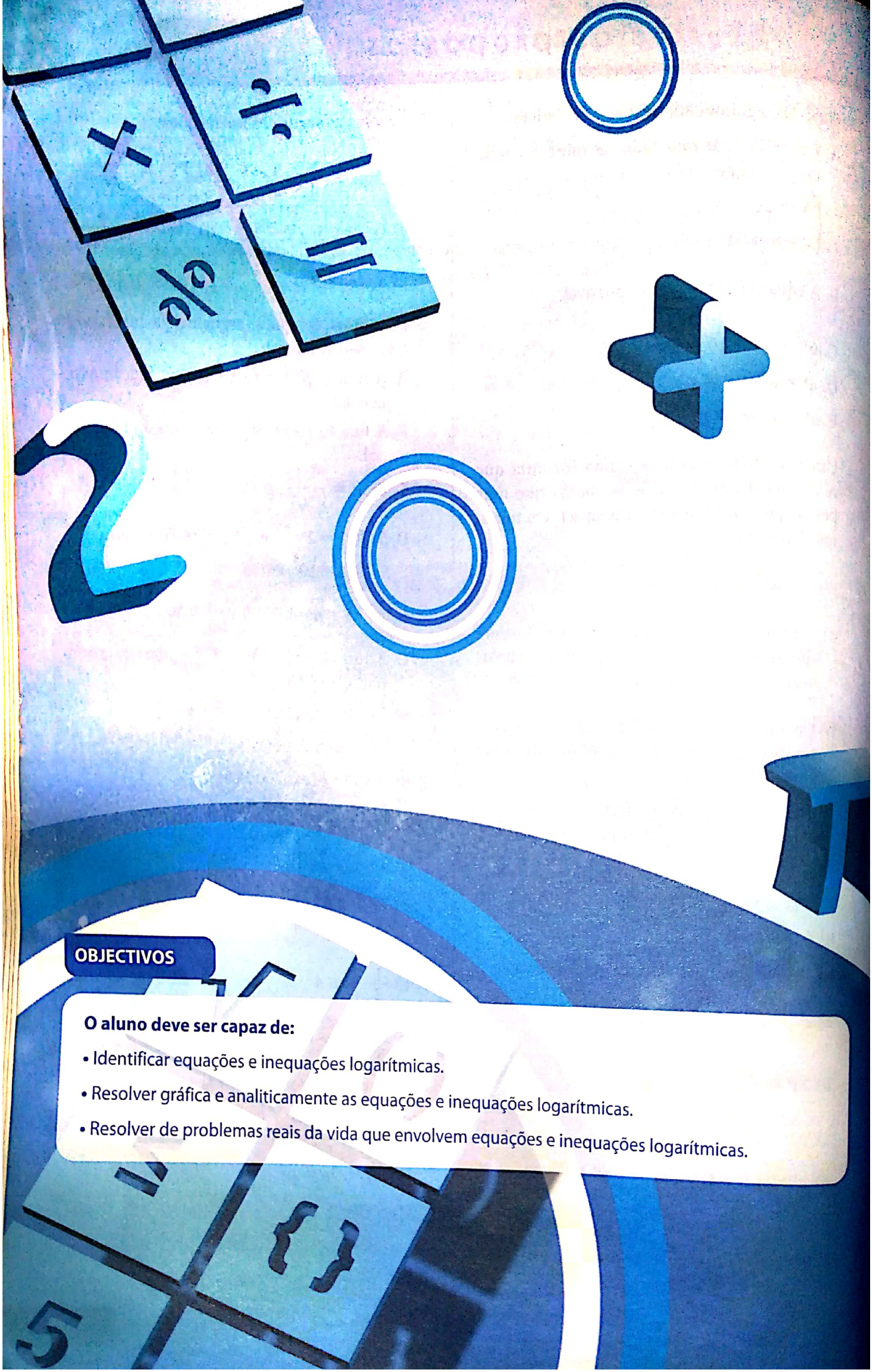
e) $\frac{1}{2}^{\frac{1}{x}} \leq 4$

f) $\frac{2^x - 1}{3 - x} \geq 0$

8. Determine os zeros, caso existam, de:

a) $f(x) \leq 3^x - 3$
b) $g(x) = 2^{x+3} + 4$
c) $h(x) = 3^x - 9^x$
d) $r(x) = 1 - \pi^x$

Digitalizada com CamScanner



OBJECTIVOS

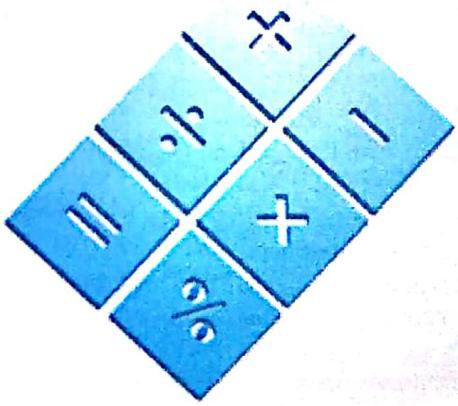
O aluno deve ser capaz de:

- Identificar equações e inequações logarítmicas.
- Resolver gráfica e analiticamente as equações e inequações logarítmicas.
- Resolver de problemas reais da vida que envolvem equações e inequações logarítmicas.

Digitalizada com CamScanner

UNIDADE 4

Equações e Inequações Logarítmicas



CONTEÚDOS

4. Equações e Inequações Logarítmicas

4.1. Noção de mantissa e característica.
4.2. Cologaritmo de um número.
4.3. Noção de antilogaritmo de um número.
4.4. Equação logarítmica:
  4.1.1. Noção de equação logarítmica.
  4.1.2. Resolução de equações logarítmicas.
4.5. Inequação logarítmica:
  4.5.1. Noção de inequaçao logarítmica.
  4.5.2. Resolução de inequações logarítmicas.
  4.5.3. Resolução de problemas concretos aplicando logaritmos.

Pág. 84 à 99

Digitalizada com CamScanner

Notas históricas

Em França, Galois (1811-1832), na noite anterior a um duelo onde viria a falecer, escreve freneticamente as suas descobertas incluindo a teoria dos grupos, um estudo sobre a resolução de equações e vários teoremas de Geometria. Pede a um amigo que entregue essa carta a Gauss ou Jacobi, o que é feito, e só mais tarde as descobertas de Galois são reconhecidas.

John Nepper introduziu o cálculo logarítmico em 1614.

Homem muito culto e conhecedor das matemáticas da época, decidiu procurar um sistema que facilitasse a multiplicação de senos, que intervinha com muita frequência em cálculos na navegação e astronomia.

O sistema foi logo estendido ao cálculo corrente.

A obra de Nepper envolvia implicitamente o número e, embora o autor não tivesse avaliado a importância que este número viria a ter.

Na notação actual o logaritmo de Nepper tinha como base $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ que é uma excelente aproximação do número $e^{-1}=\frac{1}{e}$.



John Nepper (1550-1617).

O inglês Henry Briggs, professor de Geometria no Gresham College de Londres, foi o primeiro a entusiasmar-se com o trabalho de Nepper.

Quando, em 1614, Nepper publicou a *Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos*, pode dizer-se que se deu uma verdadeira revolução nos processos de cálculo.

A ideia foi recebida com entusiasmo e imediatamente adoptada e aperfeiçoada, pela simplificação que trazia aos complicados processos de efectuar multiplicações, divisões e potências, conhecidos e utilizados até então.

Os cálculos eram feitos recorrendo a tabelas de logaritmos previamente elaboradas. As tabelas de logaritmos mais usadas eram as de base 10 e as de base e (constante de Euler ou número de Nepper).



Gottfried Leibniz (1646-1716).

No século XVII, com a criação da álgebra simbólica, desenvolveu-se o conceito de função através, nomeadamente, dos trabalhos de Kepler, o movimento dos planetas e dos de Galileu sobre a queda dos graves.

Matemáticos como Viète, Descartes, Newton, Johann Bernoulli, Euler e Leibniz tiveram uma importância determinante no desenvolvimento do conceito.

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em 1646 em Leipzig, na Alemanha, e faleceu em 1716 em Hannover.

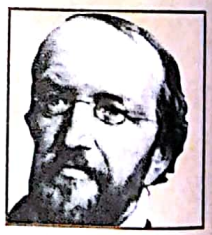
Aos quinze anos ingressou como estudante de Direito na Universidade de Leipzig.

Aos vinte anos estava preparado para receber o grau de Doutor em Direito, mas tal foi-lhe recusado devido à sua pouca idade.

Leibniz deixou então a sua terra natal e inscreveu-se na Universidade de Nuremberg onde foi convidado para a Cátedra de Direito. Não aceitou. Queria ganhar mais dinheiro e ingressou na carreira de Conselheiro Político.

Inventou o Cálculo Infinitesinal, por uma via diferente da seguida por Newton.

Os símbolos e termos utilizados na Análise Matemática, incluindo o termo «função», são devidos a Leibniz que em 1692 os utilizou pela primeira vez. Este grande matemático acreditava que uma boa notação era uma grande ajuda ao pensamento.



Peter Dirichlet (1805-1859).

Johann Bernoulli foi o primeiro matemático a utilizar letras para as funções. Em 1698 surgiu a representação de uma função de variável x por X ou ξ.

Em 1718 modificou esta simbologia designando uma função por φx.

Em 1735, Euler substituiu esta notação por $\varphi(x)$, como actualmente utilizamos.

Dirichlet, importante matemático natural de Düren, actual Alemanha, propôs em 1837 uma definição mais ampla e moderna de função:

Se uma variável y está relacionada com uma variável x, existe uma segunda a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet



Johann Bernoull (1667-1748).

Digitalizada com CamScanner

Noção de equação logarítmica

Antes de introduzir o estudo das equações e inequações logarítmicas recordemos o conceito de função logarítmica e suas propriedades e de função inversa, que nos serão úteis para a introdução deste novo conceito.

Função inversa de uma função injectiva

Só as funções injectivas têm inversa.

Um ponto (b, a) pertence ao gráfico de f^{-1} se, e só se, (a, b) pertence ao gráfico de f. Num referencial o.n. (a, b) e (b, a) são pontos simétricos em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Exercício resolvido

Considere a função injectiva

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 3x - 6$$

Caracterize f^{-1}

Resolução

$D_f = \mathbb{R}$

Cálculo da inversa.

Procede-se do seguinte modo:

$f(x) = 3x - 6$

$y = 3x - 6$ — Substituir o $f(x)$ por y.

$x = 3y - 6$ — Trocar as variáveis x e y.

$-3y = -x - 6$ — Resolver a equação em ordem a y.

$y = \frac{x}{3} + 2$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 2$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \frac{x}{3} + 2$

Uma função real de variável real $f: A \to \mathbb{R}$ é **injectiva** se a elementos diferentes do domínio correspondem imagens por f diferentes.

$f: A \to \mathbb{R}$ é injectiva se:

$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Graficamente verificamos se uma função é injectiva traçando rectas paralelas ao eixo do x. Se o gráfico da função f intersecta a recta no máximo num ponto, a função diz-se injectiva.

Se f^{-1} existe, então:

- f^{-1} é uma função injectiva.
- O domínio da função inversa é o contradomínio da função.

$$D_{f^{-1}} = D'_f.$$

- O contradomínio da função inversa é o domínio da função.

$$D'_{f^{-1}} = D_f.$$

Digitalizada com CamScanner

Função logarítmica

Consideremos a função exponencial $y = 2^x$. A função é injectiva e por isso admite uma função inversa, que se designa **função logarítmica**.

Uma **função logarítmica** cuja base é a é uma função da forma:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \log_a x$$

onde $a > 0 \wedge a \neq 1$ e $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

Como consequência da definição tem-se que:

- O logaritmo do número 1, qualquer que seja a base é 0.

$$\log_a 1 = y \Leftrightarrow a^y = 1$$

Como $a \neq 1$, então $y = 0$.

- Só podemos calcular logaritmos de números positivos.

Tomando qualquer número negativo, seja -8, escrevendo $\log_a (-8) = y \Leftrightarrow a^y = -8$. Porém, $a > 0$ e $a \neq 1$ e, como tal, não existe nenhum valor de y que satisfaça a condição.

Da segunda consequência tem-se que o **domínio** da função logarítmica é $\mathbb{R}^+$.

Ao calcularmos logaritmos deparamos com logaritmos com duas bases especiais: os logaritmos de **base 10** e de **base e**. São logaritmos cujas bases geralmente são suprimidas:

$$\log_{10} x = \log x \text{ e } \log_e x = \ln x$$

Exercícios resolvidos

1

Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $\log_2 2^{\frac{1}{5}}$

b) $7^{2\log_7 5}$

c) $\dfrac{\log_2 16 \cdot \log_3 \sqrt{27}}{\log_2 8}$

d) $\log 10^5$

e) $\log 1000$

1. $\log_2 64$

Resolução

$\log_2 64 = y \Leftrightarrow 2^y = 64 \Leftrightarrow 2^y = 2^6 \Leftrightarrow y = 6$

2. $\log_{\frac{1}{4}} 2$

Resolução

$\log_{\frac{1}{4}} 2 = y \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^y = 2 \Leftrightarrow 2^{-2y} = 2 \Leftrightarrow -2y = 1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

Digitalizada com CamScanner

3. $\log_3 1 + \log_3\left(\frac{1}{3}\right)$

Resolução

$\log_3 1 + \log_3 \frac{1}{3} = 0 + y \;\; ; \;\; \log_3 \frac{1}{3} = y \Leftrightarrow 3^y = 3^{-1} \Leftrightarrow y = -1$

Então,

$\log_3 1 + \log_3 \frac{1}{3} = 0 - 1 = -1$

4. Escreva a expressão $10^{x \log 3} + 10^{\log x - 3\log y}$ sem usar o símbolo log.

Resolução

Da definição de logaritmo, temos: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \Leftrightarrow a^{\log_a x} = x$

Então:

$10^{x \log 3} = 10^{\log 3^x} = 3^x$

$10^{\log x - 3\log y} = 10^{\log \frac{x}{y^3}} = \frac{x}{y^3}$

Assim:

$10^{x \log 3} + 10^{\log x - 3\log y} = 3^x + \frac{x}{y^3}$

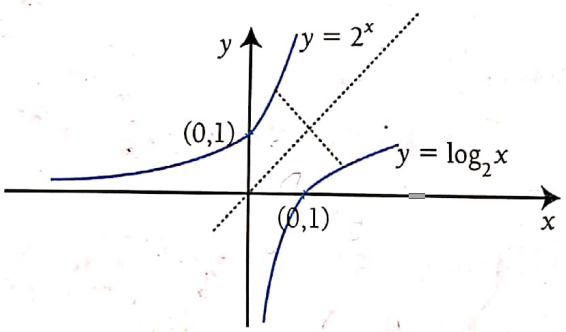
Representação gráfica

Conforme vimos na definição de função logarítmica, as funções exponenciais e logarítmicas são funções inversas e portanto os seus gráficos são simétricos relativamente à recta $y = x$. Consideremos, a título de exemplo, as funções $f(x) = 2^x$ e $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

Para a representação gráfica destas funções, façamos a tabela de função ($y = 2^x$) e da sua inversa ($y = \log_2 x$).

Temos assim:

$\log_2 1 = 0$;
$\log_2 2 = 1$;
$\log_2 4 = 2$;
$\log_2 8 = 3$.



x	0	1	2	3	$y = \log_2 x$
$y = 2^x$	1	2	4	8	x

É importante notar que $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$. No caso do exemplo anterior, se

$f(x) = 2^x$, $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2^x}$ e $f^{-1}(x) = \log_2 x$

2

Para cada uma das funções indique o domínio e o contra-domínio:

a) $y = \log_5 x$

b) $y = \log_{10}(-x)$

c) $y = \log_3(x + 2)$

d) $y = \log_{0,3}(9 - x^2)$

e) $y = -3 + 2\log(x - 1)$

Digitalizada com CamScanner

Propriedades da função logarítmica

- A função é estritamente crescente para $a > 1$ e é estritamente decrescente para $0 < a < 1$
- Todos os seus gráficos intersectam o eixo dos xx no ponto de coordenadas $(1, 0)$.
- O contradomínio da função é $\mathbb{R}$ e o seu domínio é $\mathbb{R}^+$.
- A função é injectiva.
- A função é contínua.

Propriedades dos logaritmos

Como sabemos, as propriedades dos logaritmos estão relacionadas com as propriedades das potências. Vamos então recordá-las:

Logaritmo do produto: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

Logaritmo do quociente: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Logaritmo da potência: $\log_a (x^p) = p \log_a x$

Mudança de base: $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$

Exercício resolvido

Mostre que $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Resolução

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$ c.q.m.

3

Usando as propriedades dos logaritmos, transforme as seguintes expressões:

a) $\log (2x - 5) + \log (3x + 7) = 4\log 2$.

b) $\log_2(2x+7) - \log_2(x-7) = 3$

c) $2\log 2 + \log (x^2 - 1) = \log (4x - 1)$

Transformações dos gráficos das funções e logarítmicas

Partindo dos gráficos das funções, $y = \log_a x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$ por transformações podemos obter os gráficos das funções do tipo

$$y = b \log_a (x - c) + d$$

Digitalizada com CamScanner

Para tal, é importante ter em conta a tabela que se segue:

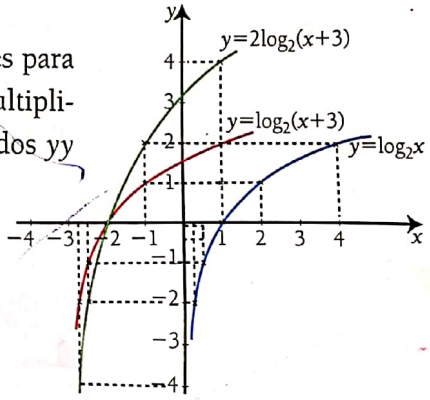
$y = f(x) + a$	Translação de a na direcção do eixo dos yy.
$y = f(x + a)$	Translação de $-a$ na direcção do eixo dos xx.
$y = af(x)$	Esticar ou encolher segundo o factor a, na direcção do eixo dos xx.
$y = f(ax)$	Esticar ou encolher segundo o factor $\frac{1}{a}$, na direcção do eixo dos xx.
$y = -f(x)$	Simetria em relação ao eixo dos xx.
$y = f(2x)$	Simetria em relação ao eixo dos yy.
$y = \lvert f(x)\rvert$	A parte do gráfico que se encontra abaixo do eixo dos xx é reflectida simetricamente em relação ao mesmo eixo.
$y = f(\lvert x\rvert)$	Mantêm-se os pontos de abcissa positiva e o gráfico fica simétrico relativamente ao eixo dos yy.

4

Partindo do gráfico de $y = \log_2 x$ construa o gráfico de $y = 2\log_2(x - 2)$.

Exemplo

Partindo do gráfico da função $y = \log_2 x$, e deslocando três unidades para a esquerda obtemos o gráfico de $y = \log_2 (x + 3)$ e deste último multiplicando-o por 2 esticamos o gráfico duas vezes na direcção do eixo dos yy obtendo o gráfico de $y = 2\log_2 (x + 3)$.



Noção de característica e de mantissa de um logaritmo de base 10

Considere a tabela seguinte:

Logaritmo	Número	Parte inteira do logaritmo	Parte decimal do logaritmo
−2,30103	0,02	−2	0,30103
−1,30103	0,2	−1	0,30103
0,30103	2	0	0,30103
1,30103	20	1	0,30103
2,30103	200	2	0,30103

Digitalizada com CamScanner

Prestando atenção à notação usada na tabela, podemos verificar que ela simplifica operações com logaritmos e mostra que se a divisão de dois números é um múltiplo de 10, basta mudar a parte inteira do logaritmo e preservar a parte decimal.

Se um número está entre duas potências consecutivas de 10, o expoente do menor potência é a característica do logaritmo desse número. A diferença entre o logaritmo do número e a caracteristica é a mantissa que é a parte decimal do logaritmo.

$\log 10^2 < \log 150 < \log 15^3$

$2 < \log 150 < 3$

$\log (20) = 1{,}30103$

Mantissa

Característica

Noção de antilogaritmo e de cologaritmo

Para além dos conceitos de característica e de mantissa relacionados como logaritmo, temos os conceitos de antilogaritmo simbolicamente *antilog* e de cologaritmo, simbolicamente *colog*.

Como sabemos, $\log_a x = b \Rightarrow a^b = x$.

Analisando a palavra antilogaritmo, podemos dizer que ela representa o contrário ou o oposto do logaritmo. Assim por definição,

$$antilog_a\, x = b \Rightarrow a^x = b$$

Exercícios resolvidos

1. Consideremos $antilog_2\, 5$.

Resolução

Por definição $antilog_2\, 5 = 2^5 = 32$.

2. Pretendemos determinar $antilog_3 (\log_{\frac{1}{2}} 27)$.

Resolução

Como $\log_{\frac{1}{2}} 27 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \Leftrightarrow 3^{-x} = 3^3 \Leftrightarrow x = -3$

Então temos $antilog_3 = -3 = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

5

Determine:

a) $antilog_3\, 4$

b) $antilog_{\frac{1}{4}} 3$

c) $antilog_2 (\log_3 9)$

Conforme acima mencionado, um outro conceito relacionado como logaritmo é o de cologaritmo, que por definição é tido como o simétrico do logaritmo.

Digitalizada com CamScanner

Então tendo em conta que,

$\log_a x = b \Rightarrow a^b = x$, temos $\operatorname{colog}_a b = -\log_a b$

Pelas definições e propriedades do logaritmo podemos ainda deduzir que:

$$\operatorname{colog}_a b = -\log_a b = \log_a b^{-1} = \log_a \frac{1}{b}$$

Exemplo

Pretendemos determinar $\operatorname{colog}_{10} 0{,}10$.

Pela dedução acima $\operatorname{colog}_{10} 0{,}10 = \log_{10} \frac{1}{0{,}1}$. Mas como sabemos $\frac{1}{0{,}1} = 10$. Então temos $\log_{10} 10 = 1$. Portanto $\operatorname{colog}_{10} 0{,}1 = 1$

6

Calcule:

a) $\operatorname{colog}_4 64$

b) $\operatorname{colog}_{\frac{1}{3}} 27$

c) $\operatorname{colog}_2 (\operatorname{antilog}_4 2)$

Equações e inequações logarítmicas

Tendo em conta que $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ algumas equações que envolvem logaritmos podem ser resolvidas através de uma equação exponencial equivalente e vice-versa.

É importante ter em conta que na resolução de uma equação logarítmica é necessário atender ao domínio.

Como ambas as funções $a \in \mathbb{R}$, exponenciais e logarítmicas são injectivas para

$a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$ | $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ | $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Exercícios resolvidos

Resolva cada uma das seguintes equações:

$2^{x+1} = 6$

Resolução

$2^{x+1} = 6$

$D = \mathbb{R}$

$2^{x+1} = 6 \Leftrightarrow x + 1 = \log_2 6 \Leftrightarrow x = -1 + \log_2 6$

$S = \{-1 + \log_2 6\}$

7

Resolva cada uma das seguintes equações:

a) $\log(x-3) - \log(2x-9) = 0$

b) $(\log_3 x)^2 = 4 - 3\log_3 x$

c) $\frac{1}{2}\log(2x-1) = 1 - \log\sqrt{x-9}$

d) $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = \frac{1}{2}$

Digitalizada com CamScanner

2. $(\log_3 x)^2 = 4 - 3\log_3 x$

Resolução

2. $(\log_3 x)^2 = 4 - 3\log_3 x$

$D = \mathbb{R}$

Seja

$\log_3 x = y \Rightarrow x = 3^1 = 3 \vee \log_3 x = -4 \Leftrightarrow x = 3^{-4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{81}$.

$S = \left\{\left(\frac{1}{81}\right)\right\}$

3. $\log(x-3) + \log x^2 = \log|2x|$

Resolução

3. $\log(x-3) + \log x^2 = \log|2x|$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0 \wedge x^2 > 0 \wedge |2x| > 0\}$ $\quad D =]3, +\infty[$

$\log(x-3) + \log x^2 = \log|2x| \Leftrightarrow \log[(x-3)\cdot x^2] = \log(2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)x^2 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$

Como $x = 0$ e $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ não pertencem ao domínio, a solução é:

$S = \left\{\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$

4. Considere a função $y = -3 + 2^{2x-1}$. Determine o domínio, o contradomínio e a função inversa.

Resolução

4. $D_f = \mathbb{R}$. A função é injectiva e por isso tem inversa.

$y = -3 + 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 3 + y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(3+y) = 2x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 1 + \log_2(3+y) \Leftrightarrow x = \frac{1 + \log_2(3+y)}{2}$

$D_f' =]-3, +\infty[$

Logo,

$f^{-1}:]-3, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \curvearrowright f^{-1}(x) = \frac{1+\log_2(y+3)}{2}$

8

Resolva as inequações seguintes:

a) $\log_9(2+x) > 0{,}5$

b) $\log_{0,3} 2 - 5x > 2$

c) $\log_x \frac{4^x+5}{6-5x} > -1$

Digitalizada com CamScanner

Aplicações das equações e inequações logarítmicas à vida real

Em 1935, Charles F. Richter, comparou os tamanhos relativos dos sismos e formulou uma escala baseada na amplitude dos registros das estações sismográficas. Para o cálculo da sua magnitude existem várias fórmulas diferentes, dependendo do tipo da onda sísmica medida no sismograma. A magnitude e a energia podem ser relacionadas pela fórmula descrita por Gutenberg e Richter em 1935:

$$\text{Log } E = 11{,}8 + 1{,}5\,M,$$

onde E representa a energia libertada em ergs lerg $= 10^{-7}$ J eM representa a magnitude do terramoto.

Uma das fórmulas utilizadas: $M_l = \log A - \log A_0$ onde.

Exercícios resolvidos

1. Suponhamos que um terramoto teve como amplitude 1000 micrómetros e a frequência a 0,1 Hz. Qual a magnitude desse terramoto no local onde está instalado o sismógrafo?

Resolução

$M_s = \log (A \cdot f) + 3{,}3 = \log (1000 \cdot 0{,}1) + 3{,}3 = \log 100 = 3{,}3.$

Considerando $\log 100 = x \Leftrightarrow 10^x \Leftrightarrow 100 \Leftrightarrow x = 2.$

Consequentemente $M_s = 2 + 3{,}3 = 5{,}3$ (com margem de erro 0,3 para mais ou para menos) na escala de Richter.

2. As indicações $M_1 \wedge M_2$, na escala de Richter de dois terramotos estão relacionadas pela fórmula: $M_1 - M_2 = \log \frac{E_1}{E_2}$ onde $E_1 \wedge E_2$ são as medidas de energia libertada pelos terramotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. De dois terramotos, um com $M_1 = 9$ e outro com $M_2 = 5$, qual o valor da razão $\frac{M_1}{M_2}$?

Resolução

$9 - 5 = \log \frac{M_1}{M_2} \Leftrightarrow \log E_1 - \log E_2$ então $9 = \log E_1 \Leftrightarrow 10^9 = E_1$

e por outro lado $5 = \log E_2 \Leftrightarrow 10^5 = E_2$

Portanto $\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^9}{10^5} = 10^4$

Digitalizada com CamScanner

3. A Física define «intensidade de uma onda sonora» como a quantidade de energia que a onda transmite através de uma certa área. O som menos intenso que o ouvido humano pode detectar, numa frequência de 100 hertz, é cerca de $10^{-12}\ Wm^{-2}$.
O nível $N(I)$, medido em decibéis, de um som de intensidade I (em watts por metro quadrado) é definido por:

$$N(I) = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ sendo } I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$$

Se, na equação anterior, considerarmos $I = I_0$, obtemos $N = 0$, ou seja, o nível zero corresponde ao limite de audibilidade do ouvido humano.
Seja então $N(I) = 10 \log (10^{12} \cdot I)$ o nível em decibéis, de um som de intensidade I, em watts por m^2.

a) A partir de 100 decibéis é aconselhável proteger os ouvidos. Sabendo que a intensidade do som produzido por um martelo pneumático é 1 W/m^2, averigua se é necessário proteger os ouvidos com auscultadores quando se trabalha com um martelo pneumático.
b) O nível de ruído correspondente ao tráfego numa grande cidade é 90 decibéis. Se o ruído produzido pelo metropolitano tem uma intensidade 10 vezes superior ao produzido pelo tráfego, qual o nível do ruído do metropolitano, em decibéis?
c) Exprime a intensidade I de um som em função do seu nível N.

Resolução

a) $N(1) = 10 \log (10^{12} \cdot 1) = 10 \log (10^{12}) = 10 \cdot 12 = 120$
O nível correspondente é 120 decibéis e é, portanto, necessário usar protecção.
b) Seja I_c a intensidade, em W/m^2, do som produzido pelo tráfego citadino.
Então $10\ I_c$ é a intensidade do som produzido pelo metropolitano e:

$$N(10\,I_c) = 10 \log (10^{12} \cdot 10\,I_c) \overset{(1)}{=} 10\,[\log (10^{12}\,I_c) + \log 10]$$
$$\overset{(2)}{=} 10 \log (10^{12} I_c) + 10 = N(I_c) + 10 = 90 + 10 = 100$$

O nível do ruído produzido pelo metropolitano é 100 decibéis.

c) O que se pretende é, afinal, a expressão da função inversa de N. Vamos resolver a equação $N = 10 \log (10^{12}\ I)$ em ordem a I.

$$N = 10 \log (10^{12}\ I) \Leftrightarrow \frac{N}{10} = \log (10^{12}\ I) \Leftrightarrow 10^{\frac{N}{10}}\ 10^{12}\ I \Leftrightarrow = \frac{10^{\frac{N}{10}}}{10^{12}} = I \Leftrightarrow I = 10^{\frac{N-120}{10^{12}}}$$

$I(N) = 10^{\frac{N-120}{10^{12}}}$ exprime a intensidade do som em watts por metro quadrado, sendo N o nível do som dado em decibéis.

4. Numa determinada cidade a taxa de crescimento populacional é de 4% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Resolução

Consideremos a população base P_0. Então a população após um ano será $P_0 \cdot (1{,}04) = P_1$; a população após dois anos será $P_0 \cdot (1{,}04)^2 = P_2$; e a população após x anos será $P_0 \cdot (1{,}04)^x = P_2$. Suponhamos que a população dobrará em relação ao ano base após x, temos,
Logaritmizando,
$P_x = 2P_0 \Leftrightarrow P_0(1{,}04)^x = 2P_0 \Leftrightarrow P_0(1{,}04)^x = 2$. Logaritmizando, $x \cdot \log(1{,}04) = \log 2$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log 2}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}30103}{0{,}01703} \Leftrightarrow x \cong 17{,}676$$

Digitalizada com CamScanner

1. Para cada uma das seguintes funções, caracterize a função inversa.

a) $y = 3 + \log_2 (x + 2)$ b) $y = -1 + e^{x-3}$ c) $y = \frac{3}{2} + \ln(x^2 - 1)$

Resolução

a) $y = 3 + \log_2 (x + 2) \Leftrightarrow y - 3 = \log_2 (x + 2)$

$2^{y-3} = x + 2 \Leftrightarrow 2^{y-3} - 2 = x \Rightarrow$ A função inversa é $y^{-1} = 2^{x-3} - 2$

b) $y = -1 + e^{x-3} \Leftrightarrow y + 1 = e^{x-3} \Leftrightarrow \ln(y + 1) = x - 3 \Leftrightarrow 3 + \ln(y + 1) = x \Rightarrow$ A função inversa é $3 + \ln(y + 1)$

c) $y = \frac{3}{2} + \ln(x^2 - 1)$;

$D_f = \{x: x^2 - 1 > 0\} \Leftrightarrow]-\infty; 1[\cup]1, +\infty[$; $D'f = \mathbb{R}$.

A função não é injectiva e por isso não admite função inversa.

2. Resolva as seguintes equações:

a) $\log_{0,3} x = 2$ b) $\log_3 x = -4$ c) $\log_{10} x + \log_x 10 = \frac{5}{2}$ d) $\log_{10} (x^2 + x + 6) + 4$

Resolução

a) $\log_{0,3} x = 2 \Leftrightarrow x = (0, 3)^2 \Leftrightarrow x = 0,09$; $S = \{0,09\}$

b) $\log_3 x = -4 \Leftrightarrow x = 3^{-4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{81}$; $S = \frac{1}{81}$

c) $\log_{10} x + \log_x 10 = \frac{5}{2}$; Seja $\log_{10} x = y \Rightarrow \log_x 10 = \frac{1}{\log_{10} x} = \frac{1}{y}$

$y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

Então $\log_{10} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{10} \vee \log_{10} x = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{10} \vee x = 100$; $S = \{\sqrt{10}, 100\}$

3. Resolva o sistema: $\begin{cases} \log x = \log y \\ 3 \log x - \log y = 2 \end{cases}$

Resolução

$\begin{cases} \log x = \log y \\ 3 \log x - \log y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3 \log y - \log y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2 \log x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \log x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 \\ x = 10 \end{cases}$

Digitalizada com CamScanner

4. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação:

$\log(1+x) - x < 0$

Resolução

$x \log(1+x) - x < 0 \Leftrightarrow x[\log(1+x) - 1] < 0$

$\Leftrightarrow 1 + x > 0 \,([x > 0 \wedge \log(1+x) - 1 < 0) \vee [x < 0 \wedge \log(1+x) - 1 > 0)$

$\Leftrightarrow x > -1 \wedge ([x > 0 \wedge \log(1+x) < 1] \vee [x < 0 \wedge \log(1+x) > 1])$

$\Leftrightarrow x > -1 \wedge ([x > 0 \wedge \log(1+x) < \log 10) \vee [(x < 0 \wedge \log(1+x) > \log 10])$

$\Leftrightarrow x > -1 \wedge ([x > 0 \wedge 1 + x < 10] \vee [x < 10 \wedge 1 + x > 10])$

$\Leftrightarrow x > -1 \wedge ([x > 0 \wedge x < 9] \vee [x < 0 \wedge x > 9])$

$\Leftrightarrow x > -1 \wedge (x > 0 \wedge x < 9)$

$S =]0,\ 9[$

5. Determine o tempo (em anos) necessário para que duplique uma quantia, Q, depositada num banco ao juro contínuo de 10%.

Resolução

A expressão que dá a quantia ao fim de t anos é:

$V = Q \cdot e^{0,1t}$

Então, teremos:

$2Q = Q \cdot e^{0,1t} \Leftrightarrow 2 = e^{0,1t} \Leftrightarrow \ln^2 = \ln e^{0,1t} \Leftrightarrow 0,1\, t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,1} \Leftrightarrow t \approx 6,931$

R.: A quantia duplica ao fim de, apoximadamente, 7 anos.

6. A figura ao lado representa um reservatório. Considera que o reservatório está inicialmente vazio e vai ser ligado a uma torneira, de débito constante, que o vai encher de água. O reservatório fica cheio ao fim de 24 horas. admite que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas depois de se começar a encher, é dada por:



$$h(t) = a - \log_2(128 - 4t),\ t \in [0, 24]\ a \in \mathbb{R}^+$$

Determina o valor de a e a altura do reservatório.

Resolução

Podemos determinar o valor de a atendendo a que o depósito está inicialmente vazio e, portanto, $h(0) = 0$.

$$h(0) = 0 \Leftrightarrow a - \log_2(128 - 4 \cdot 0) = 0 \Leftrightarrow \log_2 128 = a \Leftrightarrow a = 7$$

A altura do reservatório é a altura da água ao fim de 24 horas e

$$h(24) = a - \log_2(128 - 4 \cdot 24) \Leftrightarrow h(24) = a - \log_2 32 \Leftrightarrow h(24) = a - 5$$

Como $a = 7$ concluímos que a altura do reservatório é 2 metros.

Digitalizada com CamScanner



1. Determine o domínio de existência das funções:

a) $\log_3 (x - 5)$

b) $\log_{10} (7 - x)$

c) $\log_{11} (6 + x - x^2)$

2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) $\log \left(9 + \log(9 + \log x)\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$

b) $\log_9 (3^x + 8) = x + 1$ é uma equação impossível.

c) $\log_x 100 - \log_x 25 = 2$ é uma equação indeterminada.

d) $\ln (x + 1) - \ln (x - 1) - \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$ se $x > 1$

3. Resolva as equações logarítmicas seguintes:

a) $\log_2 x = 3 - \log_2 7$

b) $2\log_7 \sqrt{x} = \log_2 (9 - 2x)$

c) $\log_{10} (4{,}5 - x) = \log_{10} 4{,}5 - \log_{10} 10$

d) $\log_4 x + \log_x 2^2 = 1$

e) $\log_{10} (x^2 + 19) = \log_{10} (x - 8) = 2$

f) $\log_3 (4 \cdot 3 - 1) = 2x + 1$

4. Resolva as seguintes inequações:

a) $\log_4 \left(\frac{2x - 1}{x + 1}\right) < -\frac{1}{2}$

b) $25^x - 2^{2(\log_2 6) - 1} < 10 \cdot 5^{x-1}$

5. Caracterize, caso exista, a função inversa, f^{-1} de cada uma das seguintes funções, f:

a) $f(x) = 3^{x-1}$

b) $f(x) = 3^{-x}$

c) $f(x) = \ln x^2$

d) $f(x) = 2 - \log (x + 2)$

6. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) $\left(3^{-\sqrt{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right) \div \left(3^{-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3{,}7$

b) $\log_2 64 = -x \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

c) $3^{\log_2 27} + e^{\log_e 4} = 31$

d) $6^{x^2 - 7x + 10} = 1 \Leftrightarrow x = 5$

7. Partindo dos gráficos das funções $y = \log_2 x$ obtenha a representação gráfica para cada uma das funções:

a) $y = \log_2 (-x)$

b) $y = 2 + \log_2 x$

c) $\log_2 (2x)$

8. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmaçãoes sendo $a \in \mathbb{R}^+ \{1\}$.

A. $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y, (x > 0 \text{ e } y > 0)$

B. $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x < y, (x > 0 \text{ e } y > 0)$

C. $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$

9. Resolva as equações: $\Leftrightarrow 1$

a) $\log_5 x = -\log_5 7$

b) $\log_2 x = 3 - \log_2 7$

c) $x^{\log_2 x} = 16$

d) $\log_5 x + \log_7 x = \log_5 35$

e) $\log_{10} (0{,}5 + x) = \log_{10} 0{,}5 - \log_{10} x$

f) $\log_{10} (4{,}5 - x) = \log_{10} 4{,}5 - \log_{10} x$

g) $\frac{1}{5 + \log_{10} x} - \frac{2}{1 + \log_{10} x} = 1$

h) $\log_4 x + \log_x 2^2 = 1$

i) $\log_5 x \cdot \log_7 x = \log_5 7$

j) $\log_3 (4 \cdot 3^x - 1) = 2x + 1$

k) $\log_2 (2^x + 1) \cdot \log_2 (2^{x+1} + 2) = 2$

Digitalizada com CamScanner



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Aplicar vectores na resolução de problemas.
- Escrever as coordenadas e componentes de um vector no plano.
- Escrever um vector como a diferença de dois pontos.
- Determinar a soma de um ponto com um vector e a soma de dois vectores.
- Determinar o produto de um número real por um vector.
- Determinar a norma de um vector no plano.
- Determinar um vector colinear com o outro.
- Resolver problemas envolvendo os conceitos norma e colinearidade entre vectores.
- Calcular a distância entre dois pontos.
- Identificar a equação da recta.
- Determinar o declive de uma recta.
- Escrever a equação da circunferência conhecido o centro e o raio.
- Resolver problemas envolvendo circunferências.
- Identificar o centro da circunferência e o raio dada a respectiva expressão analítica.
- Interpretar a condição de paralelismo e de perpendicularidade de duas rectas em função dos seus respectivos declives.
- Determinar o ponto médio de um segmento através da fórmula.
- Determinar os pontos de intersecção de duas rectas.
- Calcular a distância de um ponto a uma recta.
- Definir elipse e identificar os seus elementos.
- Escrever a equação de uma elipse com centro na origem dos eixos de coordenadas.
- Aplicar a equação da elipse na resolução de problemas.

Digitalizada com CamScanner

UNIDADE 5

Geometria Analítica no Plano

CONTEÚDOS

4. Geometria analítica da recta no plano

4.1. Aplicações de vectores.
4.2. Distância entre dois pontos (com a sua demonstração).
4.3. Equação vectorial da recta no plano.
4.4. Equação geral da recta.
4.5. Equação reduzida da recta no plano.
4.6. Declive de uma recta.
4.7. Cálculo de declive de uma recta dados dois pontos da recta.
4.8. Posição relativa de rectas no plano.
4.9. Condição de paralelismo e de perpendicularidade de duas rectas em função dos seus respectivos declives.
4.10. Fórmula para determinar o ponto médio de um segmento e suas aplicações.
4.11. Determinação de pontos de intersecção de duas rectas.
4.12. Cálculo da distância de um ponto a uma recta.
4.13. Equação da circunferência de centro e raio dados.
4.14. Equação da elipse e equação da hipérbole.

Pág. 100 a 141

Digitalizada com CamScanner

Notas históricas

Os vectores são usados desde o tempo de Aristóteles até aos nossos dias. Aristóteles usou os vectores para descobrir os efeitos das forças.

A noção de vector pode ter a sua origem nos «segmentos orientados» usados por Charles (1792-1880) e que permitiam substituir fórmulas relacionadas com comprimentos, por outras usando «medidas algébricas de segmentos orientados».

Os segmentos orientados foram considerados, tanto no plano como no espaço, sob a designação de vectores ligados, sobre os quais se define uma relação de equipolência (equivalência), obtendo-se assim, «classes» de segmentos orientados com a mesma direcção uma dessas é chamada um vector livre.

É claro que esta linguagem de «classes» de segmentos orientados é recente, tal como a distinção entre vector livre e vector ligado ou aplicado.

As grandezas cinemáticas, físicas, como a força, a pressão, a velocidade, a aceleração, etc. eram consideradas vectores sem que tivesse sido feita qualquer definição do termo...

E eram representados simbolicamente por segmentos orientados sem que esse símbolo fosse suficientemente explicitado.

Houve um progresso substancial quando se compreendeu que não tinha sentido considerar isoladamente cada vector; o que importava era considerar certos conjuntos de vectores e saber operar com eles: somar dois vectores, multiplicar por um número e reconhecer algumas propriedades fundamentais.



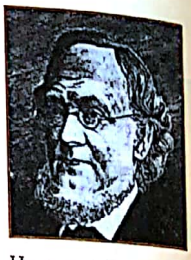
Sir William Hamilton.

Assim se foi elaborando o conceito de vectores durante o século XIX. E só no século XX esse conceito veio a ganhar o seu contorno definitivo.

Pensa-se que terá sido o matemático irlandês William Hamilton (1850-1865) que, no decurso de persistentes investigações sobre os números complexos e os quarteniões, introduziu a noção de vector.

É de referir, contudo, que Hamilton (1843) e o matemático alemão Hermann Grassman (1809-1877), embora partindo de pontos de vista diferentes, podem ser ambos considerados criadores do cálculo vectorial

Também se deve a Hamilton e a Grassman a classificação e aplicação do «produto interno» de dois vectores, hoje chamado produto escalar e cujo resultado é um número (escalar).



Hermann Grassmann (1809-1877).

São de sublinhar duas inovações na definição deste produto, a primeira das quais dificultou o reconhecimento da sua importância:

- Rompeu com a rotina do produto de duas quantidades de um certo tipo ser ainda desse tipo; o produto escalar não é uma lei de composição interna no conjunto de vectores e não se define o quociente de vectores.
- Permitiu a Grassman desenvolver o estudo da ortogonalidade e dar outras aplicações geométricas às suas teorias.

O matemático americano W. Gibbs (1839-1903) e o inglês O. Heaviside (1850-1925) aperfeiçoaram a teoria e deram ao cálculo vectorial a sua forma quase definitiva.

Uma das personagens mais notáveis do século XVII foi o francês René Descartes.

Em 1637, sob a protecção de Richelieu e do príncipe de Orange, publica o Discurso sobre o *Método para Guiar a Razão na Procura da Verdade e da Ciência*. Um dos apêndices desta obra foi *La Géométrie*, que levou o seu ponto de vista ao conhecimento dos seus contemporâneos.



A rainha Cristina da Suécia com Descartes.

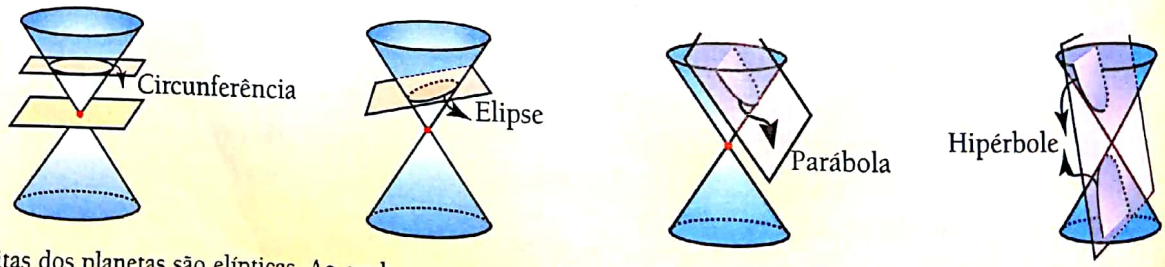
Referencial cartesiano e eixos cartesianos são termos que todos os estudantes conhecem. Parece que esta ideia surgiu a Descartes quando observava uma mosca que esvoaçava no tecto do seu quarto.

Associou às arestas do quarto a ideia dos eixos. Deste modo, qualquer ponto ou figura existente no plano é identificável e mensurável em relação aos pontos da escala que marcamos sobre os dois eixos.

Nasce assim a Geometria Analítica.

Descartes morre prematuramente em 1650 em Estocolmo. O rigor do Inverno e o levantar de madrugada para dar lições à Rainha Cristina da Suécia são demasiado para a sua fraca saúde.

No séc. III a.C. Apolónio, matemático grego, estudou as secções feitas por um plano num duplo cone. Conforme a posição do plano, obtinha diferentes linhas que têm a designação genérica de cónicas.



As órbitas dos planetas são elípticas. Ao conhecer a equação da órbita o astronauta pode determinar a velocidade num dado instante do movimento.

Em Mecânica usam-se as parábolas. Os faróis dos automóveis têm a forma parabólica.

Em Física, muitas situações de relação entre duas variáveis entre são de proporcionalidade inversa e o modelo geométrico é o ramo de uma hipérbole.

Digitalizada com CamScanner

Geometria analítica

A Geometria Analítica tem por objectivo a tradução da linguagem geométrica para a linguagem analítica ou algébrica e vice-versa, isto é, estuda as propriedades das figuras geométricas com a ajuda de cálculos ou de métodos analíticos.

Os conhecimentos adquiridos nesta unidade permitirão ao aluno aperceber-se de que a linguagem das coordenadas e dos vectores lhe fornece novos utensílios para a resolução de problemas abordados noutras perspectivas.

Conceitos gerais sobre vectores

O conceito de vector é muitas vezes usado nas Ciências Físicas e Matemáticas. Na Física, os vectores podem representar grandezas, tais como forças ou velocidades. Estas grandezas dizem-se grandezas vectoriais. Na Matemática, os vectores são tidos como entes matemáticos caracterizados por:

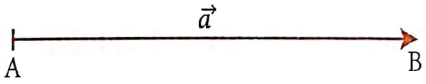
- Uma direcção.
- Um sentido.
- Um comprimento.

Em geral, os vectores são designados por letras minúsculas com uma seta por cima,

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \ldots)$$

O vector $\vec{a}$ definido pelo segmento de recta orientado [A, B] representa-se por $\overrightarrow{AB}$ e pode escrever-se:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$



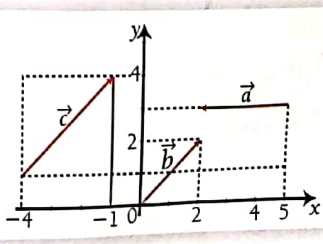
O ponto A é geralmente denominado por ponto de aplicação ou origem e o ponto B por extremidade ou ponto final.

O vector nulo é um vector que tem direcção e sentido indeterminados e comprimento zero. Este vector representa-se por $\vec{0}$.

A medida do comprimento de um vector é designada por comprimento ou norma do vector. A norma de um vector $\vec{a}$ representa-se por $\|\vec{a}\|$ e lê-se norma do vector $\vec{a}$.

Exercício resolvido

Determine o comprimento de cada um dos vectores representados na figura.



Digitalizada com CamScanner

Resolução

$\|\vec{a}\| = 3$ – Pela observação da figura.

$\|\vec{b}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$ – Pela aplicação do teorema de Pitágoras.

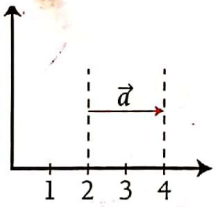
$\|\vec{c}\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$ – Pela aplicação do teorema de Pitágoras.

Os vectores cuja norma é igual a 1 dizem-se vectores **unitários.**

1

Para cada uma das situações seguintes, determine o comprimento de cada um dos vectores.

a)



b) $\vec{b} = (-1, 4)$

c) $\vec{c} = (2, 3)$

2

Desenhe dois vectores:
a) Colineares.
b) Opostos entre si.

Dois vectores u e v di-zem-se opostos entre si se eles têm o mesmo módulo, direcção e sentidos opostos.
$\vec{u} = -\vec{v}$

Igualdade de vectores

Dois vectores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ dizem-se **iguais** se e somente se:

$$a = c \text{ e } b = d$$

isto é, se as suas normas são iguais, as suas direcções e os seus sentidos coincidem.

Exercício resolvido

Qual será o valor de a para que os vectores $\vec{u} = (3, 4)$ e $\vec{v} = (3, a)$ sejam iguais?

Resolução

Para que os dois vectores sejam iguais, a tem de ser igual a 4.

Colinearidade de vectores

Dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se existe um número real k ta que:

$$\vec{u} = k\,\vec{v},\ k \in \mathbb{R}$$

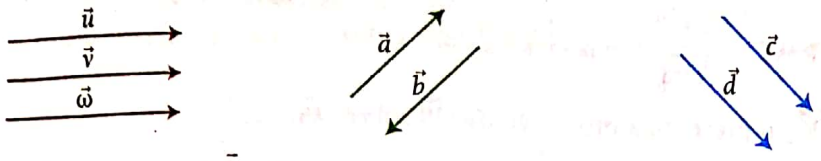
Se os vectores $\vec{u}\ (u_1, u_2)$ e $\vec{v}\ (v_1, v_2)$ são colineares, então existe um proporcionalidade directa entre as suas coordenadas, ou seja:

$$\begin{cases} u_1 = k\,v_1 \\ u_2 = k\,v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1}{v_1} = k \\ \dfrac{u_2}{v_2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = k \Leftrightarrow$$

O vector nulo é colinear com qualquer vector pois tem direcção ind erminada.

Digitalizada com CamScanner

Dois vectores não nulos com a mesma direcção são sempre colineares.



Três vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ dizem-se complanares:

- se dois deles são colineares ou
- se existem $k, \lambda \in \mathbb{R}$, tal que:

$$c = k\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

Exercício resolvido

Determine um vector de norma 1 que seja colinear com o vector $\vec{u} = (-1, 0, 1)$.

Resolução

$u = (-1, 0, 1)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

O vector colinear será:

$\vec{v} = k\,\vec{u} = k(-1, 0, 1) = (-k, 0, k)$

logo $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-k)^2 + 0 + k^2} = k\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

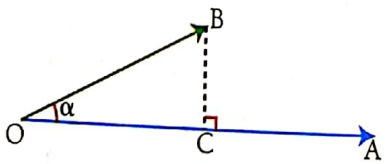
ou

$\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

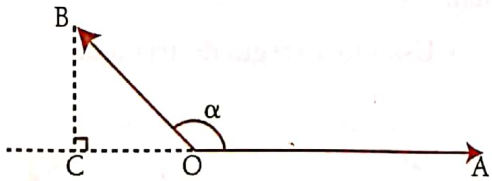
Projecção de um vector sobre outro vector

Observemos a figura:

1.º caso



2.º caso



1.º caso: α é um ângulo agudo.

3

Determine a projecção dos vectores $\overrightarrow{OA}$ sobre $\overrightarrow{OB}$, sabendo que os mesmos são perpendiculares.

Digitalizada com CamScanner

Dos conhecimentos da trigonometria temos:

$$\cos\alpha = \frac{\|\overrightarrow{OC}\|}{\|\overrightarrow{OB}\|} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \cos\alpha$$

$\|\overrightarrow{OC}\|$ representa a projecção de $\overrightarrow{OB}$ sobre $\overrightarrow{OA}$.

Assim,

Chama-se **projecção** de $\overrightarrow{OB}$ sobre $\overrightarrow{OA}$ e representa-se por $proj_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB}$ ao produto do módulo de $\overrightarrow{OB}$ pelo cos $(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA})$.

$$proj_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OB}\| \cos(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA})$$

$(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA})$ representa a amplitude do ângulo convexo formado pelos dois vectores.

2.º caso: α é um ângulo obtuso.

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{\|\overrightarrow{OC}\|}{\|\overrightarrow{OB}\|} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OB}\| \cos(180° - \alpha)$$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

Pela figura apresentada, a projecção de OB sobre OA é: $-\|\overrightarrow{OC}\|$.

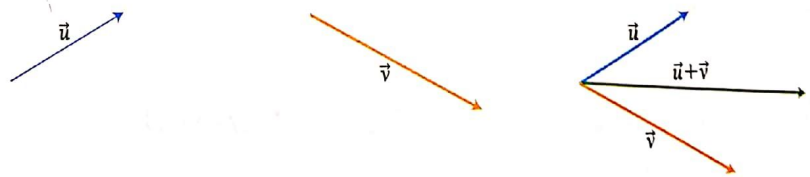
A $proj_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB}$ é um escalar que será um número positivo se o ângulo entre os vectores $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA}$ for um ângulo agudo e será um número negativo se o ângulo entre os dois vectores for obtuso.

Operações lineares

Adição de dois vectores

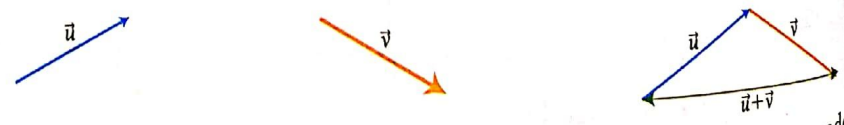
Dados os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos o vector soma $\vec{u} + \vec{v}$ pode ser determinado de duas formas diferentes:

- Usando a «regra do paralelogramo».



Constrói-se um paralelogramo que tenha por lados os dois vectores $(\vec{u}$ e $\vec{v})$ aplicados no mesmo ponto e traça-se a diagonal a partir desse ponto. O vector soma é o vector resultante, com a direcção e o comprimento da diagonal.

- Usando a «regra do triângulo»:



Após desenhar o primeiro vector, $\vec{u}$, aplica-se a origem do segundo vector, $\vec{v}$, na extremidade do primeiro.

4

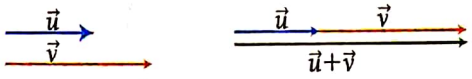
Dados os vectores $\vec{v} = (20,4)$ e $\vec{u} = (1,5)$.

Calcule a projecção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. Supondo o ângulo entre eles $\alpha = 60°$.

Digitalizada com CamScanner

O vector soma, $\vec{u}+\vec{v}$, é o vector que se obtém unindo a origem do primeiro vector $\vec{u}$ com a extremidade do segundo vector $\vec{v}$.

- Se os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tiverem a mesma direcção e o mesmo sentido:



O vector soma, $\vec{u}+\vec{v}$, tem a direcção e o sentido dos vectores parcelas e a sua norma é igual à soma das normas.

- Se os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tiverem a mesma direcção e sentidos contrários:



O vector soma, $\vec{u}+\vec{v}$, tem a direcção dos vectores parcelas e o sentido do vector parcela com maior norma. O comprimento do vector soma é o valor absoluto da diferença entre as normas dos vectores parcelas.

Diferença entre dois vectores

Dados os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ quaisquer, a sua diferença é a soma do primeiro $\vec{a}$ com o simétrico do segundo, isto é,

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$



Multiplicação de um escalar por um vector

Dado um vector $\vec{u}$, temos:



é fácil de observar que:

- $2\vec{u}$, tem a mesma direcção, o mesmo sentido e a sua norma é o dobro da norma de $\vec{u}$.
- $-2\vec{u}$, tem a mesma direcção de $\vec{u}$, sentido contrário de $\vec{u}$ e a sua norma é o dobro de $\vec{u}$.

De um modo geral se, dados um número real $k \neq 0$ e um vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, o produto do número real k por $\vec{u}$ é o vector $k\,\vec{u}$ com:

- A direcção de $\vec{u}$.

Digitalizada com CamScanner

- O sentido de $\vec{u}$ se $k > 0$ e sentido oposto se $k < 0$.
- O comprimento igual ao comprimento de $\vec{u}$ multiplicado por $|k|$.

$$\|k\,\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$$

Decomposição de um vector em vectores da base

Dados os vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e os números reais a_1 e a_2. Formemos o vector $\vec{b}$ de tal modo que:

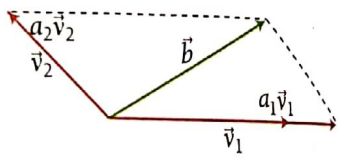
$$\vec{b} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$$

Neste caso, diz-se que o vector b é uma combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Dois vectores não colineares $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ formam uma base sobre o plano se qualquer vector $\vec{b}$ deste plano pode ser representado como combinação linear dos vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Então, podemos afirmar que para qualquer vector $\vec{b}$ do plano podemos determinar números reais a_1 e a_2 que satisfazem a expressão:

$$\vec{b} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$$

Esta expressão dá-nos o desenvolvimento do vector $\vec{b}$ na base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$; os números a_1 e a_2 dizem-se coordenadas do vector $\vec{b}$ em relação à base $\{v_1, v_2\}$.



Logo, $\vec{b} = (a_1; a_2)$

Teorema: Qualquer vector $\vec{b}$ pode ser desenvolvido na base dada $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de uma única forma.

Demonstração:

Suponhamos que o vector $\vec{b}$ pode ser desenvolvido na referida base de duas maneiras diferentes:

$$\vec{b} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \quad \text{e} \quad \vec{b} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2$$

Subtraindo da primeira igualdade a segunda obtemos

$$(a_1 - b_1)\vec{v}_1 + (a_2 - b_2)\vec{v}_2 = 0$$

Como os vectores da base não são colineares esta igualdade só é possível no caso em que os coeficientes sejam todos nulos, isto é,

$$a_1 - b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = b_1 \quad \text{e} \quad a_2 - b_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = b_2$$

5

Seja $v = 2\vec{i} - 4\vec{j}$
$\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$:
Escreva as coordenadas do vector $\vec{u}$, sabendo que este:

a) É colinear a $\vec{v}$ e tem 4 vezes o comprimento de $\vec{v}$.

b) Tem a mesma direcção e sentido de $\vec{v}$ e metade do comprimento de $\vec{v}$.

6

De quantas formas um vector $\vec{v}$ pode ser desenvolvido numa base dada? Justifique.

Digitalizada com CamScanner

o que significa que o desenvolvimento de $\vec{b}$ na base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ é único.

Se $\vec{a} = (x_1, y_1)$ a sua norma será então

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Se $\vec{v} = (a, b)$ e $\vec{w} = k\vec{v}$, então

$$\vec{w} = (ka, kb)$$

Exercício resolvido

Dados os vectores $\vec{u} = (7, -2)$ e $\vec{v} = (1, -3)$. Calcule:

a) $\vec{u} - 2\vec{v}$

b) $\|u - 2v\|$

Resolução

a) $\vec{u} - 2\vec{v} = (7, -2) - 2(1, -3) = (7, -2) - (2, -6) = (5, 4)$

b) $\|\vec{u} - 2\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

7

Dados os vectores $\vec{a} = (7, -2)$ e $\vec{c} = (1, -3)$.

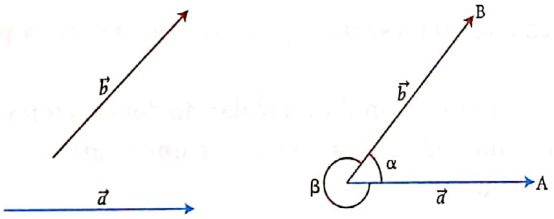
Calcule as coordenadas de:

a) $-3\vec{a} + 2\vec{c}$

b) $2\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{c}$

Ângulo entre dois vectores

Dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o ângulo de $\vec{a}$ com $\vec{b}$ é o ângulo convexo α, definido pelos vectores dos seus representantes aplicados na mesma origem.



As semi-rectas $\dot{O}A$ e $\dot{O}B$ formam o ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ e representa-se por:

$$(\vec{u} \hat{} \vec{v})$$

- O ângulo de dois vectores não é orientado, portanto

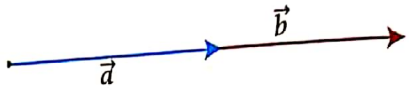
$$(\vec{u} \hat{} \vec{v}) = (\vec{v} \hat{} \vec{u}) = \alpha$$

Digitalizada com CamScanner

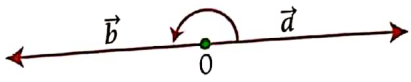
- O ângulo entre vectores é convexo, logo:

$$0° \leq \alpha \leq 180°$$

- O ângulo de dois vectores colineares com o mesmo sentido é 0°,

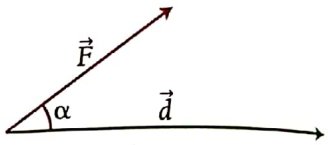


- O ângulo de dois vectores colineares com os sentidos opostos é 180°,



Produto interno de vectores

Dos conhecimentos que temos da Física, o trabalho w realizado por uma força que se exerce sobre um corpo, não actuando na direcção da trajectória do corpo, é-nos dado pela fórmula:



$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \alpha$, sendo α o ângulo dos vectores $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

Em termos matemáticos $\vec{F}$ representa o módulo de um vector, relativo à força, $\vec{d}$ o módulo de outro vector, relativo ao deslocamento, e α o ângulo dos dois vectores. Considerando $\vec{F}$ como sendo o módulo de um vector $\vec{a}$, $\vec{F} = \|\vec{a}\|$ e $\vec{d}$ a norma de um vector $\vec{b}$, $\vec{d} = \|\vec{b}\|$, tem-se assim:

$$W = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

o que em Matemática representa o produto interno ou o produto escalar dos dois vectores.

O produto interno ou produto escalar de dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ representa-se por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e é um número real, ou seja, é um escalar.

Por definição tem-se:

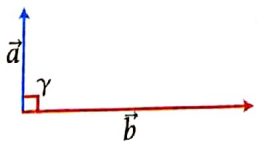
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ se } \vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}), \text{ se } \vec{a} \neq 0 \text{ e } \vec{b} \neq 0$$

A partir da definição de produto escalar de dois vectores não nulos ($\vec{a} \neq \vec{0}$ e $\vec{b} \neq \vec{0}$) verifica-se que o produto escalar é um número real positivo, negativo ou nulo conforme o valor do cos $(\hat{\vec{a}, \vec{b}})$:

- Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$

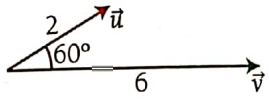
Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares.



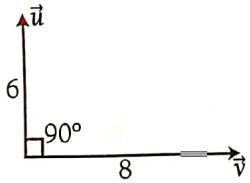
8

Calcule o valor do produto interno, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ em cada um dos casos seguintes:

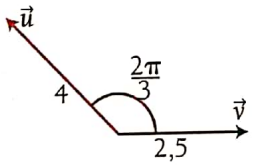
a)



b)



c)

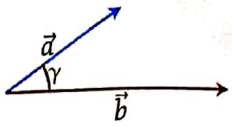


Os números associados aos vectores representam as respectivas normas.

Digitalizada com CamScanner

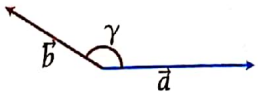
• Se $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) > 0 \Leftrightarrow 0 \leq (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) < 90°$

O ângulo formado pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é agudo.



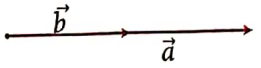
• Se $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) < 0 \Leftrightarrow 90° < (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) \leq 180°$

O ângulo formado pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é obtuso.



• Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 0°$

Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direcção e sentido.



• Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 180°$

Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direcção e sentidos contrários.



Exercício resolvido

Calcule o valor do produto interno $\vec{u} \cdot \vec{v}$ em cada um dos casos seguintes:

a) $\|\vec{u}\| = 2; \|\vec{v}\| = 6$ e $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = 30°$

Resolução

a) $\vec{u} \cdot v = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$

$\|\vec{u}\| = 2;\ \|\vec{v}\| = 6$ e $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = 30°$

Então,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 6 \cdot \cos 30° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

b) $\|\vec{u}\| = 6; \|\vec{v}\| = 10$ e $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = 90°$

Resolução

b) $\|\vec{u}\| = 6;\ \|\vec{v}\| = 10$ e $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = 90°$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \cdot 10 \cdot \cos 90° = 60 \cdot 0 = 0$

c) $\|\vec{u}\| = 3{,}5; \|\vec{v}\| = 2$ e $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$

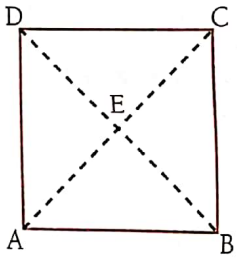
Resolução

c) $\|\vec{u}\| = 3{,}5;\ \|\vec{v}\| = 2$ e $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3{,}5 \cdot 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3{,}5$$

9

A figura [ABCD] é um quadrado de lado 7 cm. E é o ponto de intersecção das diagonais.



Calcule:

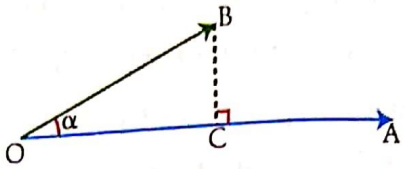
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$+

b) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

Digitalizada com CamScanner

Pela figura sabemos que:



$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \cos(\overrightarrow{OB}\hat{,}\overrightarrow{OA})$

Como

$$proj_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OB}\| \cos(\overrightarrow{OB}\hat{,}\overrightarrow{OA})$$

10

Calcule $proj_{\vec{b}}^{\vec{a}}$ se $\|\vec{b}\| = 16$, $\|\vec{a}\| = -\frac{1}{2}$ e $a \cdot b = -4$

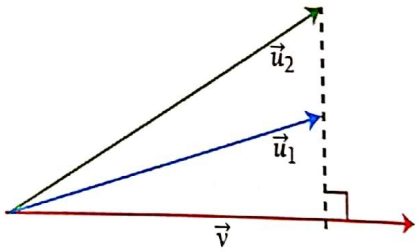
vem

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot proj_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB}$$

O produto escalar de dois vectores é igual ao produto da norma de um deles pela projecção do outro sobre o primeiro.

Exercícios resolvidos

1. Observe a figura ao lado.
Mostre que:



$\vec{u_1} \cdot \vec{v} = \vec{u_2} \cdot \vec{v}$

Resolução

Temos que:

$proj_{\vec{v}}\vec{u_1} = proj_{\vec{v}}\vec{u_2}$ e

$\vec{a_1} \cdot \vec{b} = \|\vec{b}\| \cdot proj_{\vec{b}}\vec{a_1}$

$\vec{a_2} \cdot \vec{b} = \|\vec{b}\| \cdot proj_{\vec{b}}\vec{a_2}$

Logo, $\vec{a_1} \cdot \vec{b} = \vec{a_2} \cdot \vec{b}$

2. Num referencial o.n. considere os pontos $A(1, 1)$ e $B(3, -4)$ e o vector: $\vec{t} = -\frac{1}{2}\vec{e_1}$. Calcule a $proj_{\overrightarrow{AB}}\vec{t}$.

Resolução

$proj_{\overrightarrow{AB}}\vec{t} = \frac{\vec{t} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ é necessário calcular:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -4) - (1, 1) = (2, -5)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

Digitalizada com CamScanner

Então

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{i} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 0\right)\cdot(2,-5)}{\sqrt{29}} = \frac{-1}{\sqrt{29}} = \frac{-1\cdot\sqrt{29}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}} = -\frac{\sqrt{29}}{29}$$

Propriedades do produto interno

Sabemos que:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\hat{\vec{a}},\vec{b})$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = \|\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}\|\cdot\cos(\hat{\vec{b}},\vec{a})$$

A multiplicação de números reais é comutativa e $(\hat{\vec{a}},\vec{b}) = (\hat{\vec{b}},\vec{a})$, consequentemente, o produto interno é comutativo.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a},\ \forall\,\vec{a}\text{ e }\vec{b}.$$

O produto interno é distributivo em relação à adição de vectores.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

O produto interno é associativo relativamente a um factor numérico.

$$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

- Para determinar a abcissa entre $R(x_1, y_2)$ e $P(x_2 \text{ e } y_1)$ a hipotenusa do triângulo utilizamos o triângulo [RQP] e pelo teorema de Pitágoras, obtém-se:

$\overline{RP^2} = \overline{QP^2} + \overline{RQ^2}$

$\Leftrightarrow \overline{RP^2} = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$

Como $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ e $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$, vem

$$\overline{RP} = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

11

Calcule:

$2\vec{u}(\vec{u} + 3\vec{v})$,

sabendo que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 4$ e $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1$

12

Dados os vectores $\vec{a}(4, -1)$; $\vec{b}(-2, 8)$ e $\vec{c}(-3, 5)$, verifique que

$\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

13

Dados os vectores $\vec{u} = (2, 5)$; $\vec{v} = (0, -5)$ e $\vec{w} = (-2, -2)$, calcule:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{w}$

c) $\vec{v}\cdot\vec{w}$

Digitalizada com CamScanner

14

Dados os pontos:

P(2, 5); Q(5, 2); $R\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e S(− 3, 2).

a) Represente-os graficamente.

b) Determine as distâncias entre os pontos: $\overline{PQ}$; $\overline{PR}$ e $\overline{QS}$.

Exercício resolvido

Determine a distância entre os pontos (2,1) e (8,9).

Resolução

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{(2 - 8)^2 + (1 - 9)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

Note-se, particularmente, que a distância dum ponto qualquer $P(x, y)$ à origem dos eixos é:

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \Leftrightarrow$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Divisão de um segmento numa razão dada

Dado um segmento $\overline{AB}$ diz-se que um ponto P o divide numa razão k se e somente se

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = k.$$

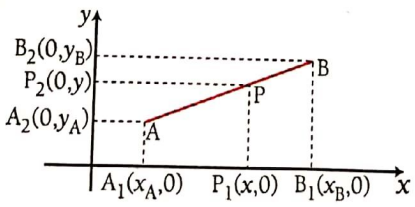
Pretendemos determinar as coordenadas de um ponto P quando são conhecidas as coordenadas de A e B e a razão k. Pelo teorema de *Tales*:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_1}} = \frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2B_2}} = k$$

Consideremos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $P(x, y)$.
Tomando-se:

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_1}} = k \Leftrightarrow \frac{x_A - x}{x - x_B} = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_A - x = k(x - x_B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_A - x = kx - kx_B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_A + kx_B = kx + x \Leftrightarrow x_A + kx_B = x(k + 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{x_A + kx_B}{k + 1}$$



$$x = \frac{x_A + kx_B}{k + 1}$$

Digitalizada com CamScanner

Do mesmo modo teremos:

$$y = \frac{y_A + ky_B}{k + 1}$$

Exercício resolvido

Determinar as coordenadas de um ponto P que divide um segmento $\overline{AB}$ na razão $\frac{2}{3}$, sendo $A(2, 5)$ e $B(5, 10)$.

Resolução

$$x = \frac{x_A + kx_B}{k + 1} = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot 5}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{\frac{16}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{16}{5}$$

$$y = \frac{y_A + ky_B}{k + 1} = \frac{5 + \frac{2}{3} \cdot 10}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{\frac{35}{3}}{\frac{5}{3}} = 7$$

As coordenadas do ponto $P\left(\frac{16}{5}; 7\right)$

No caso em que P é o ponto médio de $\overline{AB}$, $k = 1$, pois $\frac{\overline{AP}}{PB} = 1$. Então:

$$x_m = \frac{x_A + kx_B}{k + 1} = \frac{x_B + x_A}{2} \text{ e } y_m = \frac{y_A + ky_B}{k + 1} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exercícios resolvidos

1. Determinar as coordenadas de um ponto P que divide ao meio o segmento $\overline{AB}$ onde $A(2, 5)$ e $B(6, -9)$.

Resolução

$$x = \frac{x_B + x_A}{2} = \frac{6 + 2}{2} = 4 \text{ e } y = \frac{y_B + y_A}{2} = \frac{-9 + 5}{2} = -2$$

Portanto $P(4, -2)$.

2. Determinar a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo [ABC] onde $A = (7, 10)$; $B = (2, 5)$; $C = (8, 3)$.

Resolução

Se $\overline{AM}$ é mediana do triângulo [ABC], então M é o ponto médio de $\overline{BC}$.

15

Determine as coordenadas do ponto médio de [AB], em que:

a) A(3, 5) e B(3, −4)

b) A(−4, 1) e B(−4, 7)

Digitalizada com CamScanner

logo:

$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+8}{2} = 5$; $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$

M = (5,4)

mas a medida da mediana $\overline{AM}$ é a distância entre A e M; então

$d_{\overline{AM}} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(5-7)^2 + (4-10)^2} =$

$= \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

mas a medida da mediana $\overline{AM}$ é a distância entre A e M; então

$d_{\overline{AM}} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(5-7)^2 + (4-10)^2} =$

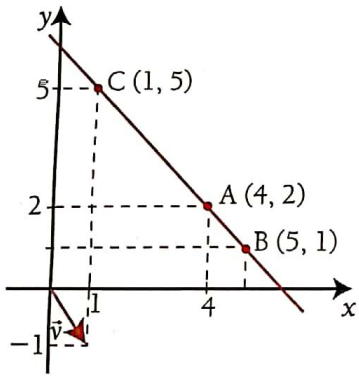
$= \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

Equação vectorial da recta no plano

Dados o ponto A(4, 2) e $\vec{v} = (1, -1)$.

Existe uma única recta r que contém o ponto A e a direcção do vector $\vec{v}$.

Os pontos $B = A + \vec{v}$ e $C = A - 3\vec{v}$ pertencem à recta. Qualquer ponto da recta r obtém-se adicionando ao ponto A um múltiplo de vector $\vec{v}$ e pode ser expresso na forma:



$$P = A + k\vec{v},\ k \in \mathbb{R}$$

A equação de recta que contém o ponto A(4, 2) e tem a direcção do vector $\vec{v} = (1, -1)$

$$(x, y) = (4, 2) + k(1, -1),\ k \in \mathbb{R}$$

Generalizando:

Dados um ponto $A(x_0, y_0)$ e um vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ não nulo, existe uma única recta r que contém o ponto A e tem a direcção de $\vec{v}$.

Então, sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da recta r, tem-se $P = A + k\vec{v}$, com $k \in \mathbb{R}$, isto é,

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(v_1, v_2),\ k \in \mathbb{R}$$

que representa a equação vectorial da recta que contém o ponto $A(x_0, y_0)$ e tem a direcção do vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(v_1, v_2),\ k \in \mathbb{R}_0^+$$

Digitalizada com CamScanner

representa a equação de semi-recta AB.

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(v_1, v_2), k \in [0, 1]$$

representa a equação do segmento de recta [AB].

Ao vector $\vec{v}$, chamamos vector director. Uma recta tem vectores directores infinitos.

Exercício resolvido

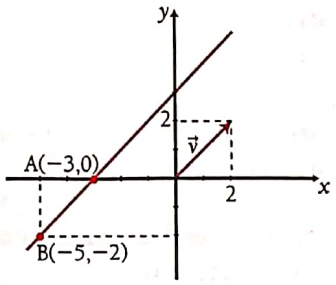
Determine a equação vectorial da recta r que contém o ponto A(2, 1) e tem a direcção do vector $v = (-1, 4)$.

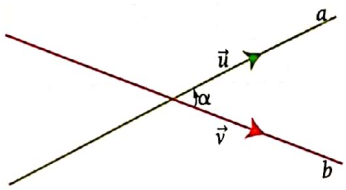
Resolução

Como sabemos, a equação vectorial de qualquer recta é-nos dada por
$(x, y) = (x_0, y_0) + k(v_1, v_2), k \in \mathbb{R}$
Então, no caso concreto temos
$(x, y) = (2, 1) + k(-1, 4), k \in \mathbb{R}$.

16

Determine as equações vectoriais das rectas que passam pelos pontos A e B e têm a direcção do vector $\vec{v}$.





Equação reduzida da recta

Num referencial ortonormado representa-se a recta s.

Relativamente aos pontos A e B verificamos que a uma variação de uma unidade na horizontal corresponde uma variação de duas unidades na vertical.

Ao quociente $\frac{1}{2}$ chama-se coeficiente angular ou declive, m, que depende do ângulo que a recta faz com o eixo OX.

- Se o declive é positivo a recta passa nos 1.º e 3.º quadrantes.
- Se o declive é negativo a recta passa nos 2.º e 4.º quadrantes.

Dada uma recta s não vertical e dois pontos distintos da referida recta $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

Chama-se declive de recta s e designa-se por m:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Mas se a recta está definida na sua forma vertical, o declive será obtido a partir do seu vector director, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ calculando o quociente entre a ordenada e a abcissa do vector director.

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

Dado um ponto $P(a_1, a_2)$ e um vector $v = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$, a recta que passa por P e tem a direcção de $\vec{v}$, tem por

- Equações paramétricas

$$\begin{cases} x = a_1 + kv_1 \\ y = a_2 + kv_2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

- Equação cartesiana ou contínua

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

- Equação geral

$$Ax + By + C = 0$$

Digitalizada com CamScanner

Se a recta s é vertical o declive m não é um número real, logo não está definido.

Partindo da equação vectorial de recta r, que passa pelo ponto $A(4, 2)$ e tem a direcção do vector $\vec{v} = (1, -1)$:

$$(x, y) = (4, 2) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$$

Iremos deduzir a equação reduzida da mesma recta. Desta equação conclui-se que:

$$\begin{cases} x = 4 + k \\ y = 2 - k, k \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = k \\ y - 2 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = k \\ \frac{y-2}{-1} = k \end{cases}$$

Como duas grandezas iguais a uma terceira são iguais entre si, eliminamos o k e escrevemos que:

$$x - 4 = \frac{y-2}{-1}$$

resolvendo em ordem a y, vem:

$$y - 2 = -x + 4 \Leftrightarrow y = -x + 6$$

A equação reduzida da recta r é:

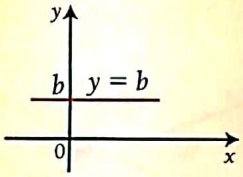
$$y = -x + 6$$

Uma equação do tipo

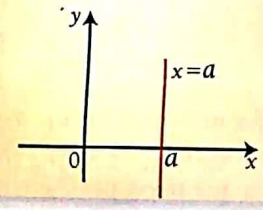
$$y = mx + b, \text{ com } m \text{ e } b \in \mathbb{R},$$

demomina-se **equação reduzida da recta**, define uma recta, em que m é o declive de e b é a ordenada na origem.

Nas **rectas horizontais** o seu declive é zero e a equação reduzida é do tipo $y = b$, já que só se verifica variação no eixo das abcissas.



Nas **rectas verticais** não faz sentido falar-se em equação reduzida, pois a variação no eixo das abcissas é zero. As equações destas rectas são do tipo $x = a$.



Exercícios resolvidos

1. Dados dois pontos $A(1, 2)$ e $B(0, 3)$ de uma recta r. Escreva a equação reduzida da recta r.

Resolução

Os pontos A e B pertencem à recta r de equação $y = mx + b$.
Então:

$$\begin{cases} 2 = m \cdot 1 + b \\ 3 = m \cdot 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = m + b \\ 3 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

A equação reduzida da recta é $y = -x + 3$

2. Escreva a equação da recta cujo declive é $\frac{1}{2}$ e cuja ordenada na origem é -3. Represente graficamente essa equação.

17

A equação $3x - 2y - 5 = 0$ representa uma recta. Qual é a sua equação reduzida?

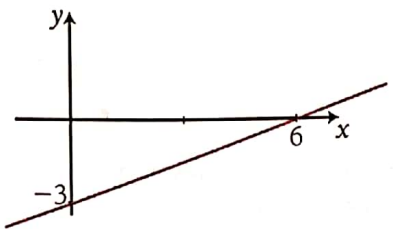
Digitalizada com CamScanner

Resolução

Como $m = \frac{1}{2}$ e $b = -3$

A equação pedida será: $y = \frac{1}{2}x - 3$

A recta intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, -3)$ e o eixo das abcissas no ponto $(6, 0)$. Basta, portanto, unir os 2 pontos para ter a representação gráfica solicitada.



x	y
0	−3
6	0

18

Determine a equação da recta que passa pelo ponto $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ e tem por declive $-\frac{1}{3}$.

Equação de uma recta dados um ponto e o declive

Dados apenas um ponto $P(x_1, y_1)$ e o declive m a equação de recta será:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Exercícios resolvidos

1. Determine a equação de recta que passa por $A(-3, 2)$ e tem declive $m = -\frac{1}{3}$.

Resolução

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 3)$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - 1 + 2$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1$

2. Determine a equação da recta que passa pelo ponto $(-2, 5)$ e tem por declive ∞.

Resolução

Será uma recta vertical e terá por equação $x = -2$.

Digitalizada com CamScanner

Equação de recta que passa por dois pontos

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, primeiro calculamos o declive, m:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e em seguinda escrevemos a equação de recta dado um ponto e o declive utilizando, por exemplo, o ponto $A(x_1, y_1)$ vem:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

19

Determine a equação da recta que passa pelos pontos A(2, 4) e B(6, 6).

20

Determine a equação da recta que passa pela origem e, por A(3, 2).

21

Dados A(3, 0) e B(9, 3), determine a equação da recta que passa pela origem e contém o ponto M que divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{1}{2}$.

22

Determine o declive da recta que passa pelos pontos (4, −2) e (0, −10).

Exercício resolvido

Dados os pontos A(2, 3) e B(−5, 1), determine a equação geral de recta AB.

Resolução

1.º Processo

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow m = \frac{1 - 3}{-5 - 2} \Leftrightarrow m = \frac{-2}{-7} \Leftrightarrow m = \frac{2}{7}$$

A equação de recta é: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Usando, por exemplo, A(2, 3), a equação da recta será:

$$y - 3 = \frac{2}{7}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{7}x - \frac{4}{7} + 3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{7}x + \frac{17}{7} \Leftrightarrow 2x - 7y + 17 = 0$$

2.º Processo

Os pontos A e B pertencem à recta AB de equação $y = mx + b$.

Então

$$\begin{cases} 3 = m \cdot 2 + b \\ 1 = m\,(-5) + b \end{cases} \Leftrightarrow \overset{(5)}{\underset{(2)}{\begin{cases} 3 = 2m + b \\ 1 = -5m + b \end{cases}}} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 = 10m + 5b \\ 2 = -10m + 2b \end{cases}$$

$$17 = 7b$$

$$b = \frac{17}{7}$$

$$2m + \frac{17}{7} = 3 \Leftrightarrow 14m + 17 = 21 \Leftrightarrow 14m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{4}{14} \Leftrightarrow m = \frac{2}{7}$$

A equação reduzida da recta é: $y = \frac{2}{7}x + \frac{17}{7}$

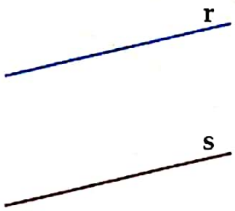
A equação geral da recta é: $2x - 7y + 17 = 0$

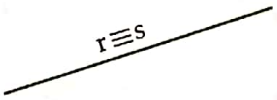
Digitalizada com CamScanner

Posição relativa de duas rectas

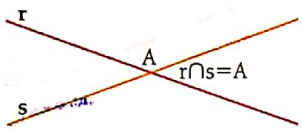
Dadas duas rectas num mesmo plano, elas podem ser paralelas ou concorrentes.

Paralelas





Concorrentes



- r e s não têm ponto comum.
- Neste caso, r e s são paralelas distintas.

- r e s têm pontos comuns infinitos.
- Neste caso, r e s são paralelas coincidentes.

- r e s têm um único ponto comum.
- Neste caso, r e s são concorrentes.

Condição de paralelismo de duas rectas

Duas rectas de declives m e m' dizem-se paralelas se têm o mesmo declive.

$$m = m'$$

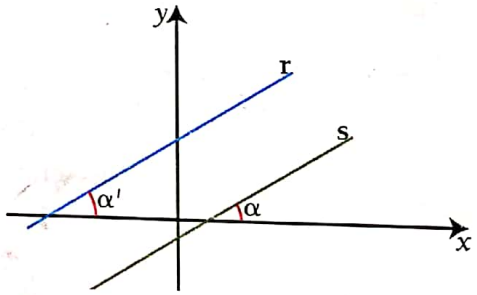
A recta de equação $y = 5x - 1$ é paralela a qualquer recta de família $y = 5x - k$, $k \in \mathbb{R}$.

Observemos a figura.

Os ângulos α e α' indicam a inclinação da recta.

Inclinação de uma recta é o ângulo positivo que a recta faz com o eixo dos xx sendo este eixo o lado origem do ângulo.

Também podemos definir o declive de uma recta como a tangente trigonométrica da inclinação da recta. Logo,



Se r // s, então $\alpha \cong \alpha'$ e $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha'$ ou $m = m'$ que é a condição de paralelismo de duas rectas.

Exercício resolvido

Verifique se as rectas são paralelas:
r: $y = -2x + 5$ e s: $y = -2x + 15$

Resolução

r: $y = -2x + 5 \Rightarrow m = -2$

s: $y = -2x + 15 \Rightarrow m' = -2$

como $m = m'$, r//s.

23

Verifique em cada um dos casos seguintes se as rectas são concorrentes, paralelas ou coincidentes.

a) $3x - 5y + 1 = 0$
e $2x - 5y - 3 = 0$

b) $6x - 4y + 1 = 0$
e $9x - 6y + 7 = 0$

c) $3y + 4 = 0$ e $2y - 7 = 0$

24

Determine h de modo que as rectas
$(3h + 2)x + 5y + 1 = 0$ e
$x + 4y - 2h + 1 = 0$
sejam:

a) Paralelas.

b) Concorrentes.

25

Determine k na equação:
$3x - (2k + 1)y + 2k = 0$ de modo que a recta representada:

a) Seja paralela a $x - 4y = 0$

b) Passe por $(2, 0)$.

26

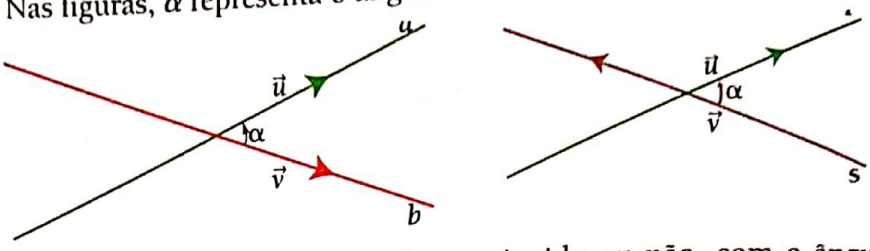
Determine para que valores reais de a, as rectas
r: $ax + 2y + 1 = 0$ e
s: $8x + ay + 3 = 0$ são paralelas. Suponha $a \neq 0$.

Digitalizada com CamScanner

Ângulo entre duas rectas

Dadas duas rectas r e s concorrentes e não perpendiculares, chama-se **ângulo de duas rectas** à menor das medidas dos ângulos em que as rectas dividem o plano.

Nas figuras, α representa o ângulo entre as rectas a e b.



O ângulo de duas rectas no plano coincide ou não, com o ângulo dos dois vectores directores de cada uma delas.

Considerando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ os vectores directores das rectas a e b, respectivamente, o co-seno do ângulo de duas rectas é igual ao valor absoluto do co-seno do ângulo dos dois vectores.

$$\cos \alpha = |\cos \vec{u}\hat{}\vec{v}|$$

já que $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$.

Mas, já sabemos que $\cos(\vec{u}\hat{}\vec{v}) = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$, então

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \text{ e } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}\right)$$

Considerando $\vec{u} = (u_1, u_1)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, em termos de coordenadas será:

$$\cos \alpha = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \text{ e } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}\right)$$

27

Calcule o ângulo entre as rectas $2x - 5y = 3$ e $x + 3y = 0$.

Condição de perpendicularidade

Sejam r e s duas rectas de declives m e m', não nulos, $\vec{r} = (1, m)$ e $\vec{s} = (1, m')$ seus vectores directores.

As rectas r e s são perpendiculares se e só se os vectores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ forem perpendiculares, ou seja, se $1 \cdot 1 + m \cdot m' = 0 \Leftrightarrow m \cdot m' = -1 \Leftrightarrow m' = -\dfrac{1}{m}$

Resumindo:

Se duas rectas são perpendiculares, o declive de uma recta é simétrico do declive da outra:

$$m' = -\frac{1}{m}, \text{ com } m \neq 0$$

Digitalizada com CamScanner

Exercício resolvido

Verifique que as equações $y = -3x + 5$ e $y = \frac{1}{3}x - 7$ representam rectas perpendiculares.

Resolução

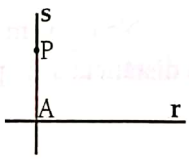
A primeira equação tem declive $m = -3$ e a segunda $m' = \frac{1}{3}$. Tem-se como condição de perpendicularidade que $m' = -\frac{1}{m}$.

Neste caso, $m' = \frac{1}{3} = -\frac{1}{m}$, portanto as rectas são perpendiculares.

Distância de um ponto a uma recta no plano

Dados uma recta r e um ponto P não pertencente a r, chama-se **distância** de P a r ao comprimento de $\overline{PA}$, onde A é o ponto de intersecção da recta s com a recta que contém P e é perpendicular a s.

Seja d a distância de P a s, então $d = \overline{PA}$. Podemos determiná-la por vários processos.



Exercício resolvido

Determine a distância do ponto P(3, −1) à recta $2x - y - 4 = 0$

Resolução

Comecemos por escrever a equação da recta que contém P e é perpendicular à recta dada.

$m = -\frac{1}{2}$ e $P(3, -1)$.

Sabemos que $y - y_1 = m(x - x_1)$. Assim,

$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - 1$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Logo a recta é $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

28

Determinar k de modo que as rectas $2x - 5y = 3$ e $kx + 3y = 0$ sejam perpendiculares.

29

Para cada um dos pares de rectas determine se as rectas são concorrentes ou paralelas:

a) r: $-3x + y - 1 = 0$ e
s: $-2x + 3y - 5 = 0$

b) r: $2x + y - 6 = 0$ e
s: $-4x - 2y + 12 = 0$

30

Determine a equação da recta r que passa pelo ponto $A(1, 3)$ e é perpendicular à recta s de equação $2x - y + 3 = 0$.

31

Deduza em cada um dos seguintes casos, uma equação da recta que passa pelo ponto dado e é perpendicular à recta dada:

a) $(-2; 5)$; $3x - 4y = 24$

b) $(-3, -1)$; $2x + y = 12$

32

Os vértices de um triângulo são (2, 3), (0, − 1) e (5, 7). Verifique que as rectas que passam pelos vértices e são perpendiculares aos lados opostos se encontram num ponto (ortocentro do triângulo).

33

Dois vértices opostos de um quadrado são (− 4, 6) e (8, 1). Determine os outros vértices.

Digitalizada com CamScanner

34

Dada a recta $3x - 4y + + 11 = 0$, calcule a distância de $P(5, 4)$ a essa recta.

De seguida determinamos as coordenadas do ponto A.

$$\begin{cases} y = -x + \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ -x + 1 = 4x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ -5x = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \\ x = \frac{9}{5} \end{cases} \quad A\left(\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

35

Calcule a distância do ponto dado à recta dada nos seguintes casos:

a) $(-2, 5)$; $3x - 4y = 24$

b) $(5, 10)$; $x + 3y = 15$

Determinemos agora a distância de P a A. Sabemos que a distância de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ é dada pela fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Temos:

$$\overline{PA} = \sqrt{\left(\frac{9}{5} - 3\right)^2 + \left(-\frac{2}{5} + 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-6}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{45}}{5}$$

No caso em que as rectas são dadas pela equação geral $Ax + By + C = 0$, a distância d do ponto $P(x_0, y_0)$ pode ser determinada usando a fórmula

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

36

Determine a distância da recta r de equação:

$8x - 6y + 5 = 0$ ao ponto onde s da equação

$y = -3x + 5$ intersecta o eixo das ordenadas.

ou a distância do ponto (x_0, y_0) à recta $y = mx + b$ é

$$d = \frac{|y_0 - mx_0 - b|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

37

Calcule a distância do ponto dado à recta nos seguintes casos:

a) $(-2, 5)$; $3x - 4y = 24$

b) $(5, 10)$; $x + 3y = 15$

Exercícios resolvidos

1. Determine a distância do ponto $P(3, -4)$ à recta $2x + y + 3 = 0$.

Resolução

Temos $A = 2$; $B = 1$; $C = 3$; $x_0 = 3$ e $y_0 = -4$.

Então $d = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

2. Determine a distância do ponto $C(1, -2)$ à recta AB, sendo $A(2, 1)$ e $B(1, 3)$.

Resolução

Temos começar por determinar a equação geral da recta AB.

Digitalizada com CamScanner

$A(2, 1)$ e $B(1, 3)$

$m_{AB} = \frac{3-1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$, então:

$y - 1 = -2(x - 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -2x + 4 + 1 \Leftrightarrow y + 2x - 5 = 0$

A fórmula a utilizar será:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Como $C(1, -2)$

$$d = \frac{|2(1) + 1(-2) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Logo: $d = \sqrt{5}$

38

Determine as equações das bissectrizes dos ângulos formados pelas rectas dadas nos seguintes casos:

a) $3x + 4y = 5$
$12x - 5y = 41$

b) $4x + 3y = 0$
$y = 0$

$|x| = |y| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = y \vee x = -y$

Equação da bissectriz

A determinação da equação da bissectriz de um ângulo pode ser feita tendo em conta que um ponto qualquer P da bissectriz encontra-se à mesma distância das rectas que contêm os lados do ângulo.

Exercício resolvido

Determine as equações das bissectrizes dos ângulos formados pelas rectas:
r: $3x - 4y + 2 = 0$ e s: $8x + 6y - 4 = 0$

Resolução

Se $P(x, y)$ é um ponto da bissectriz, tem-se $d(P, r) = d(P, s)$

$$\frac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|8x + 6y - 4|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 2|}{5} = \frac{|8x + 6y - 4|}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x - 4y + 2}{5} = \frac{8x + 6y - 4}{10} \vee \frac{3x - 4y + 2}{5} = \frac{-8x - 6y + 4}{10}$$

$\Leftrightarrow 6x - 8y + 4 = 8x + 6y - 4 \vee 6x - 8y + 4 = -8x - 6y + 4$

$\Leftrightarrow 2x + 14y - 8 = 0 \vee 14x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x + 7y - 4 = 0 \vee 7x - y = 0$ $\quad \frac{3x - 4y + 2}{5}$

As equações serão $x + 7y - 4 = 0$ e $7x - y = 0$

39

a) Determine o ponto A de intersecção das rectas
r: $x - y + 1 = 0$ e
s: $2x - y + 3 = 0$

b) Sendo t a recta de equação $5x - y + 9 = 0$, prove que r, s e t concorrem num mesmo ponto.

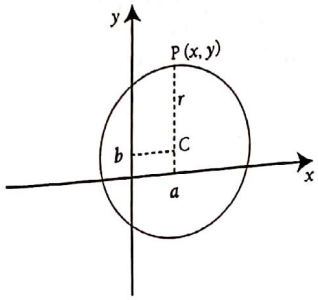
40

Determine a equação da recta r que passa pelo ponto $A(1, 2)$ e forma um ângulo de 45° com a recta
$2x - y + 3 = 0$

Digitalizada com CamScanner

Circunferência

A **circunferência** é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano, que estão localizados a uma mesma distância r (raio) de um ponto fixo, denominado o centro de circunferência.



Equação da circunferência

Seja C o ponto de coordenadas (a, b) e P $\smile$ (x, y) um ponto qualquer de circunferência de raio r e centro C. A distância de C a P é igual a r:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2=r}$$

ou seja;

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

que representa a **equação reduzida de circuferência de** C $\smile$ (a, b) e raio r.

Caso a circunferência tenha o **centro na origem** do referencial a equação será:

$$x^2+y^2=r^2$$

Exercícios resolvidos

1. Escreva uma equação da circunferência:
   a) De centro na origem do referencial e raio 3 m.
   b) De diâmetro [AB], sendo A $\smile$ $(4, -1)$ e B$(-2, 1)$.

Resolução

a) Se o centro é o ponto C$(0, 0)$ e o raio é $r = 3$ a equação será:

$$x^2+y^2=9$$

b) O centro de circunferência é o ponto médio do segmento [AB]:

$$C \smile \left(\frac{4-2}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) \text{ ou seja,}$$

$$C \smile (1, 0)$$

O raio é a distância do ponto C ao ponto B, por exemplo:

$$r = \overline{CB} = \sqrt{(-2-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{10}$$

Uma equação da circunferência pedida é, então:

$$(x-1)^2+y^2=10$$

41 Escreva uma equação de circunferência:

a) De centro $(0, 2)$ e raio 4.

b) De centro $(-2, 2)$ e raio $\sqrt{5}$.

c) De centro $(5, -3)$ e que passa pela origem do referencial.

d) De diâmetro [AB]. Sendo A $\smile$ $(1, 5)$ e B $\smile$ $(-3, -1)$.

e) De centro $(-2, 5)$ e que passa pelo ponto $(4, 1)$.

Digitalizada com CamScanner

2. Indique o centro e o raio de circunferência de equação:
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

Resolução

$C \equiv (2, -3)$ e $r = \sqrt{9} = 3$

Equação geral da circunferência

Transformando sucessivamente a equação:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 6^2 + \ldots + y^2 - 2y + \ldots = 15 + \ldots \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - y^2 - 2y + 1 = 15 + 9 + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 15$$

Obtém-se a circunferência de centro $(-3, 1)$ e raio 5.

Considerando a equação geral de uma circunferência:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (1)$$

Desenvolvendo teremos:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + ax + \ldots + y^2 + by + \ldots = -c + \ldots \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + ax + \left(\frac{a}{4}\right)^2 + y^2 + by + \left(\frac{b}{4}\right)^2 = -c + \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

O centro de circunferência é $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e o raio é:

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

Como é do nosso conhecimento se:

- $a^2 + b^2 - 4c > 0$, condição (1) representa uma circunferência.
- $a^2 + b^2 - 4c = 0$, condição (1) representa uma ponto.
- $a^2 + b^2 - 4c < 0$, condição (1) representa uma conjunto vazio.

Exercícios resolvidos

1. Caracterize o conjunto definido por:
   a) $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0$
   b) $2x^2 + 2y^2 + 3x - 2y + 2 = 0$
   c) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$

42

Indique o centro e o maio de cada uma das circunferências seguintes:

a) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$

c) $x^2 + (y - 6)^2 = 4$

d) $x^2 + y^2 = 7$

43

Identifique o conjunto definido por:

a) $x^2 + y^2 + 3x - 2y = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y + 20 = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 + x = 0$

d) $x^2 + y^2 + 7x + 15 = 0$

Digitalizada com CamScanner

Resolução

a) $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 5 + 4 + 16$
$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$
A equação representa uma circunferência de centro $(-2, -4)$ e raio 5.

c.a.
$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$
$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$

b) $2x^2 + 2y^2 + 3x - 2y + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - y + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + y^2 - y + \frac{1}{4} = -1 + \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-16 + 9 + 4}{16}$
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{16}$

c.a.
$\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

A equação representa um conjunto vazio, pois a soma de dois números não negativos nunca é igual a um negativo.

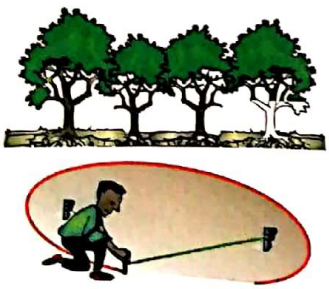
c) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = -25 + 9 + 16$
$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 0$
A equação só tem uma solução:
$x = 3 \wedge y = -4$.

c.a.
$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$
$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$

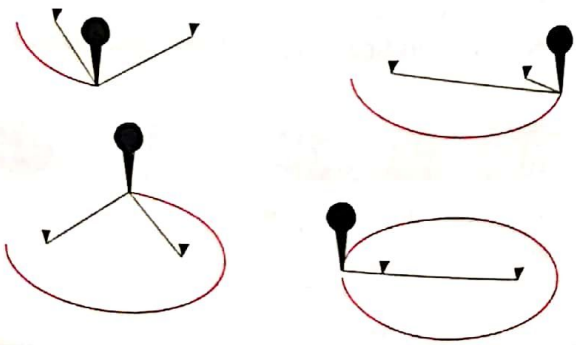
Logo, representa um ponto, cujas coordenadas são $(3, -4)$.

Elipse

A elipse é muitas vezes traçada pelos jardineiros quando se pretende construir um canteiro de flores. O procedimento é prático e simples: arranja-se um fio e atam-se as pontas a duas estacas. Espetam-se estas duas estacas no chão de modo a que a distância entre elas seja menor do que metade do comprimento do fio. Com um pau, e mantendo o fio esticado, desenha-se uma linha no chão sendo a linha obtida designada elipse.



Construção de um canteiro elíptico pelo método do jardineiro.



Chama-se **elipse** ao conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante $(2a)$ e maior do que a distância entre eles.

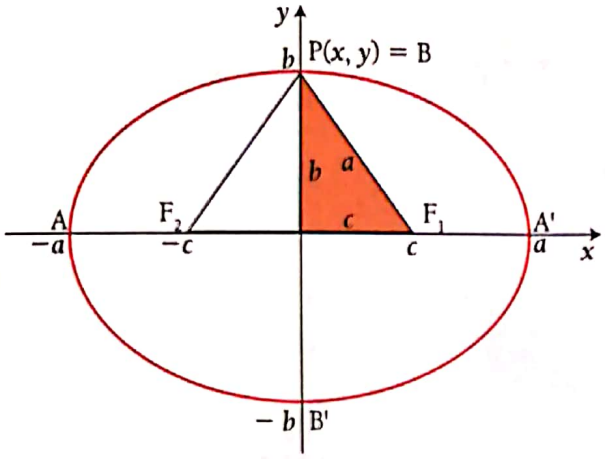
Digitalizada com CamScanner

Os pontos fixos são designados focos da elipse e a distância entre os focos chama-se distância focal ($2c$).

Equação de elipse

Designemos por F_1 e F_2 os focos. A propriedade que caracteriza todos os pontos P da elipse é expressa pela seguinte igualdade: $d_1 + d_2 = 2a$, sendo d_1 e d_2 as distâncias de P a F_1 e F_2, respectivamente.

Os focos da elipse têm por coordenadas $F_1(c, 0)$ $F_2(-c, 0)$.



De acordo com a propriedade que caracteriza todo o ponto P da elipse, temos:

$$\overline{PF_2} + \overline{PF_1} = 2a$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando sucessivamente ao quadrado até eliminar o radical vem:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2) \quad (1)$$

Como $a > c$ então $a^2 = b^2 + c^2$.

Da figura retiramos que $b^2 = a^2 - c^2$ e então (1)

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

Dividindo por $a^2 b^2$, vem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ se } a > b$$

Esta última equação representa a equação da elipse.

A elipse representada pela última equação tem por eixos de simetria os eixos coordenados, e por centro de simetria a origem das coordenadas.

Elementos principais de elipse:

- Focos: $(\pm c, 0)$
- Eixo maior: $2a$
- Vértices: $(\pm a, 0)$; $(0, \pm b)$
- Eixo maior: $2b$

Digitalizada com CamScanner

Dizem-se **vértices da elipse** os pontos $A(a, 0)$; $A'(-a, 0)$; $B(0, b)$ e $B'(0, b)$, pontos de intercepção com os seus eixos.

Se $a > b$ o segmento $\overline{AA'}$ é designado eixo maior da elipse e o segmento $\overline{BB'}$ chama-se eixo menor.

$2a$ e $2b$ dizem-se respectivamente o **eixo maior** e o **eixo menor**. Por sua vez $2c$ diz-se **distância focal** da elipse.

A razão $\frac{c}{a}$ é designada **excentricidade** da elipse e geralmente representa-se pela letra e. Então:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \text{se} \quad a > b$$

44

Dada a equação:

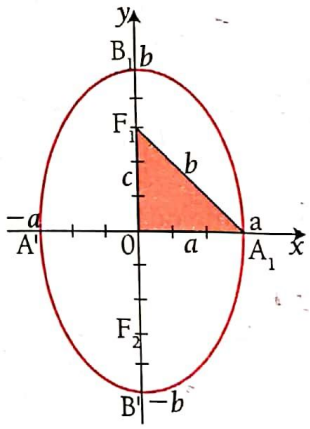
$$9x^2 + 10y^2 = 90$$

a) Escreva a equação reduzida de elipse que a equação representa.

b) Indique as coordenadas dos focos, dos vértices e a excentricidade.

c) Represente geometricamente a elipse.

Para o caso de $a < b$, vem:



$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a < b$$

Neste caso a representa o **semi-eixo menor** e b representa o **semi-eixo maior**.

45

Dada a equação:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

a) Indique as coordenadas dos focos, dos vértices e a excentricidade.

b) Represente geometricamente a elipse.

Elementos principais

- Focos: $(0, \pm c)$
- Vértices: $(\pm a, 0)$; $(0, \pm b)$
- Eixo maior: $2b$
- ixo menor: $2a$
- Distância focal: $2c$
- Excentricidade: $e = \frac{c}{b}$

Como $c < a$, tem-se que $e < 1$. Em particular tem-se $e = 0$, quando $c = 0$ e $a = b$ e a equação será uma circunferência.

Digitalizada com CamScanner

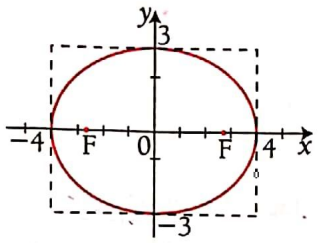
Exercícios resolvidos

1. Dada a função: $\frac{x}{16} + \frac{y'}{9} = 1$

Desenhar a elipse que ela representa e indicar focos e vértices.

Resolução

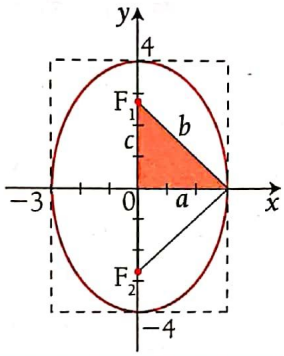
$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$
$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$
$c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow a = \sqrt{7}$
Focos $(\pm\sqrt{7}, 0)$
Vértices $(\pm 4, 0); (0, \pm 3)$



2. Desenhar a elipse de equação: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ e indicar os focos e os vértices.

Resolução

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$
$b^2 = 16 \rightarrow b = 4$
$c = \sqrt{b^2 - a^2} \rightarrow c = \sqrt{7}$
Focos $(0, \pm\sqrt{7})$
Vértices $(\pm 3, 0); (0, \pm 4)$



Se a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ for deslocada segundo uma translação associada ao vector $\vec{v} = (x_1, y_1)$, então a equação de elipse transformada será:

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{a^2} = 1$$

46

Os focos de uma elipse pertencem à recta de equação

$$y + 1 = 0,$$

tendo um deles abcissa 9. Uma das extremidades do eixo menor é o ponto $(2, -3)$.

Escreva uma equação de elipse.

Exercício resolvido

Desenhar a elipse de equação $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ e indicar os focos e os vértices.

Digitalizada com CamScanner

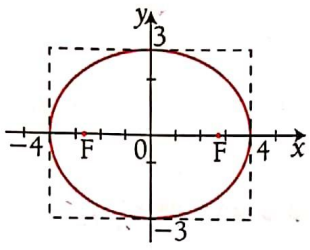
Exercícios resolvidos

1. Dada a função: $\frac{x}{16} + \frac{y'}{9} = 1$

Desenhar a elipse que ela representa e indicar focos e vértices.

Resolução

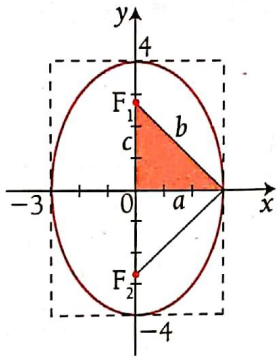
$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$
$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$
$c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow a = \sqrt{7}$
Focos $(\pm\sqrt{7}, 0)$
Vértices $(\pm 4, 0); (0, \pm 3)$



2. Desenhar a elipse de equação: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ e indicar os focos e os vértices.

Resolução

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$
$b^2 = 16 \rightarrow b = 4$
$c = \sqrt{b^2 - a^2} \rightarrow c = \sqrt{7}$
Focos $(0, \pm\sqrt{7})$
Vértices $(\pm 3, 0); (0, \pm 4)$



Se a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ for deslocada segundo uma translação associada ao vector $\vec{v} = (x_1, y_1)$, então a equação de elipse transformada será:

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{a^2} = 1$$

46

Os focos de uma elipse pertencem à recta de equação

$$y + 1 = 0,$$

tendo um deles abcissa 9. Uma das extremidades do eixo menor é o ponto $(2, -3)$.

Escreva uma equação de elipse.

Exercício resolvido

Desenhar a elipse de equação $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ e indicar os focos e os vértices.

Digitalizada com CamScanner

Resolução

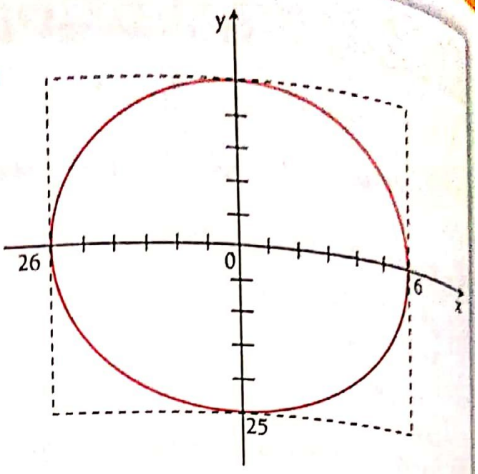
Primeiro escrevemos a equação de elipse centrada na origem:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$a^2 = 25$
$b^2 = 36$
$c^2 = \sqrt{11}$

- Focos $(\pm\sqrt{11}, 0)$
- Vértices $(\pm 6, 0)$; $(0, \pm 5)$

Em seguida, adicionamos as coordenadas do vector $\vec{v} = (2, -1)$ às coordenadas dos focos e dos vértices.



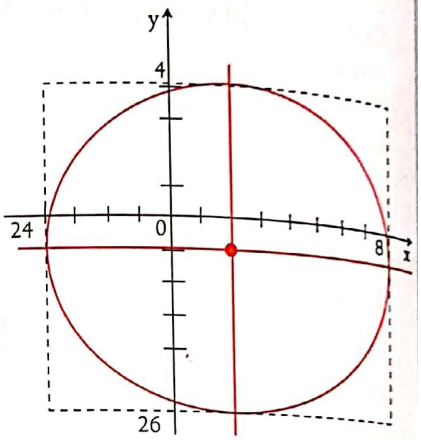
$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

Focos:

$(+\sqrt{11}, 0) + (2, -1) = (\sqrt{11} + 2, -1)$
$(-\sqrt{11}, 0) + (2, -1) = (-\sqrt{11} + 2, -1)$

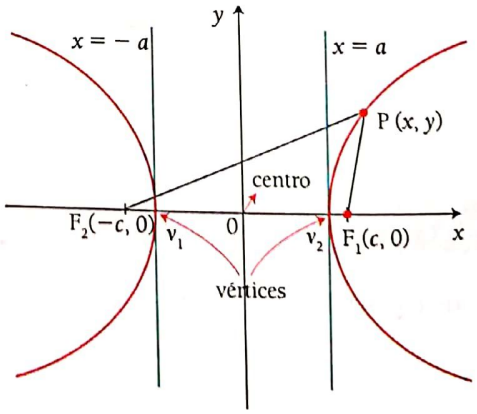
Vértices:

$(+6, 0) + (2, -1) = (8, -1)$
$(-6, 0) + (2, -1) = (-4, -1)$
$(0, +5) + (2, -1) = (2, 4)$
$(0, -5) + (2, -1) = (2, 4)$



Hipérbole

Hipérbole é o lugar geométrico de pontos de um plano tais que o módulo da diferença das distâncias P a dois pontos fixos é constante e menor que a distância entre eles.



Os pontos fixos F_1 e F_2 são os **focos da hipérbole**.
O eixo que passa por esses pontos chama-se **eixo transverso**.

Digitalizada com CamScanner

Equação de hipérbole

Com centro na origem e focos no eixo dos *xx*

Designemos por $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ os focos e por $2a$ o comprimento dado, que supomos positivo e menor que a distância entre F_1 e F_2. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole. Temos:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando sucessivamente ambos membros ao quadrado, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xc - a^2 = \pm a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2c^2 - 2a^2c^2x + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Pela definição, como

$$2c > 2a \Leftrightarrow c > a \text{ e } c^2 - a^2 > 0$$

Então fazendo $b^2 = c^2 - a^2$, vem:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2 \cdot b^2$$

e dividindo os dois membros por $a^2 b^2$, vem a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta é a equação reduzida de hipérbole.

A razão $\frac{c}{a}$ chama-se excentricidade da hipérbole e representa-se por e.

$$e = \frac{c}{a}$$

Focos: $(\pm c, 0)$

Vértices: $(\pm a, 0)$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$

$e > 1$

Tendo em conta que $0 < a < c$, a excentricidade da hipérbole é sempre um número positivo e maior que 1. Os pontos em que a hipérbole intersecta o eixo dos x, $A(a, 0)$ e $A'(-a, 0)$ chamam-se vértices da hipérbole.

A hipérbole tem duas assimptotas:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

Digitalizada com CamScanner

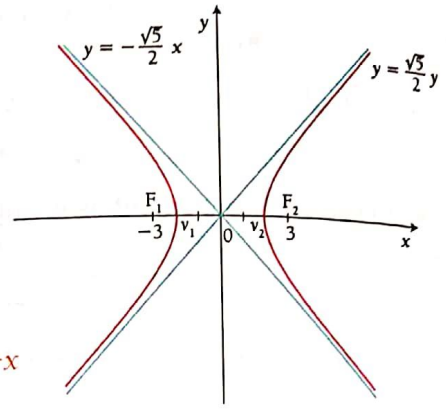
Exercício resolvido

Seja a equação da hipérbole: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Representar graficamente a hipérbole e indicar os focos, os vértices e as assimptotas.

Resolução

$a^2 = 4$
$b^2 = 3$
$c = \sqrt{4 + 5} = 3$
Focos: $(\pm 3, 0)$
Vértices: $(\pm 2, 0)$
Centro: $(0, 0)$
Assimptotas $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$



47

Determine uma equação de uma hipérbole sabendo que contém o ponto $P_{(6, 4)}$ e que os vértices distam 8 unidades.

Com centro na origem e focos no eixo dos yy

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Focos: $(0, \pm c)$
Vértices: $(0, \pm b)$
Assímptotas: $y = \pm \frac{b}{a}$

48

Determine a equação reduzida de uma hipérbole, sabendo que a sua distância focal é 8 e a sua excentricidade é 3.

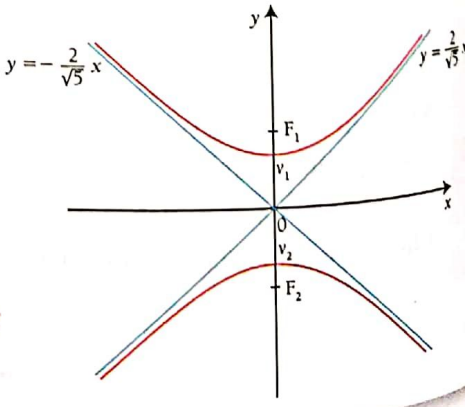
Exercício resolvido

Seja a equação da hipérbole: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$.

Representar graficamente a hipérbole e indicar os focos, os vértices e as assímptotas.

Resolução

$b^2 = 4$
$a^2 = 5$
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$
Focos: $(0, \pm 3)$
Vértices: $(0, \pm 2)$
Assímptotas: $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$

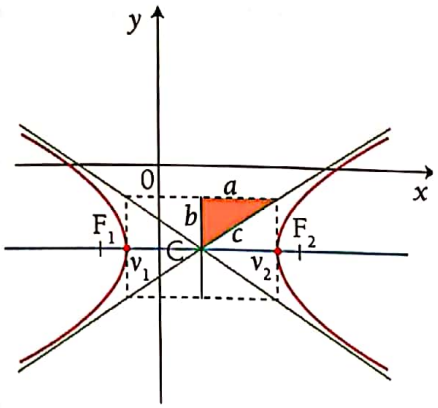


49

Determine o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias aos pontos $F_{(2, 0)}$ e $F_{(-2, 0)}$ é 2.

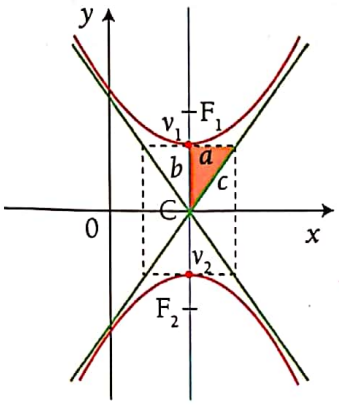
Digitalizada com CamScanner

Para cada uma das hipérboles consideradas, podemos ainda fazer uma translação a um vector $\vec{u} = (x_1, y_1)$



$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} - \frac{(y - y_1)^2}{b^2} = 1$$



$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2b$$

$$\frac{(y - y_1)^2}{b^2} - \frac{(x - x_1)^2}{a^2} = 1$$

Centro: $C(x_1 \cdot y_1)$

$\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2$

- Focos: $(x_1 - c; y_1)$ e $(x_1 + c; y_1)$ $\qquad (x_1; y_1 - c)$ e $(x_1; y_1 + c)$
- Vértices: $(x_1 - a; y_1)$ e $(x_1 + a; y_1)$ $\qquad (x_1; y_1 - b)$ e $(x_1; y_1 + b)$
- Assímptotas: $y - y_1 = \pm \frac{b}{a}(x - x_1)$

As curvas definidas por uma equação do 2.º grau em x e y:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

chamam-se cónicas que se classificam em três grandes grupos:

- Elipses: se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$
- Parábolas: se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
- Hipérboles: se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

As equações do tipo,

$$ax^2 + cy^2 + dy + ey + f = 0 \qquad (b = 0)$$

definem cónicas com os eixos de simetria paralelos aos eixos das coordenadas.

50

Escreva a equação reduzida de cada uma das seguintes cónicas.

a) $9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 199 = 0$

b) $x^2 - 2y^2 + 4y^2 - 8y + 1 = 0$

Digitalizada com CamScanner

Exercício resolvido

Considere a equação de hipérbole: $9x^2 - 16x^2 + 18x - 96y - 279 = 0$ e indique todos os seus elementos.

Resolução

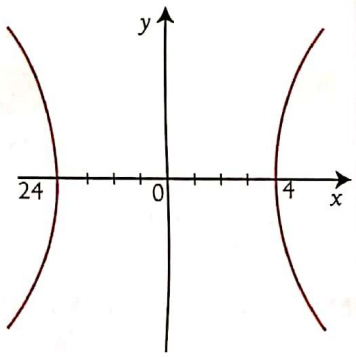
$9x^2 - 16x^2 + 18x - 96y - 279 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9(x^2 - 2x + 1) - 9 - 16(y^2 + 6y + 9) + 144 - 279 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9(x + 1)^2 - 16(y + 3)^2 = 144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(x + 1)^2}{16} - \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$

O gráfico da hipérbole pode ser obtido da hipérbole

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

por uma translação associada ao vector: $\vec{v} = (-1, -3)$



Para a hipérbole

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,

Vem:

Centro: $(0, 0)$

$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$

$c^2 = 16 + 9 \rightarrow c = 5$

Focos: $(\pm 5, 0)$

Vértices: $(\pm 4, 0)$

Excentricidade: $e = \frac{5}{4}$

Assímptotas: $y = \pm \frac{3}{4}x$

Para a hipérbole

$\frac{(x + 1)^2}{16} - \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$,

Vem:

Centro: $(-1, -3)$

$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$

$c^2 = 25 \rightarrow c = 5$

Focos:

$(5, 0) + (-1, -3) = (4, -3)$
$(-5, 0) + (-1, -3) = (-6, -3)$

Vértices:

$(4, 0) + (-1, -3) = (3, -3)$
$(-4, 0) + (-1, -3) = (-5, -3)$

Excentricidade: $e = \frac{5}{4}$

Assímptotas: $y = \pm \frac{3}{4}(x + 1)$

Digitalizada com CamScanner

Exercícios resolvidos

1. Averigue se os seguintes pares de vectores são colineares.

a) $\vec{a} = (2, -4)$ e $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ b) $\vec{c} = (1, 6)$ e $\vec{d} = (-3, 4)$

Resolução

a) O vector $\vec{a}$ é colinear com $\vec{b}$ se existir um número real $k \neq 0$, tal que $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, ou seja:

$\frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{-4}{-1} = 4$ ou $2 \cdot (-1) = \frac{1}{2} \cdot (-4)$ logo, os vectores são colineares.

b) Neste caso, temos que $\frac{1}{-3} = \frac{6}{4}$ o que é falso, logo, os vectores dados não são colineares. Não existe nenhum número real $k \neq 0$, tal que, $\vec{c} = k \cdot \vec{d}$. É de notar que este processo não pode ser utilizado se ambos os vectores tiverem alguma coordenada nula.

2. Considere os seguintes vectores: $\vec{u} = 3\vec{i} + 4j$, $\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{k} = \frac{\vec{i}}{2} + 3\vec{j}$. Calcule:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{k}$

Resolução

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (-2\vec{i} + 3\vec{j}) = 3\vec{i} \cdot (-2\vec{i} + 3\vec{j}) + 4\vec{j}(-2\vec{i} + 3\vec{j}) =$

$= 3\vec{i} \cdot (-2\vec{i}) + 3\vec{i} \cdot 3\vec{j} + 4\vec{j} \cdot (-2\vec{i}) + 4\vec{j} \cdot 3\vec{j} =$

$= -6\|\vec{i}\|^2 + 0 - 0 + 12\|\vec{i}\|^2 = -6 + 12 = 6$

b) $\vec{u} \cdot \vec{k} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot \left(\frac{\vec{i}}{2} + 3\vec{j}\right) = 3\vec{i} \cdot \left(\frac{\vec{i}}{2} + 3\vec{j}\right) + 4j\left(\frac{\vec{i}}{2} + 3\vec{j}\right) =$

$= \frac{3}{2}\|\vec{i}\|^2 + 9(\vec{i} \cdot \vec{j}) + \frac{4}{2}(\vec{j} \cdot \vec{i}) + 12\|\vec{j}\|^2 =$

$= \frac{3}{2}\|\vec{i}\|^2 + 0 + 0 + 12\|\vec{j}\|^2 = \frac{3}{2} + 12$

3. Determine a equação reduzida da recta que passa pelos pontos $(2, -1)$ e $(-3, 5)$.

Resolução

Temos, neste caso, $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, $x_2 = -3$, $y_2 = 5$. Aplicando a fórmula $y - y_1 = m\,(x - x_1)$, onde $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, obtemos:

$y + 1 = \frac{5+1}{-3-2}(x - 2) \Leftrightarrow y = -1 - \frac{6}{5}x + \frac{12}{5} \Leftrightarrow y = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}$

Assim, a equação solicitada é $y = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}$

Digitalizada com CamScanner

4. Determine um vector que seja perpendicular a $\vec{a} = (6, 1)$ e outro $\vec{b} = (5, 2)$

Resolução

$$\begin{cases} (x, y) \cdot (6, 1) = 0 \\ (x, y) \cdot (5, 2) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 6x + y = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases} = \begin{cases} y = -6x \\ y = -\frac{5}{2}x \end{cases}$$

O conjunto dos vectores da família $(x, -6x)$ é perpendicular ao vector $\vec{a} = (6, 1)$.

Por exemplo, para $x = 1$

$(1, -6) \cdot (6, 1) = 6 - 6 = 0$

E o conjunto dos vectores da família $\left(x, -\frac{5}{2}x\right)$ é perpendicular ao vector $(5, 2)$

Por exemplo, para $x = 1$

$(2, -5)(5, 2) = 10 - 10 = 0$

5. Determine uma equação da recta que passa pelo ponto $(3, -2)$ e é paralela à recta $2x - 3y + 6 = 0$.

Resolução

Usando a equação $y = mx + b$, a recta solicitada terá um declive $m = \frac{2}{3}$; logo, para determinar b:

$-2 = \frac{2}{3} \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -4$

Então: $y = mx + b \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 4$ ou $2x - 3y - 12 = 0$.

6. Considere a recta de equação $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

a) Escreva a equação da família das rectas que são perpendiculares à recta dada.

b) Escreva uma equação da recta que é perpendicular à recta dada e contém o ponto $A(-2, 1)$.

Resolução

a) As rectas que têm declive 3 são perpendiculares à recta dada. A equação da família das rectas pedidas é, pois, $y = 3x + a$.

b) A recta pedida é perpendicular à recta dada, portanto é da família de $y = 3x + a$.

Como contém o ponto $A(-2, 1)$ e temos:

substituindo o ponto A na equação $y = 3x + a$

$1 - 3(-2) = a \Leftrightarrow 1 - (-6) = a \Leftrightarrow a = 7$

A recta pedida é $y = 3x + 7$.

Digitalizada com CamScanner

7. Considere os pontos de coordenadas $A(6, 3)$ e $B(-1, 2)$.
Determine as coordenadas de um vector v de modo que seja colinear com $\vec{AB}$ e tenha norma 10.

Resolução

Vamos calcular inicialmente o vector $\vec{AB}$:

$\vec{AB} = B - A = (-1, 2) - (6, 3) = (-7, -1)$

Para o vector $\vec{v}$ ser colinear com o vector $\vec{AB}$ tem de satisfazer a seguinte condição:

$\vec{v} = k\,\vec{AB}$ ou seja $\vec{v} = k(-7, -1) \Leftrightarrow \vec{v} = (-7k, -k)$

Por outro lodo, a norma do vector $\vec{v}$ é igual a 10, logo:

$\|\vec{v}\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(-7k)^2 + (-k)^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{49k^2 + k^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{50k^2} = 10 \Rightarrow (\sqrt{50k^2})^2 = 10^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 50k^2 = 100 \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{2}$.

O vector $\vec{v}$ pode ter de coordenadas:

$\vec{v} = (-7\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ se $k = \sqrt{2}$ ou $\vec{v} = (7\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se $k = -\sqrt{2}$

O vector $\vec{v} = (-7\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ além de ter a mesma direcção também tem o mesmo sentido que $\vec{AB}$ por que $k > 0$.

O vector $\vec{v} = (7\sqrt{2}, \sqrt{2})$ tem a mesma direcção mas sentido contrário ao $\vec{AB}$ porque $k < 0$.

8. Determine a inclinação da recta r de equação $3x + 2y = 1$, em graus, com erro inferior a 1'.

Resolução

Para evidenciarmos o valor de declive da recta vamos escrevê-la na forma reduzida:

$3x + 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = -3x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

O declive da recta é $m = -\frac{3}{2}$ e, como o declive é negativo, a inclinação α é um ângulo entre 90° e 180°

Recorrendo à calculadora, obtemos:

$\text{tg}^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -56{,}31°$ e $\alpha \approx -56{,}31° + 180° \Leftrightarrow \alpha \approx 123{,}69° \Leftrightarrow \alpha \approx 123°\,41'$

9. Determine o centro e o raio da circunferência de equação: $x^2 + y^2 - 6x^2 - 12y + 2 = 0$

Resolução

$x^2 + y^2 - 6x^2 - 12y + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = -2 + 9 + 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 43$

A equação de circunferência de centro (3, 2) e raio $\sqrt{43}$

c.a.

$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$

$\left(\frac{12}{2}\right)^2 = 6^2 = 36$

10. Calcule o centro e o raio da circunferência de equação: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$

Resolução

Pela equação reduzida da circunferência: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos C(2, 1) e $r = \sqrt{2}$.

Digitalizada com CamScanner

11. Determine, os focos e a excentricidade da elipse: $50x^2 + 18y^2 = 450$

Resolução

Dividindo ambos os membros por 450 obtemos a equação da elipse na forma padrão: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Neste caso, $a = 3; b = 5; c = \sqrt{b^2 - a^2} = 4; e = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}$.

Os vértices são os pontos $(0, \pm 5)$; $(\pm 5, 0)$ e os focos $(0, \pm 4)$. Note-se que neste caso para se determinar a excentricidade foi necessário trocar a com b nas formas precedentes pelo facto de $b > a$.

12. Determine a equação da elipse sabendo que a sua excentricidade é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e que os extremos do eixo maior são os pontos $(\pm 8, 0)$.

Resolução

Temos $a = 8$ e como $c = a \cdot e = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$; $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{64 - 48} = 4$

A equação da elipse será: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$.

13. Determine os vértices, os focos, a excentricidades e as assimptotas da hipérbole de equação: $32a^2 - 18y^2 = 288$.

Resolução

Transformando a equação tem-se $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ de onde se deduz que:

$a = 3, b = 4, c = \sqrt{a^2 - c^2} = 5, e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

Os vértices serão pois os pontos $(\pm 3, 0)$, os focos os pontos $(\pm 5, 0)$ e as assimptotas serão as rectas $y = \pm \frac{4}{3}x$.

14. Achar a equação reduzida de uma hipérbole, sabendo que a sua distância focal é 12 e a sua excentricidade é $\frac{3}{2}$.

Resolução

Como sabemos, a distância focal $2c = 12$, logo $2c = 12 \Leftrightarrow c = 6$;
$a = \frac{c}{e} = 4, b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

A equação solicitada será pois $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

Digitalizada com CamScanner

Exercícios propostos

1. Explique porque é que $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{CA}$.

2. Sendo $\vec{a} = (4, -1)$; $\vec{b} = (-2, 8)$ e $\vec{c} = (-3, 5)$. Escreva as coordenadas dos vectores:

   a) $\vec{a} + \vec{b}$

   b) $\vec{b} + \vec{c}$

   c) $(\vec{a} + 0) + \vec{b}$

3. Considere três pontos, A, B e C, não alinhados. Marque os pontos D e E tais que:

   a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CA}$

   b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$. Justifique.

   c) Como classifica o quadrilátero $[BEDC]$?

4. Determine um vector $\vec{v}$, colinear com o vector $\vec{u} = (3, 4)$, e que tenha comprimento 15.

5. Seja $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ e $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$. Escreva as coordenadas do vector $\vec{a}$, sabendo que este:

   a) Tem três vezes o comprimento de $\vec{u}$ e a mesma direcção de $\vec{u}$.

   b) Tem a mesma direcção e sentido de $\vec{u}$ e a terça parte do comprimento de $\vec{u}$.

6. Calcule as normas do vector $\vec{u}$, sendo:

   a) $\vec{u} = \left(\frac{1}{5}; -\frac{1}{2}\right)$

   b) $\vec{u} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

7. Determine as normas dos vectores:

   $\vec{w} = -2\vec{a}$ e $\vec{s} = \vec{a} - 3\vec{b}$, sendo:

   $\vec{a} = (-1, 0)$ e $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$.

8. Calcule $proj_{\vec{a}}\vec{b}$ se $\|\vec{a}\| = 9$ e $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$.

9. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   a) Os vectores $\vec{u} = (s, a)$ e $\vec{v} = (2, -3)$ são iguais se $s = -3$ e $a = 2$.

   b) Os vectores $\vec{a} = (-3;\ 0{,}5)$ e $\vec{b} = \left(1, -\frac{1}{6}\right)$ são colineares.

   c) O simétrico do vector $\vec{v} = (-1, 2)$ é o vector $\vec{w} = (2, -1)$.

   d) $2(1, 2) - 3(1{,}5) = (-1, 11)$.

10. Represente num sistema cartesiano ortogonal os pontos:

    $A(-1, 0)$; $B(3, 0)$; $C\left(0, \frac{5}{2}\right)$;

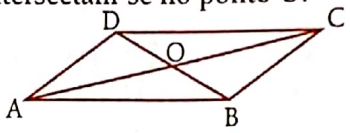
    $D(0, -2)$; $E\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$

11. Dados os pontos: $A(4, 1)$; $B(-5, 2)$; $C(1, -2)$ e $D(x, y)$.

    a) Verifique se os pontos A, B e C estão alinhados.

    b) Determine os valores reais x e y de modo que: $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$.

12. $[ABCD]$ é um paralelogramo e as suas diagonais intersectam-se no ponto O.



    Considerando $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, escreva em função de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$: $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{DO}$.

13. Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares, então o paralelogramo é um losango.

14. Dados os vectores $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (-5, 6)$, calcule:

    a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

    b) O ângulo dos dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

15. Das seguintes afirmações diga quais são as falsas e justifique a sua resposta.

    a) Se $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$ e $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$, então os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares.

    b) Acerca de dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sabe-se que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 10$. Então, $-10 \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq 10$.

    c) Sabe-se que $\|\vec{a}\| = 3$ e $proj_{\vec{b}}\vec{a} = 2$, então, $(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$.

    d) Se a projecção de um vector $\vec{u}$ sobre um vector $\vec{v}$ é igual a metade da norma do vector $\vec{u}$, então o ângulo entre os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 60°.

Digitalizada com CamScanner

16. Calcule os comprimentos dos lados do triângulo cujos vértices são $(-3, -4)$, $(0, -2)$ e $(4, 3)$.

17. Verifique analiticamente que o triângulo de vértices $(2, 2)$, $(-2, -2)$, $(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ é equilátero.

18. Determine y de modo que $(5, y)$ seja equidistante de $(4, 3)$ e de $(1, -2)$.

19. Determine um ponto equidistante dos vértices $A(-1, 1)$, $B(2, 1)$ e $C(3, 2)$ do triângulo [ABC].

20. Determine um ponto P no eixo das abcissas equidistante de $A(1, 2)$ e $B(5, 4)$.

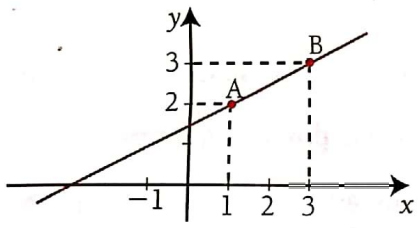
21. Determine um ponto P no eixo das ordenadas equidistante de $A(2, -1)$ e $B(3, 1)$.

22. Determine $P(x, y)$ que divide $\overline{AB}$ na razão -2, sendo $A(2, 3)$ e $B(4, 7)$.

23. Determine a abcissa de M que divide $\overline{AB}$ de $A(2, 0)$ e $B(-8, 0)$ na razão $-\frac{1}{5}$.

24. Dados os pontos $B(2, 5)$ e $C(8, 3)$ determine as coordenadas do ponto médio de $\overline{BC}$.

25. Observe a figura:



a) Quais são as coordenadas do vector $\vec{AB}$.

b) Escreva uma equação da recta AB, da semi-recta AB e do segmento de recta $[AB]$.

c) Indique as coordenadas de dois pontos da recta AB distintos de A e de B.

26. Determine a de modo que a recta $y = ax - 2$ passa pelo ponto de intersecção de:

$$y = 5x - 7 \text{ e } y = -3x + 9$$

27. Quais são os valores a serem atribuídos a a e a b para que a recta de equação $y = ax + b$ passe pelos pontos $(1, 2)$ e $(5, 14)$.

28. Determine a equação reduzida da recta que passa pelos pontos $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ e tem por declive $-\frac{1}{3}$.

29. Determine uma equação geral das rectas não verticais que passam pelo ponto $(2, -3)$.

30. Determine o declive da recta que passa pelos pontos $(2, -1)$ e $(0, -5)$.

31. Determine a equação reduzida da recta que passa pelos pontos $(5, -3)$ e $(0, -3)$.

32. Determine o coeficiente angular da recta cuja equação é $-3x + y - 5 = 0$.

33. Determine as equações simplificadas das rectas que verificam as seguintes condições:

a) Passa pelo ponto $(3, -2)$ e tem o declive $-\frac{2}{3}$.

b) Passa pelo ponto $(-3, 20)$ e tem o declive infinito.

c) Passa pelo ponto $(6, 3)$ e tem a inclinação $135°$.

d) Passa pelo ponto $(-1, 7)$ e tem inclinação de $90°$.

34. Escreva, na forma geral, as equações das rectas determinadas pelos seguintes pares de pontos:

a) $(3, 5)$ e $(7, -1)$

b) $(-1, 2)$ e $(5, -4)$

c) $(0, 3)$ e $(6, -1)$

35. Determine t de modo que os pontos $(-3, 10)$, $(7, -10)$, $(1-2t, 3t)$ sejam colineares.

36. Verifique, em cada um dos seguintes casos, se as rectas representadas são paralelas, concorrentes ou coincidentes:

a) $2x - 3y - 7 = 0$ e $8x - 12y + 3 = 0$

b) $4x + 10y - 6 = 0$ e $6x + 15y - 9 = 0$

c) $3x + 5 = 0$ e $2y - 7 = 0$

37. Considere o triângulo de vértices $(0, -6)$, $(q, 0)$ e $(-2, 10)$. Determine, analiticamente a recta que passa pelo terceiro vértice e paralela ao lado oposto.

Digitalizada com CamScanner

38. Identifique os lugares geométricos definidos pelas seguintes equações, e quando se tratar de uma circunferência determine o raio e o centro:

a) $x^2 + y^2 + 16x + 12y = 0$

b) $x^2 + y^2 - 10x + 7y + 9 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 12 = 0$

39. Determine o centro da circunferência de equação:

$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 3$

40. Ache a equação geral da circunferência de centro $(2, 3)$ e que passa pelo ponto $(4, 5)$.

41. Determine a equação da circunferência de centro $(-1, -2)$ e raio 3.

42. Determine os vértices, os focos, a excentricidade e os semieixos das seguintes elipses:

a) $x^2 + 16y^2 = 100$ b) $10x^2 + 6y^2 = 30$

43. Partindo da definição de elipse, deduza a equação reduzida da elipse que tem por focos os pontos $(\pm 2, 0)$ e por extremos do eixo maior $(\pm 3, 0)$.

44. Determine as equações das elipses com os seguintes dados:

a) Extremos do eixo maior $(0, \pm 10)$, excentricidade $\frac{3}{5}$.

b) Focos $(\pm 5, 0)$ extremos do eixo menor $(0, \pm 5)$.

45. Determine os vértices, os focos, a excentricidades e equações das assimptotas das seguintes hipérboles:

a) $9y^2 - x^2 = 36$

b) $9x^2 - 25y^2 = 1$

46. Determine a equação da hipérbole com os seguintes dados:

Focos $(\pm 10, 0)$ e excentricidade $\frac{5}{3}$.

47. Diga justificando quais das afirmações são as falsas.

A. O ângulo de duas rectas no plano é sempre menor do que um ângulo recto.

B. A inclinação de uma recta no plano é igual ao declive da recta.

C. Se uma recta tem de equação $y = 5x + 2$, as rectas da família $y = -\frac{1}{5}x + a$ são perpendiculares à recta dada.

D. São paralelas as rectas de equações:

$$\begin{cases} y_1 = -x + 3 \\ y_2 = x + 3 \end{cases}$$

E. A bissectriz de um ângulo é uma recta.

48. Partindo directamente da definição de hipérbole, deduza a equação reduzida da hipérbole que tem por focos os pontos $(\pm 10, 0)$ e por vértices os pontos $(\pm 8, 0)$.

49. Escreva uma equação da hipérbole que tem vértices em $(0, -3)$ e $(0, 3)$ e $e = 2$.

50. A equação

$9x^2 - 16y^2 + 18x - 96y - 279 = 0$

define uma hipérbole.

Determine:

a) Focos.

b) Vértices.

51. A equação

$9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$

define uma elipse.

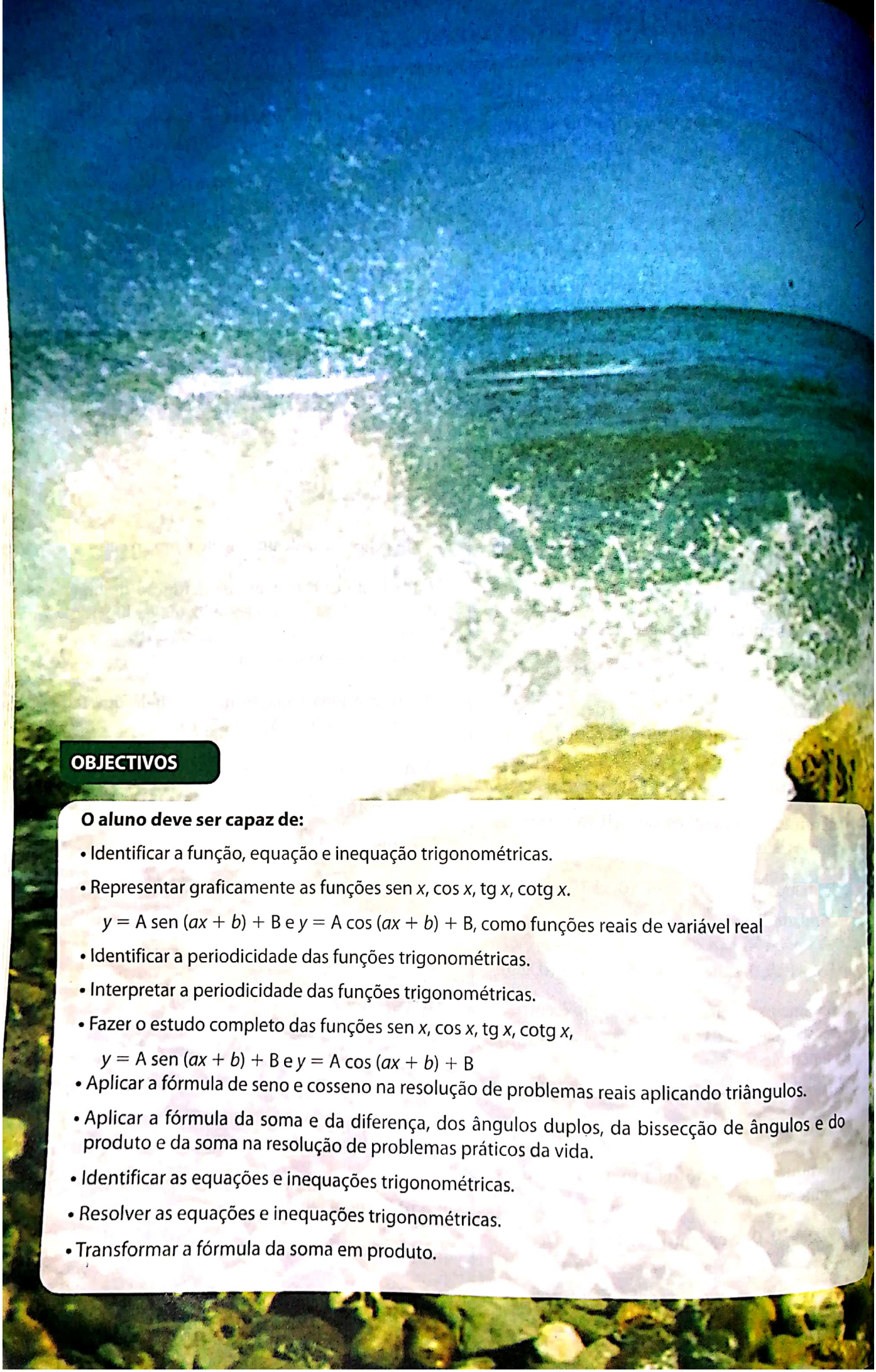
Determine:

a) Focos.

b) Vértices.

c) Excentricidade.

Digitalizada com CamScanner



OBJECTIVOS

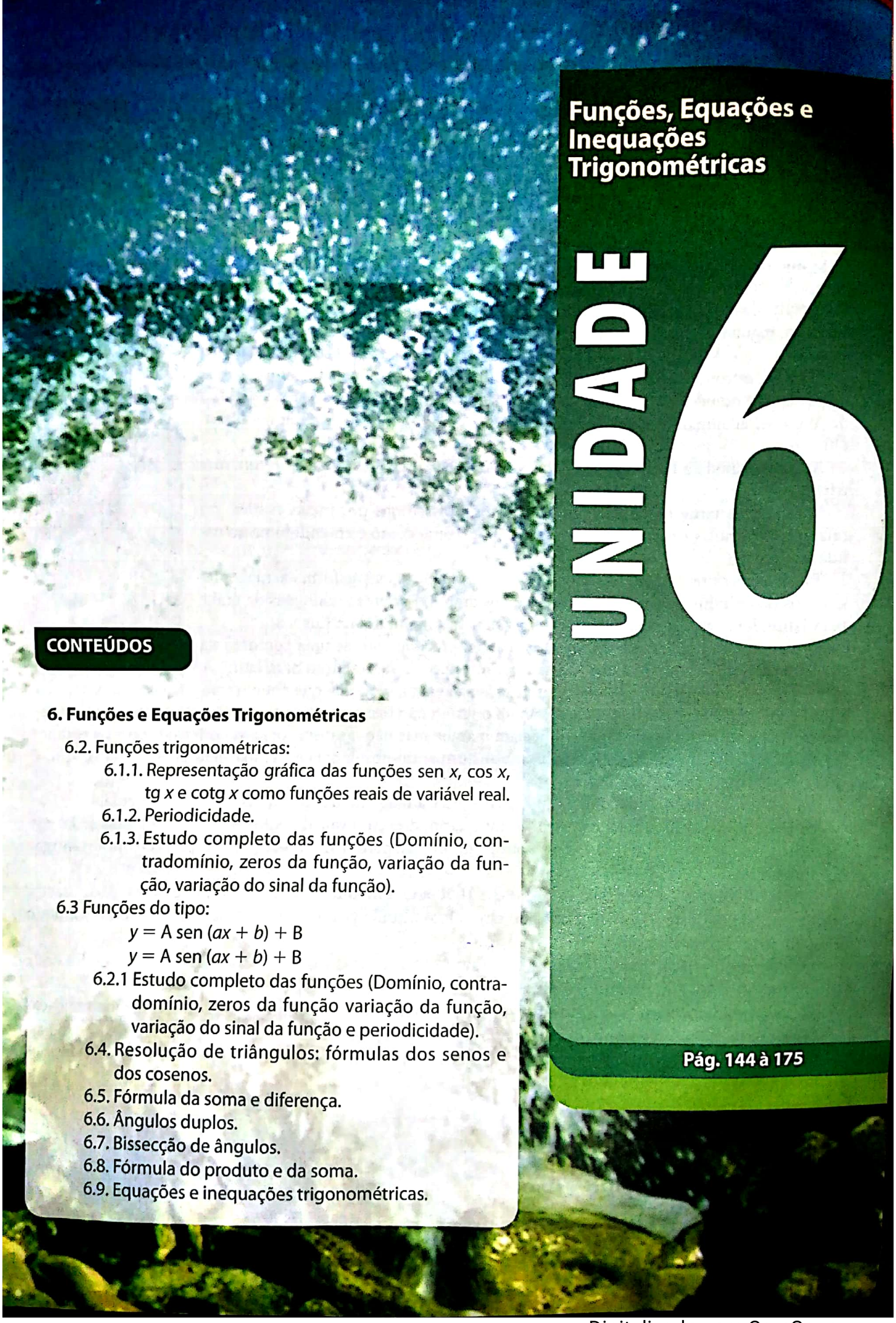
O aluno deve ser capaz de:

- Identificar a função, equação e inequação trigonométricas.
- Representar graficamente as funções sen x, cos x, tg x, cotg x.

  $y = A \text{ sen } (ax + b) + B$ e $y = A \cos (ax + b) + B$, como funções reais de variável real
- Identificar a periodicidade das funções trigonométricas.
- Interpretar a periodicidade das funções trigonométricas.
- Fazer o estudo completo das funções sen x, cos x, tg x, cotg x,

  $y = A \text{ sen } (ax + b) + B$ e $y = A \cos (ax + b) + B$
- Aplicar a fórmula de seno e cosseno na resolução de problemas reais aplicando triângulos.
- Aplicar a fórmula da soma e da diferença, dos ângulos duplos, da bissecção de ângulos e do produto e da soma na resolução de problemas práticos da vida.
- Identificar as equações e inequações trigonométricas.
- Resolver as equações e inequações trigonométricas.
- Transformar a fórmula da soma em produto.

Digitalizada com CamScanner



Funções, Equações e Inequações Trigonométricas

UNIDADE 6

CONTEÚDOS

6. Funções e Equações Trigonométricas

6.2. Funções trigonométricas:

6.1.1. Representação gráfica das funções sen x, cos x, tg x e cotg x como funções reais de variável real.

6.1.2. Periodicidade.

6.1.3. Estudo completo das funções (Domínio, contradomínio, zeros da função, variação da função, variação do sinal da função).

6.3 Funções do tipo:

$y = A \operatorname{sen}(ax + b) + B$

$y = A \operatorname{sen}(ax + b) + B$

6.2.1 Estudo completo das funções (Domínio, contradomínio, zeros da função variação da função, variação do sinal da função e periodicidade).

6.4. Resolução de triângulos: fórmulas dos senos e dos cosenos.

6.5. Fórmula da soma e diferença.

6.6. Ângulos duplos.

6.7. Bissecção de ângulos.

6.8. Fórmula do produto e da soma.

6.9. Equações e inequações trigonométricas.

Pág. 144 à 175

Digitalizada com CamScanner

A Trigonometria é o ramo da Matemática que estuda a resolução de triângulos com recurso às funções seno, co-seno, tangente, co-tangente, secante e co-secante e compreende a Trigonometria Plana e a Trigonometria Esférica (que diz respeito a triângulos sobre a superfície esférica).

Mas as funções trigonométricas têm imensa importância noutros campos, na Análise Matemática e nos ramos da Física relacionados com ondas e outros fenómenos periódicos.

O interesse pelas razões entre lados de um triângulo é tão antigo quanto o é a história da própria Matemática, como vamos ver.

A partir de 430 a.C., com Hipócrates de Chios, os geómetras gregos começam a estudar as relações entre arcos ou ângulos ao centro duma circunferência e as respectivas cordas e produzem mesmo uma tabela de cordas (140 a.C.), primeiro passado das «tábuas trigonométricas». Cláudio Ptolomeu, o mais notável geógrafo grego, astrónomo e matemático, cuja interpretação dos movimentos dos astros e da geografia terrestre influenciou o mundo durante 15 séculos, apresenta na sua obra Almagesta (140 d.C.) uma tabela de cordas de ângulos, acompanhada da descrição clara do modo como esses valores foram obtidos.



Ptolomeu (século II)-gravura do século XVI.

Atribui-se ainda a Ptolomeu o estabelecimento de várias identidades trigonométricas.

Foram mais tarde os hindus que substituíram as cordas por meias cordas, ou seja, introduziram pela primeira vez o conceito de seno como é entendido na actualidade.

Tal como aconteceu com os números, a Trigonometria, na sua forma actual, chegou-nos dos hindus por meio dos matemáticos árabes. Foram as traduções de árabe para latim, feitas no séc. XII, que introduziram a Trigonometria na Europa.

O nome seno, usado em trigonometria, nasceu precisamente de uma confusão na passagem de sânscrito para árabe que não foi reconhecida na tradução para latim. A meia corda era chamada Jiva em sânscrito e essa palavra árabe «*jaíb*» que é um termo trivial e que significa baía, bolso, oco. Embora o termo não fizesse sentido na matéria em estudo, na tradução para latim, os tradutores, que conheciam o árabe mas não o sânscrito, leram o termo usado nas tabelas de meias cordas como sendo «jaib» e transformaram-no na palavra latina para baía ou bolso que é sinus.

Foi no fim da Idade Média que o seno, o co-seno e a tangente receberam os seus nomes actuais.

No Outono de 1858, um jovem escocês antiquário, desceu o vale do Nilo. Numa velha tenda de Luxor descobriu um «livro», um volumoso papiro, que lhe despertou interesse por lhe parecer muito antigo. Comprou-o.

Análises feitas por peritos localizam-no em 1650 a.C. Embora Ahmes seja o nome do escriba e sacerdote que o copiou, este papiro é conhecido em todo o mundo por «*O Papiro de Rhind*» de Henry Rhind, o nome do jovem coleccionador.

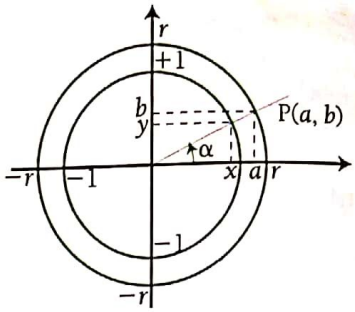
Ora este antiquíssimo papiro contém, entre muitos problemas resolvidos, alguns sobre pirâmides onde se aplicam as razões entre os lados de um triângulo.

Algumas placas de argila encontradas na Mesopotâmia apresentam listas de razões trigonométricas ainda anteriores à época em que foi compilado o célebre papiro.

Tanto para os babilónios como para os egípcios, estas razões eram encaradas como propriedades dos triângulos e não dos ângulos.

Digitalizada com CamScanner

Revisão de conceitos básicos



Representemos num referencial dois círculos: um de raio 1 e o outro de raio r. Tracemos um ângulo α com um dos lados coincidente com a parte positiva do eixo dos *xx* e o outro lado a intersectar o círculo de raio 1 no ponto $P(x, y)$ e o círculo de raio r no ponto $P(a, b)$.

Chama-se **seno de α** e representa-se por sen α à razão que nos é dada pela fórmula seguinte:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada do ponto associado}}{\text{raio da circunferência}} = \frac{b}{r} = \frac{y}{1} = y$$

Assim, sen $\alpha = y$.

Chama-se **co-seno de α** e representa-se por cos α à razão que nos é dada pela fórmula seguinte:

$$\cos \alpha = \frac{\text{abcissa do ponto associado}}{\text{raio da circunferência}} = \frac{a}{r} = \frac{x}{1} = x$$

Deste modo, cos $\alpha = x$.

Chama-se **tangente de α** e representa-se por tg α à razão que nos é dada pela fórmula seguinte:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{ordenada do ponto associado}}{\text{abcissa da circunferência}} = \frac{b}{a} = \frac{y}{x}$$

Então, tg $\alpha = \frac{y}{x}$.

Chama-se **cotangente de α** e representa-se por cotg α à razão que nos é dada pela fórmula seguinte:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{abcissa do ponto associado}}{\text{ordenada da circunferência}} = \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Assim, cotg $\alpha = \frac{x}{y}$.

É importante recordar que:

- O valor de cada uma das razões trigonométricas não depende do raio do círculo.
- Conforme sabemos, se um dos denominadores for zero, não existe a razão trigonométrica respectiva.

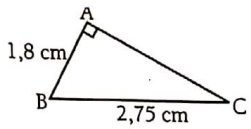
Para a determinação das razões trigonométricas, de um modo geral, é usado o círculo de raio 1, designado **círculo trigonométrico**.

Chama-se **círculo trigonométrico** a um círculo de centro na origem do referencial e de raio igual a 1.

Digitalizada com CamScanner

1

Na figura seguinte [ABC] é um triângulo rectangular em:



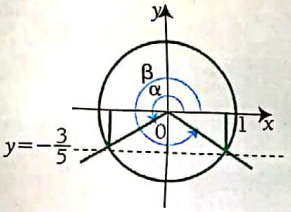
Determine, com duas casas decimais, tg α, cotg α, sen α, e cos α.

Para identificar, no círculo trigonométrico:

- Os ângulos com: seno

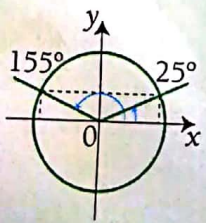
$x = -\frac{3}{5}$

traça-se a recta $y = -\frac{3}{5}$



sen α = sen $\beta = -\frac{3}{5}$

- O ângulo do 1.º quadrante com seno igual a sen 155.º, marca-se o lado extremidade do ângulo de 155° e identifica-se o ponto do círculo trigonométrico no 1.º Q com a mesma ordenada de P.



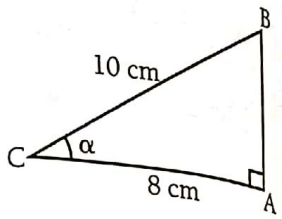
Exercícios resolvidos

Consideremos o triângulo [ABC] rectângulo em A.

Determine:

a) $\overline{AB}$

b) sen α, cos α, tg α e cotg α.



Resolução

a) Pelo Teorema de Pitágoras:

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 \Leftrightarrow$

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CA}^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow \overline{AB} = 6.$

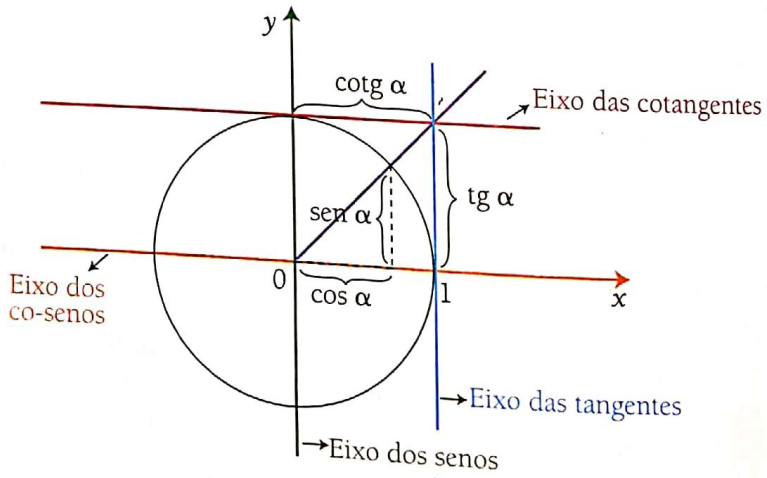
b) sen $\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; cos $\alpha = \frac{CA}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

tg $\alpha = \frac{AB}{CA} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$; cotg $\alpha = \frac{CA}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Linhas trigonométricas

Como vimos nas definições de razões trigonométricas, o seno de α é igual à ordenada do ponto associado; o coseno de α é igual à abcissa do ponto associado. Consequentemente, o eixo das ordenadas é, no estudo da trigonometria, muitas vezes designado **eixo dos senos** e, o eixo das abcissas, por **eixo dos co-senos**.

Como é óbvio, existem também os eixos das **tangentes** que é uma linha vertical que contém o ponto (1, 0) e das **cotangentes** que é uma linha horizontal contendo o ponto (0, 1).



Em conformidade com o exposto podemos afirmar que:

$-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Digitalizada com CamScanner

As razões trigonométricas tangente e cotangente, de acordo com as suas definições, podem tomar qualquer valor.

Razões trigonométricas dos ângulos 0°, 90°, 180° e 270°

Tendo em conta as definições das razões trigonométricas e de círculo trigonométrico, facilmente poderemos construir o quadro seguinte:

α	Seno	Co-seno	Tangente	Cotangente
0° (0 rad)	0	1	0	–
90° $\left(\frac{\pi}{2}\text{ rad}\right)$	1	0	–	0
180° (π rad)	0	−1	0	–
270° $\left(\frac{3\pi}{2}\text{ rad}\right)$	−1	0	–	0

Exercício resolvido

Calcule sen 0° + cos 90° − tg 180°

Resolução

Como sabemos, sen 0° = 0; cos 90° = 0; tg 180° = 0.
Então: sen 0° + cos 90° − tg 180° = 0 + 0 − 0 = 0.

Sinal das razões trigonométricas

Voltando às definições das razões trigonométricas e tendo em conta que o ponto P pode estar situado em qualquer dos quadrantes: 1.°, 2.°, 3.° ou 4.°, prestemos atenção aos sinais das coordenadas do ponto P em cada um dos quadrantes.

No **1.° Quadrante**, ambas as coordenadas, x e y, são positivas. Então,

$$P(x,y) \Leftrightarrow P(+,+)$$

Como consequência disso, os sinais das quatro razões trigonométricas, seno, co-seno, tangente e cotangente são positivos neste quadrante.

No **2.° Quadrante** a coordenada x é negativa e a coordenada y é positiva. Então,

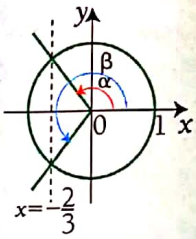
$$P(x,y) \Leftrightarrow P(-,+)$$

Consequentemente, o seno estando relacionado com a ordenada que é positiva tem sinal positivo; o co-seno que está relacionado com a abcissa que é negativa tem sinal negativo e a tangente e a cotangente que são o quociente das duas anteriores têm sinal negativo.

No círculo trigonométrico, para identificar:

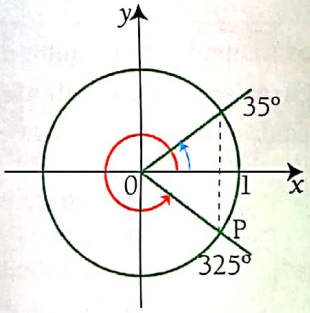
- Os ângulos com co-seno $x = -\frac{2}{3}$

traça-se a recta $x = -\frac{2}{3}$.

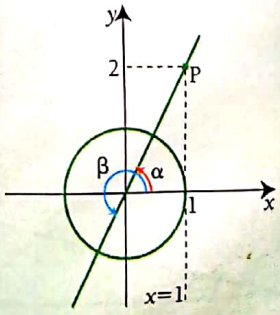


$$\cos\alpha = \cos\beta = -\frac{2}{3}$$

- Para identificar o ângulo do 1.° quadrante que tem co-seno igual a cos 325°, marca-se o lado extremidade deste ângulo e identifica-se o ponto do círculo trigonométrico no 1.° quadrante que tem a mesma abcissa de P.



- Para desenhar os ângulos com tangente 2, marca-se o ponto P de ordenada 2 sobre a recta $x = 1$ e traça-se a recta OP.



$$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta = 2$$

Digitalizada com CamScanner

No 3.º Quadrante ambas as coordenadas são negativas. Assim,

$$P(x,y) \Leftrightarrow P(-,-)$$

Sabemos que a abcissa e a ordenada são negativas, logo o seno e o co-seno têm sinal negativo, e a tangente e a cotangente têm sinal positivo.

No 4.º Quadrante a coordenada x é positiva e a y negativa. Então,

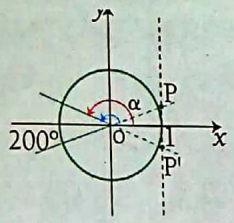
$$P(x,y) \Leftrightarrow P(+,-)$$

Deste modo, o seno tem sinal negativo, o co-seno positivo, a tangente e a cotangente têm o sinal negativo.

Podemos, então, representar estes resultados no quadro seguinte:

	Seno	Co-seno	Tangente	Cotangente
1.º Q	+	+	+	+
2.º Q	+	−	−	−
3.º Q	−	−	+	+
4.º Q	−	+	−	−

Para desenhar o ângulo do 2.º quadrante, com tangente simétrica de tg 200°, marca-se o ângulo de amplitude 200°, o ponto P, e o ponto P′ simétrico de P em relação a Ox e OP′.

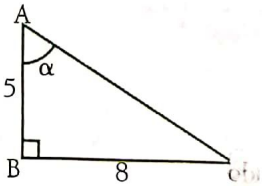


tg α = −tg 200° e α = 160°

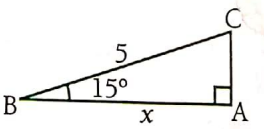
2 Razões trigonométricas num triângulo rectângulo

Nos triângulos rectângulos das figuras seguintes, calcule a medida x indicada:

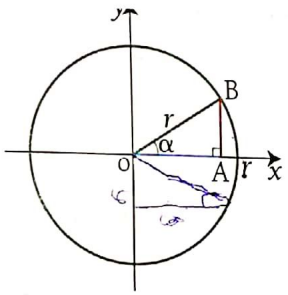
a)



b)

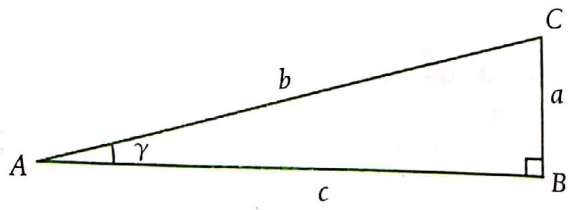


Recordemo-nos das razões trigonométricas num círculo de raio r.



$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{AB}}{r}; \quad \cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{r}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}; \quad \text{cotg } \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$$

Como consequência destas definições temos que num triângulo rectângulo qualquer:



$$\text{sen } \gamma = \frac{\text{comprimento do cateto oposto}}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos \gamma = \frac{\text{comprimento do cateto adjacente}}{\text{comprimento da hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

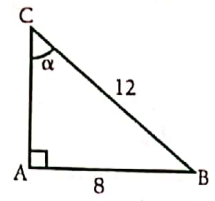
$$\text{tg } \gamma = \frac{\text{comprimento do cateto oposto}}{\text{comprimento do cateto adjacente}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cotg } \gamma = \frac{\text{comprimento do cateto adjacente}}{\text{comprimento do cateto oposto}} = \frac{c}{a}$$

Digitalizada com CamScanner

Exercício resolvido

Determine as razões trigonométricas do ângulo α da figura seguinte:



Resolução

Comecemos por determinar $\overline{CA}$.

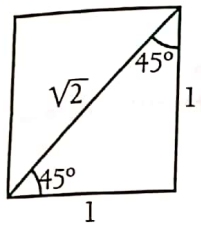
$\overline{CA}^2 = 12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80$

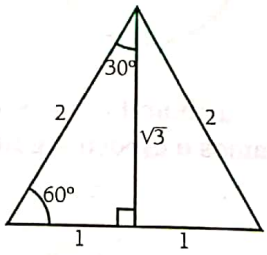
$\overline{CA} = 4\sqrt{5}$

Então, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Prestemos agora atenção a alguns triângulos rectângulos: a metade de um quadrado de lado 1 e a metade de um triângulo equilátero de lado 2.





Aplicando as definições das razões trigonométricas já conhecidas, obtemos os valores das razões trigonométricas correspondentes aos ângulos 30°, 45°, e 60°.

α	30°	45°	60°
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
cotg α	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

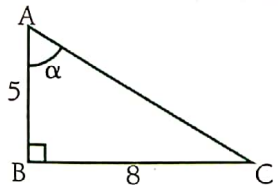
Consideremos agora as razões trigonométricas como funções reais de variável real.

3

Calcule as medidas das diagonais dum losango de 4,8 cm de lado sabendo que um dos seus ângulos mede 60°.

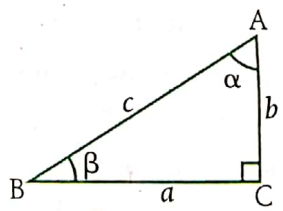
4

Na figura abaixo determine sen α, cos α e tg α.



5

No triângulo [ABC] da figura abaixo, rectângulo em C, onde α é a medida do ângulo A e β a medida do ângulo B, complete usando as medidas a, b, c e s.



sen α =

cos α =

tg α =

sen β =

cos β =

tg β =

Digitalizada com CamScanner

Representações gráficas das funções trigonométricas

6

Sendo α um ângulo agudo, diga justificando quais das seguintes afirmações são falsas:

a) A cotangente do ângulo α não pode ser maior que 1.

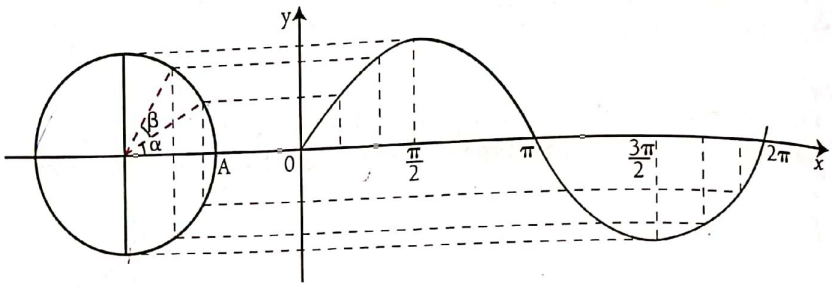
b) O co-seno do ângulo α pode ser um número qualquer desde que seja positivo.

c) Conhecendo o seno do ângulo α pode-se determinar o seno do ângulo $(90° - \alpha)$

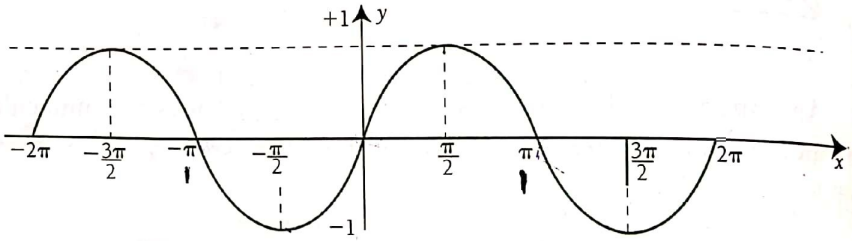
d) $0 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1$.

Usando o círculo trigonométrico, consideremos alguns ângulos no intervalo $[0, 2\pi]$. Assinalando no referencial a amplitude desses ângulos, desenhando na vertical, os segmentos correspondentes aos respectivos senos e unindo os pontos obtemos o gráfico da função seno nesse intervalo.

$$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto f(x) = \text{sen}\,x$$



Atribuindo novos valores aos ângulos, fora do intervalo considerado, teríamos o esboço seguinte:



7

Considere a função real de variável real definida por:

$y = \text{sen}\,2x$

a) Usando uma tabela de valores esboce o seu gráfico no intervalo $[-\pi, \pi]$.

b) Indique os zeros da função no intervalo $[-\pi, \pi]$.

c) Indique os valores de $x \in [-\pi, \pi]$, de modo que $f(x)$ seja máxima.

d) Determine os valores de $x \in [0, \pi]$ de modo que:

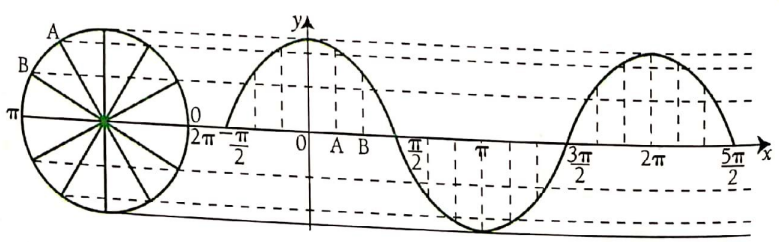
$y = 0{,}5$.

Por observação do esboço gráfico podemos concluir que:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = [-1, 1]$
- $\text{sen}(2\pi + x) = \text{sen}\,x$, sendo por isso a função periódica de período 2π.
- A função seno anula-se nos pontos $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Do mesmo modo que para a função seno podemos representar a função coseno.

$$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto f(x) = \cos x$$



Digitalizada com CamScanner

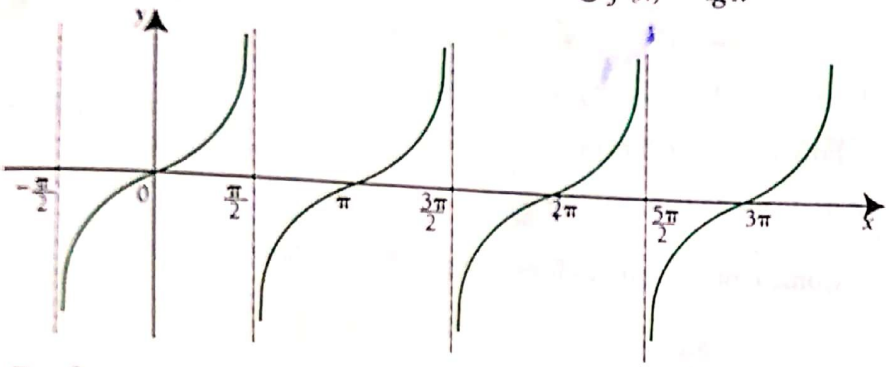
Por observação gráfica concluímos que:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D'_f = [-1, 1]$
- $\cos(2\pi + x) = \cos x$, sendo por isso a função periódica de período 2π.
- A função co-seno anula-se nos pontos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Utilizando uma tabela de valores e os conhecimentos que temos sobre as funções tangente e cotangente, poderemos também esboçar os gráficos destas mesmas funções.

$$f: \{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \operatorname{tg} x$$

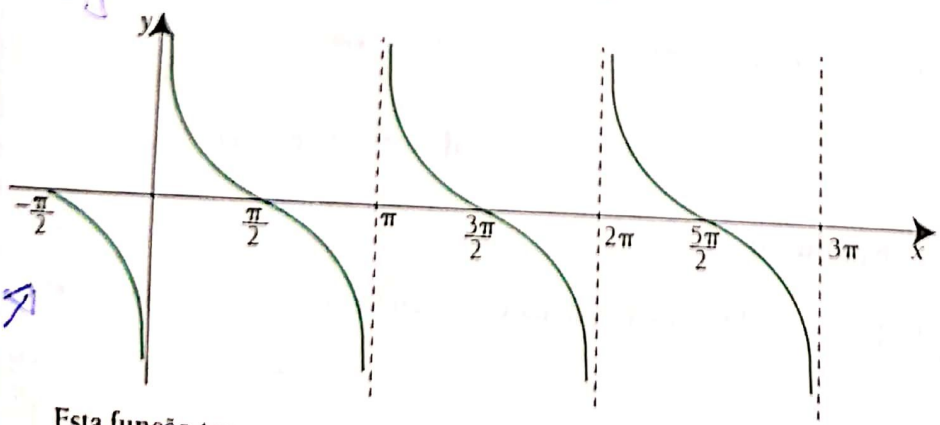


Esta função tem:

- $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $D'_f = \mathbb{R}$
- $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, sendo por isso a função periódica de período π.
- A função tangente anula-se nos pontos $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$f: \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \operatorname{cotg} x$$



Esta função tem:

- $D = \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $D'_f = \mathbb{R}$

Digitalizada com CamScanner

- $\cot g(x + \pi) = \cot g\, x$, sendo por isso a função periódica de período π.
- A função cotangente anula-se nos pontos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Período de uma função trigonométrica

Ao considerarmos funções da família $y = \cos kx$ ou $y = \operatorname{sen} kx$, poderemos observar que se verifica uma alteração no período. Como sabemos, as funções, completam um período quando $|k|\,x$ varia entre o 0 e 2π, o que significa que:

$$0 \leq |k|\,x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{|k|}.$$

Portanto, estas funções completam um período quando se varia de 0 a $\frac{2\pi}{|k|}$ e deste modo têm período $\frac{2\pi}{|k|}$.

Como é óbvio, para as funções $\operatorname{tg}(kx)$ e $\operatorname{cotg}(kx)$ temos:

$$0 \leq |k|\,x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{|k|}.$$

Consequentemente, elas têm período $\frac{\pi}{|k|}$.

Considerando funções do tipo $y = a \operatorname{sen} x$ ou $y = a \cos x$, ao coeficiente $|a|$ chama-se amplitude.

Exercícios resolvidos

Determine o período de cada uma das funções trigonométricas seguintes:

a) $y = 2 \operatorname{sen} 2(x - \pi)$

b) $y = 3 \operatorname{sen}\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = -3 \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

d) $y = 2 + \operatorname{tg}(\pi x)$

Resolução

O gráfico das funções da família $y = a \operatorname{sen}[k\,(x - b)] + c$ tem período $p = \frac{2\pi}{|k|}$. Então,

a) $y = 2 \operatorname{sen} 2(x - \pi)$ logo $p = \frac{2\pi}{2} \Leftrightarrow p = \pi$

8

Determine o período de cada uma das funções trigonométricas seguintes:

a) $-2 \operatorname{sen} 2(3t - 12)$

b) $2 - 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $-3 \operatorname{sen}\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $-2 \cos(3t - 12)$

e) $2 + \operatorname{cotg}(\pi x)$

Digitalizada com CamScanner

b) $y = 3 \operatorname{sen}\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow p = 3 \operatorname{sen}\left[2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right]$ logo $p = \frac{2\pi}{2} \Leftrightarrow p = \pi$

c) $y = -3 \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ logo $p = \frac{2\pi}{1} \Leftrightarrow p = 2\pi$.

d) $y = 2 + \operatorname{tg}(\pi x)$ como $p = \frac{\pi}{|k|} \Leftrightarrow p = \frac{\pi}{\pi} \Leftrightarrow p = 1$.

Transformações dos gráficos das funções trigonométricas

Como já o sabemos, partindo do gráfico de $y = f(x)$ podem ser obtidos gráficos de outras funções. Usando a tabela vista no estudo das transformações dos gráficos das funções exponenciais e logarítmicas, poderemos construir gráficos das funções do tipo:

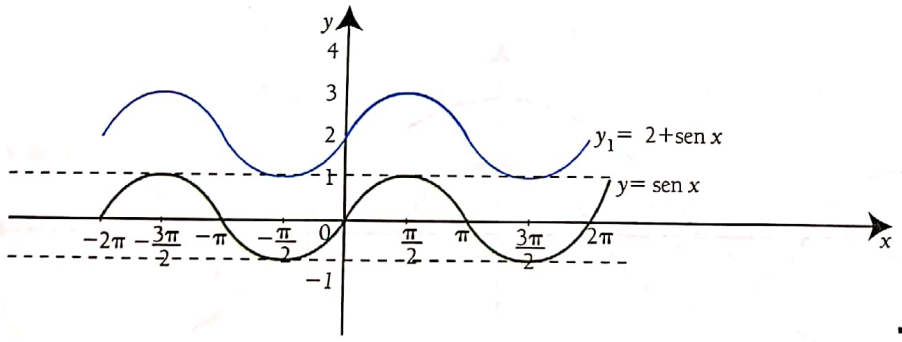
$$y = a \operatorname{sen}[k(x - b)] + c; \quad y = a \cos[k(x - b)] + c;$$
$$y = a \operatorname{tg}[k(x - b)] + c \quad e \quad y = a \operatorname{cotg}[k(x - b)] + c.$$

Exercícios resolvidos

1. Considere as funções $y_1 = 2 + \operatorname{sen} x$ e $y_2 = -\operatorname{sen} x$. Descreva como obter o gráfico de cada uma delas a partir do gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ e represente-os, respectivamente.

Resolução

$y_1 = 2 + \operatorname{sen} x$: O gráfico desta função tem a mesma forma que o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$, mas deslocado na vertical para cima duas unidades.

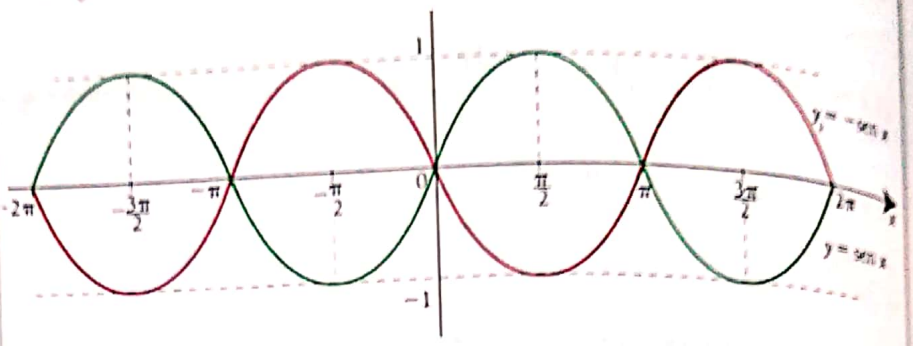


9

Partindo do gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$, construa o gráfico da função $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Digitalizada com CamScanner

$y_2 = -\text{sen } x$: O gráfico desta função tem a mesma forma do gráfico de $y = \text{sen } x$, mas é simétrico em relação ao eixo dos xx.



10

Num mesmo gráfico construa o gráfico das funções seguintes:

a) $y = \cos x$

b) $y = \cos 2x$

c) $y = 2\cos 2x$

d) $y = -2\cos 2x$

2. Considere as funções da família $y = a\cos[k(x - b)] + c$. Represente graficamente duas funções da família cujo período seja 4π e a amplitude 2.

Resolução

Se o período é 4π, então $\frac{2\pi}{|k|} = 4\pi \Leftrightarrow |k| = \frac{1}{2}$. E como a amplitude é 2, então $a = \pm 2$.

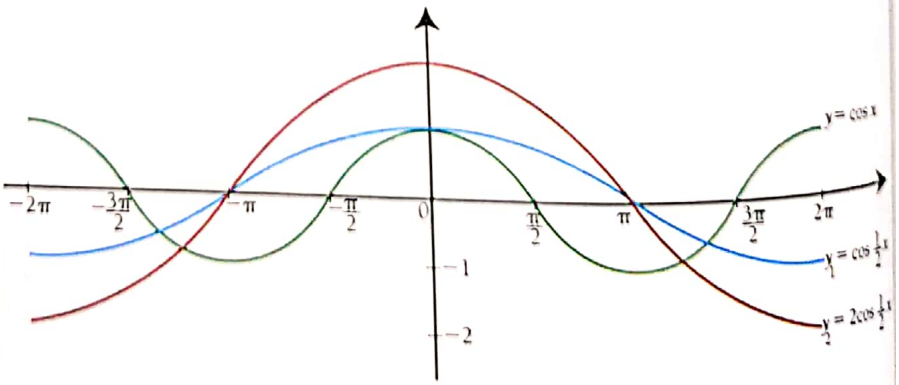
As funções são do tipo $y = \pm 2\left[\cos\frac{1}{2}(x - b)\right] + c$.

Consideremos os casos:

2.1. $b = c = 0$ e $a = 2$. Assim, temos o caso $y = 2\cos\frac{1}{2}x$.

Esticando o gráfico da função $y = \cos x$, no valor $\frac{1}{a} = 2$, ao longo do eixo dos xx, obtemos o gráfico de $y = \cos\frac{1}{2}x$.

Esticando este último gráfico no valor 2, na direcção do eixo dos yy obtemos o gráfico de $y = 2\cos\frac{1}{2}x$.

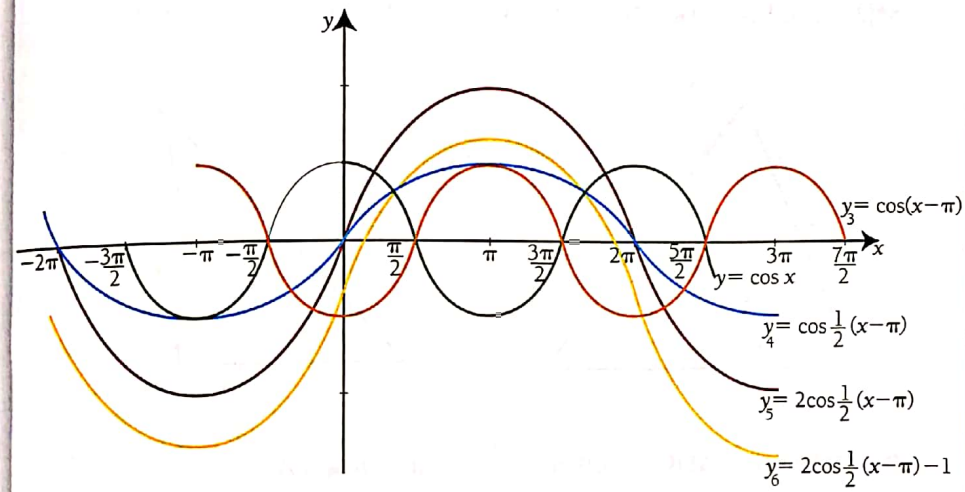


Digitalizada com CamScanner

2.2. $b = \pi$, $a = 2$ e $c = -1$. Temos agora $y = 2\cos\frac{1}{2}(x-\pi) - 1$.

Efectuando uma translação ao gráfico de $y = \cos x$, no valor π, ao longo do eixo dos xx, obtemos o gráfico de $y = \cos(x-\pi)$.

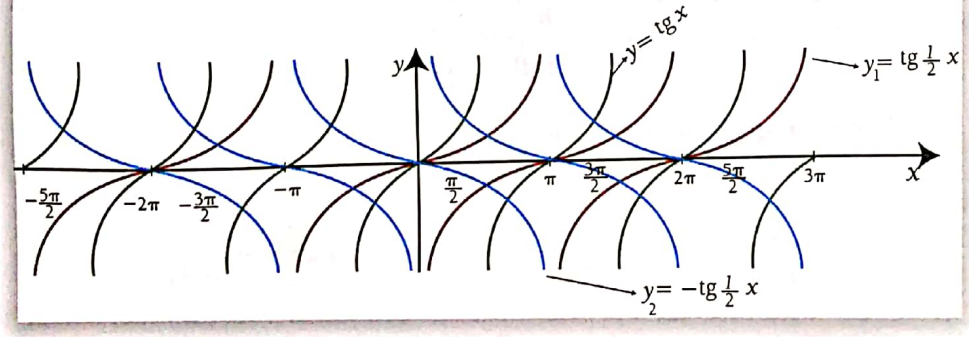
Esticando o gráfico da função $y = \cos(x-\pi)$ no valor 2 ao longo do eixo dos xx, obtemos o gráfico de $y = \cos\frac{1}{2}(x-\pi)$. Esticando este último gráfico no valor 2, na direcção do eixo dos yy obtemos o gráfico de $y = 2\cos\frac{1}{2}(x-\pi)$. Deslocando $y = 2\cos\frac{1}{2}(x-\pi)$ na vertical uma unidade para baixo obtemos o gráfico de $y = 2\cos\frac{1}{2}(x-\pi) - 1$.



3. Considere a função $y = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$. Efectuemos a sua representação gráfica partindo do gráfico de $y = \operatorname{tg} x$.

Resolução

Esticando o gráfico de $y = \operatorname{tg} x$ no valor 2 ao longo do eixo dos xx obtemos o gráfico da função $y = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$. Deste, reflectindo-o simetricamente em relação ao eixo dos yy, obtemos o gráfico da função $y = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.



11

Construir o gráfico de $y = -\operatorname{cotg} 2x$, partindo do gráfico de $y = -\operatorname{cotg} x$.

Digitalizada com CamScanner

Resolução de triângulos. Fórmula dos senos e dos co-senos

Iremos demonstrar dois teoremas que se aplicam a qualquer tipo de exemplo.

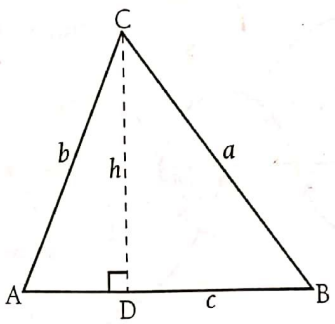
Teorema dos senos

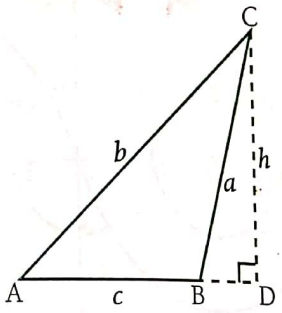
Mostre que para qualquer triângulo [ABC] se tem:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Demonstração

Seja [ABC] um triângulo e h a altura relativamente ao vértice C.





No triângulo [ADC], $\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \operatorname{sen}\hat{A}$

No triângulo [BDC], $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a \operatorname{sen}\hat{B}$

Mas $\operatorname{sen}(180° - \hat{B}) = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a \operatorname{sen}(180° - \hat{B}) \Leftrightarrow h = a \operatorname{sen}\hat{B}$

Podemos escrever que:

$$b \operatorname{sen}\hat{A} = a \operatorname{sen}\hat{B} \Leftrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Partindo da altura relativamente ao vértice A e do mesmo modo se concluiria que:

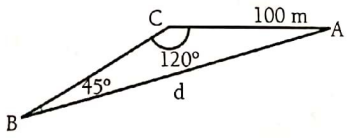
$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Logo, em qualquer triângulo [ABC], tem-se:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \text{ (teorema dos senos)}$$

12

Duas árvores localizam-se em lados opostos de um lago. O ângulo entre as linhas de visão de um observador que as vê é de 120° e o ângulo formado por uma dessas linhas e a linha que une as árvores é de 45°. Sabendo que uma das árvores está a 100 m do observador, calcule a distância entre as árvores.



13

Dois lados de um triângulo medem 10 cm e 6 cm e formam entre si um ângulo de 120°.

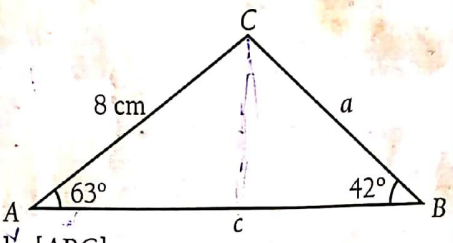
Calcule a medida do 3.º lado.

Digitalizada com CamScanner

Este teorema permite-nos, dados dois ângulos de um triângulo e um lado, determinar o outro ângulo e os outros dois lados. Também é possível usar este teorema dados dois lados e um ângulo, desde que o ângulo não seja o formado por estes dois lados.

Exercícios resolvidos

1. Consideremos um triângulo qualquer [ABC]. Por convenção o ângulo ABC representa-se por $\hat{B}$ e do mesmo modo para os outros ângulos.



Determine o perímetro do triângulo [ABC].

Resolução

$$\frac{a}{\text{sen } 63^\circ} = \frac{8}{\text{sen } 42^\circ} \Leftrightarrow a = \frac{8 \cdot \text{sen } 63^\circ}{\text{sen } 42^\circ} \approx 10{,}62 \text{ cm.}$$

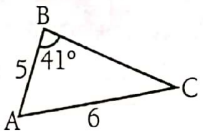
Para determinar c é necessário calcular-se primeiro o ângulo $\hat{C}$.

$\hat{C} = 180^\circ - 42^\circ - 63^\circ = 75^\circ$.

Então: $\frac{8}{\text{sen } 42^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 75^\circ} \Leftrightarrow \frac{8 \cdot \text{sen } 75^\circ}{\text{sen } 42^\circ} \approx 11{,}55.$

Assim, o perímetro do triângulo [ABC] é aproximadamente igual a 30,2 cm.

2. Determine a amplitude dos ângulos ACB e CAB.



Resolução

Agora temos dois lados do triângulo e um ângulo.

Então: $\frac{6}{\text{sen } 41^\circ} = \frac{5}{\text{sen } \hat{C}} \Leftrightarrow \text{sen } \hat{C} = \frac{5 \cdot \text{sen } 41^\circ}{6} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{sen } \hat{C} \approx 0{,}547.$$

Como sabemos, existem duas soluções para o ângulo $\hat{C}$: 33,2° ou 146,8°. Verifiquemos então qual é a solução ou se são ambas soluções.

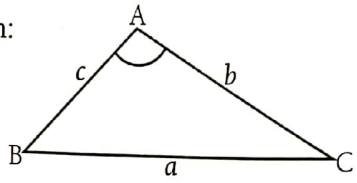
Se $\hat{C} = 33{,}2^\circ \Rightarrow \hat{A} = 105{,}8^\circ$ e se $\hat{C} = 146{,}8^\circ \Rightarrow \hat{A} = -7{,}8^\circ$ que é uma solução impossível. Assim, a solução do problema é única: $\hat{C} = 33{,}2^\circ$ e $A = 105{,}8^\circ$.

A partir das propriedades do produto escalar de dois vectores iremos demonstrar o teorema dos co-senos.

Teorema dos co-senos

Mostre que num triângulo qualquer [ABC] se tem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



14

Determine o perímetro do triângulo [ABC] dados:
lado $b = 8$ cm; ângulo = 63° e Ângulo B = 42°.

15

Use o teorema dos senos para calcular o perímetro de cada um dos seguintes triângulos:

a) [ABC] se o lado $c = 8{,}2$ cm; $\hat{A} = 50^\circ$; $\hat{B} = 39^\circ$.

b) [ABC] se o lado $a = 5$ cm; $b = 4$ cm; $\hat{B} = 42^\circ$.

c) [ABC] se o lado $c = 5$ cm; $b = 6$ cm; Ângulo $\hat{A} = 90^\circ$ e ângulo $\hat{B} = 52^\circ$.

16

De um triângulo [ABC] são conhecidos os lados: $a = 13$ cm, $b = 12$ cm e $c = 19$ cm. Determine as amplitudes dos ângulos A, B e C.

17

Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

A. A área dum octógono regular de lado 20 cm é 1 931,4 cm^2.

B. As funções $f(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \wedge g(x) = 1 - \text{sen}^2 x$ são idênticas.

C. Como $\text{sen}^2 x = \text{sen}^2 x$ então $\text{sen } x = -\text{sen } x$

D. $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

E. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Digitalizada com CamScanner

Demonstração

$\vec{CA} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos \hat{A}$ (1)

Por outro lado, $\vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$ ou $\vec{CB} = -\vec{AC} + \vec{AB}$

Então:

$\vec{CB} \cdot \vec{CB} = (-\vec{AC} + \vec{AB}) \cdot (-\vec{AC} + \vec{AB})$

$\|\vec{CB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 - \vec{AC} \cdot \vec{AB} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \|\vec{AB}\|^2$

$\|\vec{CB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \|\vec{AB}\|^2$

$2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\|\vec{CB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2$ (2)

Por (1) e (2), vem:

$-\|\vec{CB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 = 2\|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos \hat{A} \Leftrightarrow$

$\|\vec{CB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - 2\|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos \hat{A}$

ou

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$

do mesmo modo se concluiria que:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$ $\qquad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$

Este teorema permite-nos, dados dois lados de um triângulo e o ângulo por eles formado, determinar os outros elementos. Também é possível usá-lo quando dados os três lados.

18

Num triângulo [ABC], sabe-se que $\overline{AB} = 19$, $\overline{AC} = 11$ e $\overline{BC} = 16{,}5$.

Determine a medida dos ângulos do triângulo.

19

Demonstre, usando a fórmula dos co-senos, que não existe nenhum triângulo de lados 1, 1 e 3.

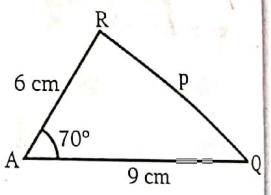
20

Mostre que

$$\frac{\text{sen}^2 t + \text{sen}^2 t + \cos t}{\cos^2 t + \cos^3 t} = \text{tg}^2 t$$

Exercícios resolvidos

1. De acordo com os dados da figura, calcule o perímetro do triângulo [PQR].



Resolução

$p^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cos 70° \Leftrightarrow p^2 = 80{,}061 \Leftrightarrow p \approx 8{,}9$. Deste modo, o perímetro do triângulo é, aproximadamente, de 25 cm.

2. Os comprimentos dos lados de um triângulo são, em centímetros, 12, 13 e 19. Determine a amplitude de cada um dos ângulos do triângulo.

Resolução

Determinemos o ângulo $\hat{A}$. Temos,

$13^2 = 12^2 + 19^2 - 2 \cdot 12 \cdot 19 \cos \hat{A} \Leftrightarrow \cos \hat{A} = \frac{12^2 + 19^2 - 13^2}{2 \cdot 12 \cdot 19}$

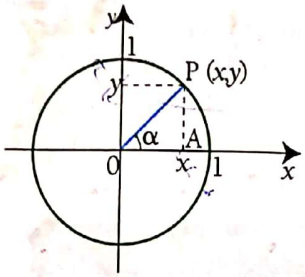
$\hat{A} = 42{,}5°$.

Para o ângulo $\hat{B}$: $12^2 = 13^2 + 19^2 - 2 \cdot 13 \cdot 19 \cos \hat{B} \Leftrightarrow \hat{B} = 38{,}6°$ e para C: $180° - 38{,}6° - 42{,}5° = 98{,}9°$.

Digitalizada com CamScanner

Relações fundamentais da Trigonometria

Ao recordarmos as definições das principais funções trigonométricas facilmente chegamos às seguintes relações:



$\text{sen}\,\alpha = y$; $\cos\alpha = x$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}$ e $\text{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y}$.

Consequentemente, $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ e $\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$. Destas ainda:

últimas duas relações temos

$$\text{cotg}\,\alpha \,.\, \text{tg}\,\alpha = 1$$

Observando a figura acima, onde está representado o triângulo rectângulo [POA], temos: $1^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 1 = (\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\alpha)^2$ e por convenção escreve-se

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

expressão tida como sendo a fórmula fundamental da trigonometria.

Partindo desta fórmula e tendo $\text{sen}\,\alpha \neq 0$ e $\cos\alpha \neq 0$, temos:

- Dividindo a fórmula fundamental por $\text{sen}^2\,\alpha$ obtemos,

$$1 + \frac{1}{\text{tg}^2\,\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\,\alpha}$$

- Dividindo a fórmula fundamental por $\cos^2\alpha$ obtemos,

$$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

21

Escreva as seguintes funções, como funções trigonométricas de um ângulo do 1.º quadrante:

a) cos 126.º

b) sen 240.º

c) cos 150.º

d) tg 330.º

22

Simplifique cada uma das expressões:

a) $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$

b) $\text{sen}(x + 4\pi) + \cos(x + 6\pi) - \text{sen}(-x + 5\pi)$

Digitalizada com CamScanner

Redução de um ângulo ao 1.º quadrante

Para a redução de um ângulo ao primeiro quadrante teremos em conta duas hipóteses:

Ângulo é dado

Neste caso, escreve-se o ângulo como $180° - \alpha$ ou $180° + \alpha$ ou $360° - \alpha$ conforme ele esteja no 2.º, 3.º ou 4.º quadrantes.

Neste caso, a função é mantida, isto é, se é seno permanece seno e tem-se em conta o sinal da função nesse quadrante.

Exercício resolvido

Calcule sen 283°.

Resolução

$283° \in$ 4.º Q. Então, $360° - 283° = 77° \Leftrightarrow \text{sen}\,(360° - 77°) = ?\ \text{sen}\,77°$.
Como no 4.º Q seno é negativo, tem-se:
$\text{sen}\,283° = \text{sen}(360° - 77°) = -\text{sen}\,77°$.

23

Sabendo que $\text{sen}\,x = \frac{3}{5}$ e que $x \in$ 2.º Q, determine:
$\cos x + \text{tg}\,x$.

Ângulo não é dado

Se o ângulo surge como uma soma ou uma diferença com 180° ou 360° mantém-se a função.

Se o ângulo surge como uma soma ou uma diferença com 90° ou 270° passa-se à co-função, isto significa que seno passa a co-seno e co-seno passa a seno.

À mesma, em ambas as situações, é preciso ter-se em conta o sinal do quadrante.

Exercício resolvido

1. Reduza $\text{sen}(x - \pi)$ ao 1.º quadrante.

Resolução

$\text{sen}(x - \pi) = \text{sen}(x - \pi + 2\pi) = \text{sen}(x + \pi) = ?\ \text{sen}\,x$. Como $(\pi + x) \in$ 3.º Q e neste quadrante o seno é negativo, temos:
$\text{sen}(x - \pi) = -\text{sen}\,x$.

2. Sabendo que $sen(\pi + a) = \frac{3}{5}$ e que $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$, calcule:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} + a\right) + \text{sen}(\pi - a) + \text{tg}\,a.$$

24

Acerca do ângulo α sabe-se que:

$\text{sen}\,(\pi + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ e que

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Calcule $\cos(\pi - \alpha)$.

Digitalizada com CamScanner

Resolução

$\text{sen}(\pi + a) = -\text{sen}\, a \Leftrightarrow \text{sen}\, a = -\frac{3}{5}$. Como $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$ e $\text{sen}\, a < 0$, temos que $a \in 3.^{\circ}$ Q.

Então:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} + a\right) + \text{sen}(\pi - a) + \text{tg}\, a = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + \text{sen}\, a + \text{tg}\, a =$$
$$= -\text{sen}\, a + \text{sen}\, a + \text{tg}\, a = \text{tg}\, a$$

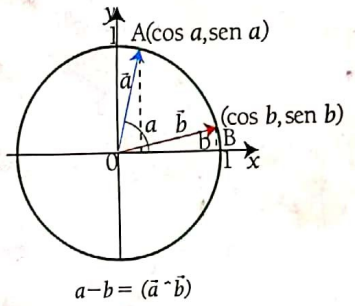
Usando a fórmula fundamental da trigonometria, temos:

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \Leftrightarrow \cos a = \pm\frac{4}{5}$. Porém $a \in 3.^{\circ}$ Q, então, $\cos a = -\frac{4}{5}$. Deste modo, $\text{tg}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} \Leftrightarrow \text{tg}\, a = \frac{3}{4}$.

Transformações de expressões trigonométricas

Fórmulas da soma e da diferença

Consideremos o círculo trigonométrico e dois ângulos a e b. Os pontos A e B têm por coordenadas $(\cos a, \text{sen}\, a)$ e $(\cos b, \text{sen}\, b)$ respectivamente. Por aplicação do produto interno de dois vectores, temos:



$a - b = (\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$$

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$\cos(a - b) = \frac{(\cos a, \text{sen}\, a) \cdot (\cos b, \text{sen}\, b)}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$\cos(a - b) = \frac{\cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}{1 \cdot 1}$$

Logo, $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b \;\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

A partir desta fórmula, é possível obtermos outras relações usando o raciocínio lógico e conhecimentos anteriores.

- $\cos(a + b) = \cos[a - (-b)] = \cos a \cos(-b) + \text{sen}\, a \,\text{sen}\,(-b)$
  $= \cos a \cos b - \text{sen}\, a \,\text{sen}\, b.$

Como sabemos, $\cos(-b) = \cos b$ e $\text{sen}\,(-b) = -\text{sen}\, b$. Assim,

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a \,\text{sen}\, b, \;\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

25

Simplifique as expressões seguintes:

a) $\dfrac{\cos(5\pi + x) \cdot \text{tg}(4\pi - \pi)}{\text{sen}(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

b) $\text{sen}\, 4x \cos 3x - \cos 4x \,\text{sen}\, 3x$

$= \text{sen}\, x - \cos x$ ✱

Digitalizada com CamScanner

• $\operatorname{sen}(a+b) = \cos\left(-(a+b)\right) = \cos\left[\left(-a\right)-b\right] =$

$= \cos\left(-a\right)\cos b + \operatorname{sen}\left(-a\right)\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b.$

Então,

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

• $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen} a \cos(-b) + \cos a \operatorname{sen}(-b) =$

$= \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b.$

Assim,

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

26

Mostre a identidade:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

Considerando $\cos(a+b) \neq 0$, $\cos a \neq 0$ e $\cos b \neq 0$ temos,

• $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} =$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cancel{\cos b}}{\cos a \cancel{\cos b}} + \dfrac{\cancel{\cos a} \operatorname{sen} b}{\cancel{\cos a} \cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a} \cos b}{\cancel{\cos a} \cancel{\cos b}} - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} =$$

Então,

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \text{ com } \cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b) \neq 0$$

De igual modo que para a tangente da soma poderemos deduzir para a tangente da diferença obtendo,

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \text{ com } \cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a-b) \neq 0$$

• Para as fórmulas análogas da cotangente é necessário ter em conta a relação,

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \frac{1}{\dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}} = \frac{1}{\operatorname{cotg} a}.$$

Teremos assim,

$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} a} \text{ com } \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(a+b) \neq 0$$

Digitalizada com CamScanner

e

$$\operatorname{cotg}(a-b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a} \text{ com } \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(a-b) \neq 0$$

Fórmulas do ângulo duplo

$\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a + a) = \operatorname{sen} a \cos a + \cos a \operatorname{sen} a = 2\operatorname{sen} a \cos a$.

Assim,

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$. Assim,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Com alguma facilidade e usando os mesmos princípios teremos:

$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(a + a) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a} = \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a}$. Assim

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \left(a \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \wedge a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

Analogamente:

$$\operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2\operatorname{cotg} a} \left(a \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$$

Fórmulas da soma e do produto

$\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen} a \cos b$

Considerando $a + b = \alpha$ e $a - b = \beta$ então,

$$a = \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad b = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Destas últimas fórmulas:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2\operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

27

Dado $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e

$\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$,

a) Calcule $\cos x$, $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$ e $\operatorname{tg} 2x$.

b) Em que quadrante se situa o ângulo correspondente a $2x$?

28

Transforme em produto as expressões seguintes:

a) $\operatorname{sen}(2x + y) + \operatorname{sen}(2x - y)$

b) $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x$

c) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x$

Digitalizada com CamScanner

Por subtracção termo a termo $\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b) = 2\cos a \text{ sen}$ com o apoio das expressões correspondentes a α e a β, poderemos escre

$$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}$$

De igual modo teremos:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

e

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\beta-\alpha}{2}$$

ou seja:

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Para as funções tangente e cotangente teremos:

$$\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta = \frac{\text{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\text{cotg}\,\alpha \pm \text{cotg}\,\beta = \frac{\text{sen}(\alpha \pm \beta)}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

Equações e inequações trigonométricas

Vamos tratar das equações e das inequações trigonométricas, partin das mais simples e utilizando conceitos já conhecidos da resolução equações e da trigonometria.

A equação $\text{sen}\,x = a$. Como sabemos, a não pode tomar valores ma res que 1, nem menores que -1, pois $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$.

Para $a = 1$, $\text{sen}\,x = 1$ e temos $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, i é $k \in \mathbb{Z}$.

Para $a = -1$, $\text{sen}\,x = -1$ e temos $x = -\frac{\pi}{2} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Para $a = -1$, $\text{sen}\,x = -1$ e temos $x = -\frac{\pi}{2} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Digitalizada com CamScanner

Vejamos agora um exemplo concreto. sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. No círculo trigonométrico as soluções são $x = \frac{\pi}{4} \vee x = \pi - \frac{\pi}{4}$. Mas como sabemos, a função seno é periódica de período 2π. Deste modo, para obtermos a totalidade das soluções a cada uma das soluções contidas no círculo trigonométrico adicionamos o período da função e temos como soluções gerais.

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \vee x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Vejamos agora o caso $\cos 3x = 0$.

$\cos x = 0$ nos pontos $x = \pm \frac{\pi}{2}$. Então, a solução geral desta equação é,

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \vee 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k \vee x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

De seguida, tomemos dois exemplos envolvendo as funções tangente e cotangente. Seja $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. A solução desta equação é $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ tendo em conta que o período da função tangente é π.

Se considerarmos $\operatorname{cotg} 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

Vamos agora considerar exemplos de equações na sua forma mais geral.

Exercícios resolvidos

Resolva as equações seguintes:

1. $2 \cos 2x = -1$

Resolução

$2 \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$. Esta equação tem uma infinidade de soluções. Como soluções gerais temos,

$$\cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \vee 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k \vee x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Digitalizada com CamScanner

29

Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$

b) $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

c) $\cos 2x = \cos\left(x - \right)$

d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

e) $\operatorname{tg} 3x - \sqrt{3} = 0$

f) $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\cos x - \operatorname{sen} x = 0$

h) $\frac{\operatorname{sen}^2 x - 1}{\operatorname{sen} x - 1} = 0$

2. $5 \operatorname{sen} x - 6 \cos^2 x - 5 = 0$

Resolução

$5 \operatorname{sen} x - 6 \cos^2 x - 5 = 0.$

Para a resolução desta equação é necessário usarmos a substituição: $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, para ficarmos com uma equação do 2.º grau. Temos assim,

$5 \operatorname{sen} x - 6(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 5 \operatorname{sen} x - 6 + 6 \operatorname{sen}^2 x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 6 \operatorname{sen}^2 x + 5 \operatorname{sen} x - 11 = 0.$

Substituindo sen x por t, obtemos $6t^2 + 5t - 11 = 0$. Resolvendo esta equação quadrática teremos: $t_1 = 1$ ou $t_2 = -\frac{11}{6}$.

Então, temos $\operatorname{sen} x = -\frac{11}{6}$ que não tem solução pois $-\frac{11}{6} < -1$ ou

$\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ que é a nossa solução geral.

3. $\cos(-2x) = -\cos 3x$

Resolução

$\cos(-2x) = -\cos 3x \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(3x + \pi)$

$\Leftrightarrow 2x = 3x + \pi + 2\pi k \vee 2x = -3x - \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -x = \pi + 2\pi k \quad \vee \quad 5x = -\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\pi - 2\pi k \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

4. $\cos x = \operatorname{sen} x$

Resolução

$\cos x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \vee x = -\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

5. $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x = 0$

Resolução

$2 \cos^2 x - \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x = 0$. Dividindo ambos os membros por $\operatorname{sen}^2 x$, obviamente com $\operatorname{sen} x \neq 0$ temos

$2 \operatorname{cotg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{cotg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{cotg} x (\operatorname{cotg} x - \sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{cotg} x = 0 \quad \vee \quad \operatorname{cotg} x - \sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Digitalizada com CamScanner

Passemos agora à resolução de inequações. Restringir-nos-emos ao caso das inequações trigonométricas simples.

Exercícios resolvidos

1. Resolva a inequação $\cos 2x \leq \frac{1}{2}$.

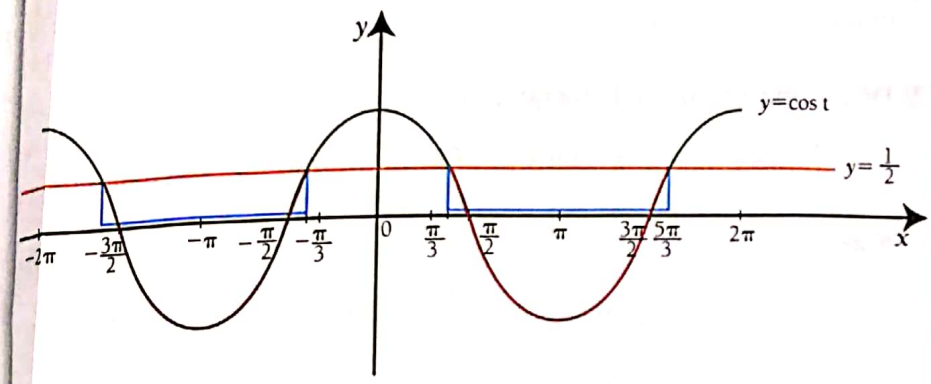
Resolução

Consideremos $2x = t$. Desenhemos o gráfico de $y = \cos t$ e tracemos a recta $y = \frac{1}{2}$

c.a.

$$\cos t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$



Esta recta intersecta o gráfico de cos x num número infinito de pontos. Na figura, destaca-se um dos intervalos da variável x onde todos os pontos satisfazem a desigualdade considerada: $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

Porém, para completarmos a solução é necessário termos em conta o período da função. Assim,

$$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \ \vee\ t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq t \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. Resolva a desigualdade $\operatorname{tg} x > 1$.

Resolução

Resolvendo inicialmente a equação $\operatorname{tg} x = 1$ obtemos os pontos onde a tangente é 1. Porém, pretendemos onde a $\operatorname{tg} x > 1$. Por representação

➡

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\frac{180°}{3}$ $\frac{60}{3}$

$\frac{180°}{000}$

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Digitalizada com CamScanner

30

Resolva as seguintes inequações trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$

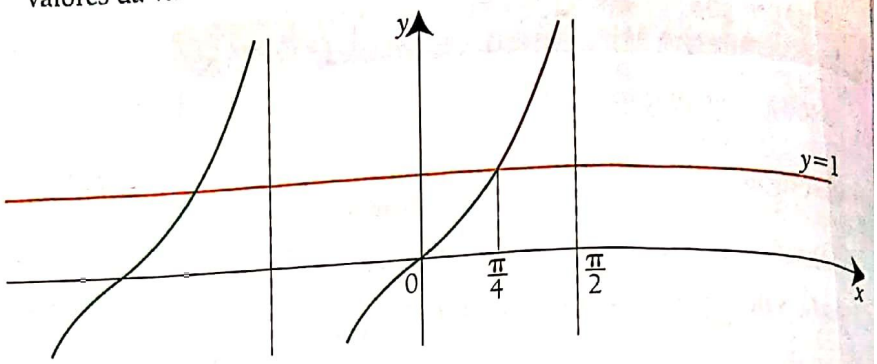
b) $\operatorname{tg}\ 3x > 1$

c) $\cos\ 3x \leq \frac{1}{2}$

d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

e) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < -1$

gráfica facilmente verificamos e podemos destacar o intervalo onde os valores da variável x são tais que $\operatorname{tg} x > 1$.



O intervalo que nos interessa é $\left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$. Pela periodicidade da tangente obtemos como solução: $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

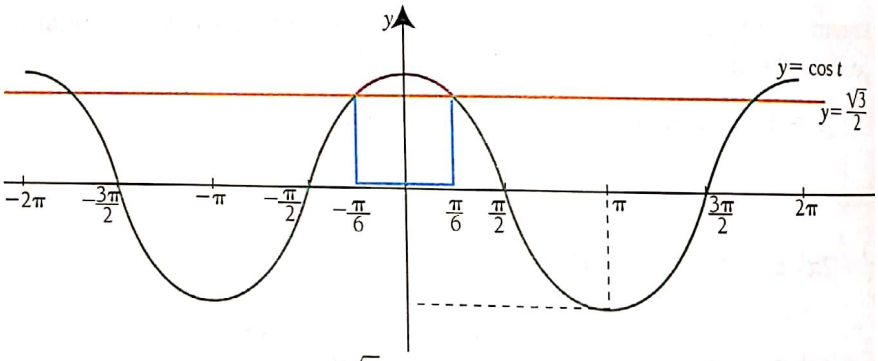
3. Determine a solução da inequação:

$\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução

$\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ pela fórmula do co-seno da diferença de ângulos.

Do mesmo modo que para os casos anteriores esbocemos o gráfico de $y = \cos t$ onde $t = \frac{\pi}{6} - x$.



Tracemos a recta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Destacando um dos intervalos onde $\cos t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ e tendo em conta a periodicidade da função coseno, temos por solução: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq t \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{\pi}{6} - x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Digitalizada com CamScanner

Equações quadráticas

Para a resolução de equações trigonométricas de 2.ª ordem, ou de equações trigonométricas quadráticas é necessário o uso das fórmulas trigonométricas através das propriedades das funções trigonométricas para os transformar numa forma mais simples.

Exercício resolvido

Resolva a equação:

$5 \operatorname{sen} x - 6 \cos^2 x - 5 = 0$.

Resolução

Usando a identidade fundamental da trigonometria,

$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

substituindo na nossa equação vem:

$5 \operatorname{sen} x - 6 (1 - \operatorname{sen}^2 x) - 5 = 0$ $\quad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x)$

$\Leftrightarrow 6 \operatorname{sen}^2 x + 5 \operatorname{sen} x - 11 = 0$ $\quad$ Substituindo $\operatorname{sen} x$ por t

temos

$6 t^2 + 5t - 11 = 0$ $\quad$ que é uma equação quadrática

Teríamos $t_1 = 1 \vee t_2 = -\frac{11}{6}$

então,

$\operatorname{sen} x = 1 \vee \operatorname{sen} x = -\frac{11}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, pois $\operatorname{sen} x = -\frac{11}{6}$ é equação impossível.

Portanto:

$S = \{x \in \mathbb{R}: x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

31

Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\cos x (1 + \cos x) = 0$

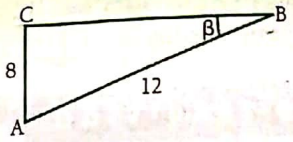
b) $\cos^2 x - 4 \cos x + 3 = 0$

Digitalizada com CamScanner

Exercícios resolvidos

1. Determine as razões trigonométricas do ângulo β da figura a baixo.

Resolução



Determinemos $\overline{BC}$

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 12^2 - 8^2$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 80$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Assim:

$\operatorname{sen}\beta = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ $\qquad \cos\beta = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

2. Determine o período de cada uma das funções trigonométricas:

a) $y = 3\operatorname{sen} 3(x - \pi)$

b) $y = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Resolução

O gráfico da família das funções

$y = a\operatorname{sen}[k(x - b)] + c$ ou $y = a\cos[k(x - b)] + c$ têm período $\frac{2\pi}{|k|}$.

Assim,

a) $3\operatorname{sen} 3(x - \pi)$ tem período, $p = \frac{2\pi}{3}$

b) $-2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ tem período, $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

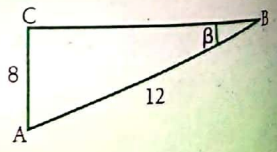
3. De acordo com os dados da figura, calcule o perímetro do triângulo [ABC].

Resolução

Usando o teorema dos co-senos, temos

$c^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10\cos 60° \Leftrightarrow c^2 = 64 + 100 - 160\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^2 = 84 \Leftrightarrow c \approx 9{,}2$



O perímetro do triângulo é 27,2 cm.

Digitalizada com CamScanner

4. Demonstre que $\operatorname{tg}(a - b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Resolução

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{sen}(a - b)}{\cos(a - b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

5. Resolva a equação: $\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 4 = 0$.

Resolução

Fazendo a substituição: $\operatorname{sen} x = t$ temos

$t^2 + 3t - 4 = 0$ que tem como raízes $t = 1$ e $t = -4$. Então, para $t = 1$ vem $\operatorname{sen} x = 1$.

Assim, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ e $\operatorname{sen} x = -4$ não tem solução.

$$S = \left\{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

6. Resolva a equação: $\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 1$.

Resolução

$$\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x + \operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x + \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x + \frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{5}{6}\pi + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

7. Mostre que $\operatorname{sen}(2x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{2 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Resolução

Partindo de um membro e transformando até obter o outro (método sintético) vem:

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = 2\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$$

c.q.d.

Digitalizada com CamScanner

1. A medida, em radianos, de um ângulo é dada por:

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{7\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} + \frac{11\pi}{8}.$$

Determine a medida do ângulo em graus.

2. Determine a medida da amplitude, em radianos, do ângulo cuja medida da amplitude, em graus, é:

a) 40°

b) 1280°

3. Diga, justificando, qual ou quais das seguintes afirmações são falsas.

a) $\text{tg } 330° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos \frac{5\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2}$

c) $\text{sen } 1350° = \text{sen } 45°$

d) $\text{sen } 2a = 2 \text{ sen } a \cos a$

e) Numa mesma circunferência definiram-se dois ângulos ao centro de amplitudes 2 rad e $\frac{11\pi}{2}$ rad. Os ângulos têm pontos comuns.

4. Considere a função real de variável real definida por: $f(x) = 5 + 2 \cos(-3x + 12)$.

a) Determine o contradomínio da função.

b) Determine o período da função.

5. Para cada uma das funções determine o período e o contradomínio:

a) $y_1 = \cos 6\pi x$

b) $y_2 = 3 \cos 3\pi x$

c) $y_3 = -1 + 3 \text{ sen}\left[\pi\left(\frac{t}{3} + 2\right)\right]$

6. A partir do gráfico de função $y = \cos x$ descreva como obter os gráficos seguintes:

a) $y = 1 + \cos x$

b) $y = 1 - \cos x$

c) $y = |\cos x|$

d) $y = \cos |x|$

e) $y = 2 + \cos \frac{x}{2}$

7. Considere as funções reais de variável real $y_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right)$ e $y_2 = 2 + \text{sen}(-2x + \pi)$

Das afirmações que se seguem assinale a verdadeira:

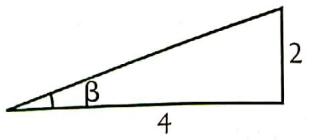
a) O contradomínio da função y_1 é $[-2, 2]$.

b) O período da função y_1 é 2.

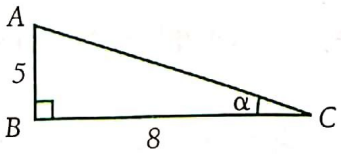
c) O período da função y_2 é $\frac{\pi}{2}$.

d) O contradomínio da função y_2 é $[-1, 3]$

8. Observe a figura. Calcule com duas casas decimais $2 \text{ tg } \beta + \text{tg } \beta - 2\text{tg } \beta$.



9. Na figura seguinte, determine sen α, cos α e tg



10. Se $\text{sen}(\theta + \pi) = -\frac{5}{13}$ e $\theta \in$ 2.° quadrant

calcule $\cos(\pi + \theta) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$.

11. Das seguintes afirmações diga quais são verdadeiras:

a) Verificou-se que os gráficos das funções trigonométricas f e g coincidiam. Isso prova que as funções são iguais.

b) São idênticas as funções f e g definidas por

$f(x) = \cos 2x - \text{sen } 2x$ e

$g(x) = 1 - \text{sen } 2x$.

c) $\text{tg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$.

d) O valor exacto de sen 405° é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Resolve cada uma das equações e indica o conjunto das soluções que pertencem ao intervalo $[-\pi, 2\pi]$:

a) $\text{sen } 2x = -\text{sen } x$

b) $\cos 3x = -\cos x$

Digitalizada com CamScanner

13. Aplicando as fórmulas:

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ e

$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$, mostre que:

a) $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

d) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

14. Demonstre as seguintes igualdades:

a) $1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$

b) $\operatorname{sen} x = \frac{-1+(\cos x + \operatorname{sen} x)^2}{2\cos x}$

c) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 2$

d) $\frac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \operatorname{sen} x \cos x$

e) $\frac{1}{1-\operatorname{sen} x} - \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos x}$

15. Simplifique as expressões:

a) $\operatorname{tg} x \cos x$

b) $\cos 3x + \cos x \operatorname{sen}^2 x$

c) $1 - \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cos x \neq 0)$

16. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\cos x - \operatorname{sen} x = 0$

b) $2\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$

c) $\frac{\operatorname{sen}^2 x - 1}{\operatorname{sen} x - 1} = 0$

d) $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

17. Resolva as seguintes inequações trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen} 2x < 0$

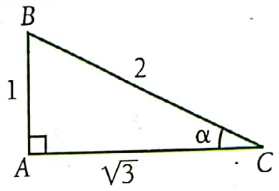
c) $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$

d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

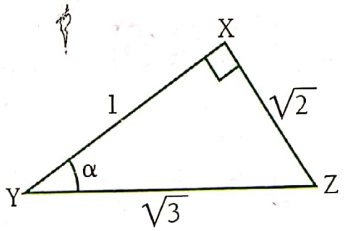
e) $2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 \geq 0$

18. Considere os seguintes triângulos:

a)



b)



Calcule o seno, co-seno e tangente de α em cada um dos casos.

19. As diagonais de um paralelogramo medem 10 cm e 8 cm, respectivamente e formam um ângulo de 60°.

Determine a área desse paralelogramo.

20. Num triângulo [ABC] traça-se uma recta CD onde D é o ponto que divide $\overline{AB}$ em segmentos de medida 9 e 6. Sabendo que $\overline{CD} = 8$, expresse a área do triângulo [ABC] em função do ângulo CDB.

21. Num triângulo [ABC], $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$ e a área $A = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Calcule a medida do ângulo A.

Digitalizada com CamScanner

Unidade 1: Introdução à Lógica Matemática p. 6

1. São termos matemáticos os seguintes:
$4 + e$; π; $\frac{1}{5}$; $\sqrt[3]{8}$;

2. A) $\Leftrightarrow$ D); C) $\Leftrightarrow$ F) são expressões equivalentes.

4.

	7	15	19
i	F	F	F
ii	F	F	V
iii	V	F	F
iv	V	F	V

5. $\sim$ P: 325 não é um número par.
$\sim$ Q: O número 21 não é um número positivo.
$\sim$ R: O número $\sqrt{3}$ não é um número racional.

b) $\sim$ P; $\sim$ Q e $\sim$ R são verdadeiros.

6.

A	B	C	D	E
V	F	V	F	F

7.a)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	F	V	V
V	V	V	V
F	F	F	F
F	V	V	F

b) De modo idêntico que para a alínea a) se constrói a tabela tendo com elementos p; q; $p \vee q$; $p \wedge (p \vee q)$.

c) De modo idêntico que para a alínea a) se constrói a tabela tendo com elementos p; q; $p \veebar q$; $p \vee q$; $p \wedge q$ e $(p \veebar q) \veebar (p \wedge q)$.

8. Verdadeira, pois apenas uma das proposições é verdadeira.

9. a) Constrói-se uma tabela tendo como elementos as proposições a; b; c; $b \vee c$; $a \vee b$; $a \vee (b \vee c)$ e $(a \vee b) \vee c$.

b) Constrói-se uma tabela tendo como elementos as proposições a; b; c; $(b \wedge c)$; $a \vee (b \wedge c)$; $(a \vee b)$; $(a \vee c)$ e $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

10. $\sim$ P: «5 é divisor do número 29».
$\sim (\sim$ P): «5 é divisor do número 29» = P.

11. i) Constrói-se uma tabela tendo como elementos as proposições: p; q; $\sim p$; $\sim q$; $(p \wedge q)$; $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$.

ii) Constrói-se uma tabela tendo como elementos as proposições: a; b; $\sim a$; $\sim b$; $(a \vee b)$; $\sim (a \vee b)$ e $\sim a \wedge \sim b$.

12. $p(x)$: Possível
$q(x)$: Possível
$r(x)$: Universal

13. $\sim p(x)$: $\sim (4x + 7 = 0) \Rightarrow 4x + 7 \neq 0$ – Possível
$\sim q(x)$: $\sim (x^2 + 3x + 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 \neq 0$ – Possível
$\sim r(x)$: $\sim$ «$(x + 3)^2 > x^2 + 6x$» $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ «$(x + 3)^2 \leq x^2 + 6x$» – Impossível

14. $\Leftrightarrow x$ é múltiplo de 7 e de 3.
$\Leftrightarrow$ «$2x > y$»
$\Leftrightarrow$ «x tem todos os lados iguais».

16. i) – V ii) – F iii) – V

17. i) – V ii) – F iii) – V

18. a) F b) F c) V
d) V e) V

19. a) $\exists x$: $|x| \neq x$ F b) $\forall x$: $x^2 \neq x$ F
c) $\exists x$: $x + \frac{1}{4} \leq x$ V
d) $\forall x$: $x + 1 \neq x$ V e) $\forall x$: $|x| \neq 0$ F

Exercícios Propostos pp. 30 e 31

1. a) i) $\sqrt{13}$; ii) 20, iii) 20; iv) 13; v) 13; vi) 20.
b) São equivalentes as designações ii); iii) e vi) e as designações iv) e v).

3. a) p – F; q – V; r – F; s – V; t – V.

b)

Proposição	P	Q	r	S	t
Valor lógico	F	V	F	V	V

4. Proposição é toda a expressão a respeito da qual faz sentido dizer se é verdadeira ou falsa.

5. a) $p \wedge q$ –F b) $p \vee q$ –V
c) $\sim q$ –V
d) $r \wedge s$ –V e) $\sim p \wedge \sim q$ –F
f) $u \wedge s$ -F g) $t \vee u$ –V.

6) «se A então B» é verdadeira, A menos que A seja verdadeira e B seja falsa. Uma afirmativa do tipo «ou» é verdadeira, a menos que ambas as condições sejam falsas. Isto diz-nos quando «não A ou B» é verdadeira e quando é falso. Compare com «se A, então B».

7) Faça uma tabela da verdade para $(x \wedge y)(x \wedge \sim y)$ e verifique que ela é igual à coluna de x. Faça uma tabela da verdade para $(x \vee y) \Rightarrow z$ e para $(x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow z)$ e verifique que as colunas correspondentes são iguais.

8. Faça tabelas conforme indicação para o exercício anterior.

9. a) $a \vee b$ b) $(a \wedge \sim b)$ c) $a \vee b$

10. Fazendo uma tabela da verdade onde constem as variáveis
a, y, $(x \wedge \sim y)$, $\sim x$, $[(x \wedge y) \wedge (x \wedge \sim y) \wedge \sim x]$ verificaremos que todos os resultados da última coluna são falsos.

11. a) A equipa A tem dez jogadores e a equipa B tem onze jogadores.
b) A equipa A não tem dez jogadores ou a equipa B não tem onze jogadores.
c) Se a equipa A tem dez jogadores então a equipe B não tem onze jogadores.
d) A equipa A tem dez jogadores, a equipa B tem onze jogadores e a equipa C tem oito jogadores.
e) A equipa B não tem onze jogadores ou a equipa A tem dez jogadores.
f) A equipa A tem dez jogadores equivale a equipa C não tem oito jogadores.
g) Se a equipe A tem oito jogadores e a equipa B tem oito jogadores então a equipa C tem oito jogadores.
h) A equipa A não tem dez jogadores e a equipa C não tem oito jogadores.

12. a) $p(x)$ – Possível; $q(x)$ – Impossível e $r(x)$ – Universal.
b) Conjunto vazio.

14. a) F b) V c) V.

15. a) $\exists x \in A$: $x + 3 \neq 10$
b) $\exists x \in A$: $x + 3 > 10$
c) $\forall x \in A$: $x + 3 \geq 7$

16. a) p- Possível; Q- impossível; r- Universal.
b) $\exists x$: $2x + 1 = 0$
$\forall x$: $x^2 + 2x + 5 \neq 0$
$\forall x$: $(x + 2)^2 \geq x^2$
c) $\exists x$: $2x + 1 \neq 0$
$\exists x$: $x^2 + 2x + 5 = 0$
$\exists x$: $(x + 2)^2 \leq x^2$

17. (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 4)

18. a) «Se o triângulo A tem 2 lados iguais então duas medianas do triângulo A são iguais».

Recíproca: B $\Rightarrow$ A: Se o triângulo A tem duas medianas iguais, então o triângulo A tem 2 lados iguais e ambos são verdadeiros.

b) A $\Rightarrow$ B – «Se o quadrilátero Q é um losango, então as suas diagonais dividem os seus ângulos ao meio».

B $\Rightarrow$ A – «Se as diagramas do quadrilátero Q dividem os seus ângulos ao meio, então Q é um losango».

Ambos são verdadeiros.

c) A $\Rightarrow$ B – «Se o número q é divisor do número k então a soma dos seus algarismos é divisível por 3».

B $\Rightarrow$ A – «Se a soma dos algarismos do número k é divisível por 3 então o número k é divisível por 9».

A $\Rightarrow$ B – É verdadeiro.

B $\Rightarrow$ A – Não é verdadeiro.

19. a) $\forall x$: $\mathbb{N}$, $\exists y \in \mathbb{N}$: $x + y$ é um número primo.
b) $\forall x \in \mathbb{N}$, $\exists y \in \mathbb{N}$: $x^3 + y^3 = 1\,000$
c) $\forall x \in L$, $\exists y \in L$: $d(x, y) = 4$

22. a) Se n é divisível por 3 então é divisível por 6; F.
b) $c_1^2 + c_2^2 = h^2$ então o triângulo [ABC] é rectângulo. V
c) Se $|x| > 1$ então $x < -1$; F

Digitalizada com CamScanner

Unidade 1: Introdução à Lógica Matemática p. 6

1. São termos matemáticos os seguintes:
$4 + e$; π; $\frac{1}{5}$; $\sqrt[3]{8}$;

2. A) ⇔ D); C) ⇔ F) são expressões equivalentes.

4.

	7	15	19
i	F	F	F
ii	F	F	V
iii	V	F	F
iv	V	F	V

5. ~ P: 325 não é um número par.
~ Q: O número 21 não é um número positivo.
~ R: O número $\sqrt{3}$ não é um número racional.
b) ~ P; ~ Q e ~ R são verdadeiros.

6.

A	B	C	D	E
V	F	V	F	F

7.a)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	F	V	V
V	V	V	V
F	F	F	F
F	V	V	F

b) De modo idêntico que para a alínea a) se constrói a tabela tendo com elementos p; q; $p \vee q$; $p \wedge (p \vee q)$.
c) De modo idêntico que para a alínea a) se constrói a tabela tendo com elementos p; q; $p \veebar q$; $p \vee q$; $p \wedge q$ e $(p \veebar q) \veebar (p \wedge q)$.

8. Verdadeira, pois apenas uma das proposições é verdadeira.

9. a) Constrói-se uma tabela tendo como elementos as proposições a; b; c; $b \vee c$; $a \vee b$; $a \vee (b \vee c)$ e $(a \vee b) \vee c$.
b) Constrói-se uma tabela tendo como elementos as proposições a; b; c; $(b \wedge c)$; $a \vee (b \wedge c)$; $(a \vee b)$; $(a \vee c)$ e $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

10. ~ P: «5 é divisor do número 29».
~ (~ P): «5 é divisor do número 29» = P.

11. i) Constrói-se uma tabela tendo como elementos as proposições: p; q; ~ p; ~ q; $(p \wedge q)$; ~ $(p \wedge q)$ e ~ $p \vee$ ~ q.
ii) Constrói-se uma tabela tendo como elementos as proposições: a; b; ~ a; ~ b; $(a \vee b)$; ~ $(a \vee b)$ e ~ $a \wedge$ ~ b.

12. $p(x)$: Possível
$q(x)$: Possível
$r(x)$: Universal

13. ~ $p(x)$: ~ $(4x + 7 = 0) \Rightarrow 4x + 7 \neq 0$ – Possível
~ $q(x)$: ~ $(x^2 + 3x + 1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 + 3x + 1 \neq 0$ – Possível
~ $r(x)$: ~ «$(x + 3)^2 > x^2 + 6x$» ⇒ $\Rightarrow$ «$(x + 3)^2 \leq x^2 + 6x$» – Impossível

14. ⇔ x é múltiplo de 7 e de 3.
⇔ «$2x > y$»
⇔ «x tem todos os lados iguais».

16. i) – V ii) – F iii) – V

17. i) – V ii) – F iii) – V

18. a) F b) F c) V
d) V e) V

19. a) $\exists x: |x| \neq x$ F b) $\forall x: x^2 \neq x$ F
c) $\exists x: x + \frac{1}{4} \leq x$ V
d) $\forall x: x + 1 \neq x$ V e) $\forall x: |x| \neq 0$ F

Exercícios Propostos pp. 30 e 31

1. a) i) $\sqrt{13}$; ii) 20, iii) 20; iv) 13; v) 13; vi) 20.
b) São equivalentes as designações ii); iii) e vi) e as designações iv) e v).

3. a) p – F; q – V; r – F; s – V; t – V.

b)

Proposição	P	Q	r	S	t
Valor lógico	F	V	F	V	V

4. Proposição é toda a expressão a respeito da qual faz sentido dizer se é verdadeira ou falsa.

5. a) $p \wedge q$ –F b) $p \vee q$ –V
c) ~ q –V
d) $r \wedge s$ –V e) ~ $p \wedge$ ~ q –F
f) $u \wedge s$ -F g) $t \vee u$ –V.

6) «se A então B» é verdadeira, A menos que A seja verdadeira e B seja falsa. Uma afirmativa do tipo «ou» é verdadeira, a menos que ambas as condições sejam falsas. Isto diz-nos quando «não A ou B» é verdadeira e quando é falso. Compare com «se A, então B».

7) Faça uma tabela da verdade para $(x \wedge y)(x \wedge \sim y)$ e verifique que ela é igual à coluna de x. Faça uma tabela da verdade para $(x \vee y) \Rightarrow z$ e para $(x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow z)$ e verifique que as colunas correspondentes são iguais.

8. Faça tabelas conforme indicação para o exercício anterior.

9. a) $a \vee b$ b) $(a \wedge \sim b)$ c) $a \vee b$

10. Fazendo uma tabela da verdade onde constem as variáveis
a, y, $(x \wedge \sim y)$, ~ x, $[(x \wedge y) \wedge (x \wedge \sim y) \wedge \sim x]$ verificaremos que todos os resultados da última coluna são falsos.

11. a) A equipa A tem dez jogadores e a equipa B tem onze jogadores.
b) A equipa A não tem dez jogadores ou a equipa B não tem onze jogadores.
c) Se a equipa A tem dez jogadores então a equipe B não tem onze jogadores.
d) A equipa A tem dez jogadores, a equipa B tem onze jogadores e a equipa C tem oito jogadores.
e) A equipa B não tem onze jogadores ou a equipa A tem dez jogadores.
f) A equipa A tem dez jogadores equivale a equipa C não tem oito jogadores.
g) Se a equipe A tem oito jogadores e a equipa B tem oito jogadores então a equipa C tem oito jogadores.
h) A equipa A não tem dez jogadores e a equipa C não tem oito jogadores.

12. a) $p(x)$ – Possível; $q(x)$ – Impossível e $r(x)$ – Universal.
b) Conjunto vazio.

14. a) F b) V c) V.

15. a) $\exists x \in A: x + 3 \neq 10$
b) $\exists x \in A: x + 3 > 10$
c) $\forall x \in A: x + 3 \geq 7$

16. a) p- Possível; Q- impossível; r- Universal
b) $\exists x: 2x + 1 = 0$
$\forall x: x^2 + 2x + 5 \neq 0$
$\forall x: (x + 2)^2 \geq x^2$
c) $\exists x: 2x + 1 \neq 0$
$\exists x: x^2 + 2x + 5 = 0$
$\exists x: (x + 2)^2 \leq x^2$

17. (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 3) (2, 4); (2, 5); (3, 4)

18. a) «Se o triângulo A tem 2 lados iguais então duas medianas do triângulo são iguais».
Recíproca: B ⇒ A: Se o triângulo tem duas medianas iguais, então o triângulo A tem 2 lados iguais e ambos são verdadeiros.
b) A ⇒ B – «Se o quadrilátero Q é um losango, então as suas diagonais dividem os seus ângulos ao meio».
B ⇒ A – «Se as diagramas do quadrilátero Q dividem os seus ângulos ao meio, então Q é um losango».
Ambos são verdadeiros.
c) A ⇒ B – «Se o número q é divisor do número k então a soma dos seus algarismos é divisível por 3».
B ⇒ A – «Se a soma dos algarismos do número k é divisível por 3 então o número k é divisível por 9».
A ⇒ B – É verdadeiro.
B ⇒ A – Não é verdadeiro.

19. a) $\forall x: \mathbb{N}$, $\exists y^{\in \mathbb{N}}: x + y$ é um número primo.
b) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}: x^3 + y^3 = 1\,000$
c) $\forall x \in L, \exists y \in L: d(x, y) = 4$

22. a) Se n é divisível por 3 então é divisível por 6; F.
b) $c_1^2 + c_2^2 = h^2$ então o triângulo [ABC] é rectângulo. V
c) Se $|x| > 1$ então $x < -1$; F

Digitalizada com CamScanner

24. V

25. a) F

26. a) F b) V

27. $1^2 + 5 \cdot 1 = 6$ e 6 é um número par.

Se $p^2 + 5p$ é um número par então $(p + 1)^2 + 5(p + 1)$ também é par, pois:

$(p + 1)^2 + 5(p + 1) =$

$= p^2 + 2p + 1 + 5p + 5 =$

$= p^2 + 5p + 2p + 6 =$

$= \underbrace{p^2 + 5p}_{\text{Par, por hipótese de indicação}} + \underbrace{2(p + 3)}_{\text{Par}} =$

28. É hereditária pois se $4p + 1$ é múltiplo de 4 também

$4(p + 1) + 1 = (4p + 1) + 4 =$ múltiplo de 4 + 4 é múltiplo de 4.

É impossível; não tem solução.

Unidade 2: Álgebra p. 32

1. $2x + 5y - 5$; $\frac{1}{4}x^2 + xy + 2$; $\sqrt{2}x + y^3 - 4$(p.e)

2. a) Verdadeira b) Falsa

3. a) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) $D =]-\infty, -1]\cup[1, +\infty]$

$]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, 3[\cup]3, +\infty$

c) $D = \mathbb{R}$ d) $D = \mathbb{R}\setminus]2, 4[$

e) $D =]1, +\infty[$ f) $\mathbb{R}^+$

4. $\sqrt{x^2} = |x|$; $D_f = \mathbb{R}$

5. a) Racional inteiro

b) Racional fracccionário;

c) Racional inteiro

d) Racional inteiro

e) Irracional

f) Racional fracccionário

g) Racional fracccionário

h) Racional inteiro

i) Irracional

6. a) $a = 6; b = \frac{2}{3}$

8. a) $(3b^2 - 2bc)(3b^2 + 2bc)$

b) $\left(2y + \frac{1}{3y}\right)\left(4y^2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9y^2}\right)$

9. a) $(u - 1)(u + 7)$

b) $(u - 3)(x^2 + 3x + 9)$

c) $(ax - 16x^3)(ax^2 + 16y^3)$

10. $-\frac{2a + x}{x^2 + 2ax + 4a^2}$

11. a) $\frac{(a + 1)(a + 3)}{x}, x \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$

b) $\frac{x(x + 1)}{a^2 + a + 1}, x \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$

c) $\frac{2(x + 4)}{x + 5}, x \in \mathbb{R}\setminus\{-5, 4\}$

12. a) $\frac{2x(1 + x)}{x + 3}$

b) $\frac{8(4 + x^3)}{x(x + 2)^2(x - 2)(x^2 - 2x + 4)}$

13. a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

d) $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ e) $\mathbb{R}$ f) $[+1, +\infty[$

14. a) S = {−1}; −4 não é solução.

b) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

c) S = {4}; $\frac{1}{3}$ não é solução.

d) $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$ e) S = 3

15. a) S = {5} b) $S = \left\{-\frac{1}{2}, -7\right\}$

c) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ d) S = {1, 2}

e) S = {0, 1} f) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

g) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ h) S = {−5, 3}

i) S = {−2, 2}

16. a) $(x - \sqrt{2x})(x + \sqrt{2x})$; $x = 0 \vee x = 2$

b) $\left(\sqrt{5} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{5} + \right)$;

$x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$

17. $6x^2 - 7x + 2$

18. a) S = {− 1, 0, 1} b) S = {0}

c) S = {0}

19. a) S = {1} b) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 2\right\}$

c) $S = \left\{0, \frac{1}{7}\right\}$ d) S = {2}

20. a) $x^3 - 3x^2 + 2x$ b) $x^3 - 4x^2 - x + 6$

21. a) $a = -\frac{11}{3}; b = 21$ b) $a = 3; b = -1$

22. a) S = {−1, 1} b) S = {−1, 1}

23. a) $S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ b) $S = \left\{-1, 1\right\}$

24. a) Expressão 1.

26. $|2x - 1| > 0$

26. a) S = {11} b) S = {1} c) $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

d) S = {2} e) S = {8} f) S = {5}

g) S = {9} h) S = {6}

i) S = {−2} j) Não tem solução

27. a) $x > -\frac{10}{3}$ b) $x \in]0, +\infty[$

c) $x \in]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$

d) $]-2, -1[$

e) $x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$

f) $0 < x < 2$

g) $x \in]-\infty, 0]\cup]3, 5]$

h) $]-5, 1[\cup]1, +\infty[$

i) $]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

j) $\left]-\infty, -\frac{5}{4}\right]\cup\left]-1, 0\right[$

k) $x \in]1, 2[\cup]3, 4[$

j) $\left]-\infty, -\frac{5}{4}\right]\cup\left]-1, 0\right[$

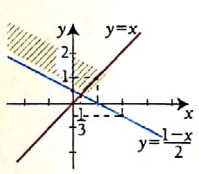
k) $x \in]1, 2[\cup]3, 4[$

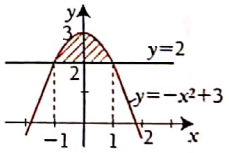
28. a) $]-\infty, -3]\cup[3, +\infty[$ b) $]-2, 7[$

c) $]-1, 0]\cup[5, +\infty[$ d) $\left]-\infty, \frac{17}{5}\right[$

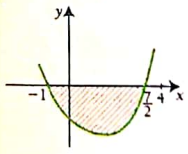
29. a) $]-1, 1[$ b) Impossível.

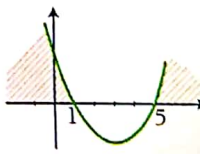
30. a) $S = \left[-\infty; \frac{1}{3}\right[$ b) $S =]-1, 1[$



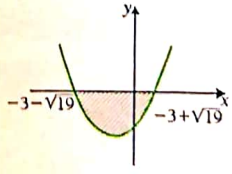


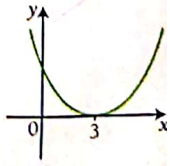
31. a) $S = \left]-1, \frac{7}{2}\right]$ b) $S =]-\infty, 2[\cup]5, +$





c) $S = [-3 - \sqrt{19}, -3 + \sqrt{19}]$





32. a) $-2 \leq x \leq 2$

b) $\frac{\sqrt{13} - 5}{2} < x \leq 1$

c) $x \in]2, 5[\cup]50, +\infty[$

d) $-3 \leq x \leq 1$

e) Impossível

f) $[-1, 1[$

Digitalizada com CamScanner

33. $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=4 \end{cases}$

34. O sistema é impossível pois não existe nenhum rectângulo com essas dimensões.

35. a) $S=\left\{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)\right\}$ b) $S=\{(3,-1)\}$

c) $S=\left\{\left(\frac{7}{13}, \frac{4}{13}\right)\right\}$ d) $S=\{(-1,2)\}$

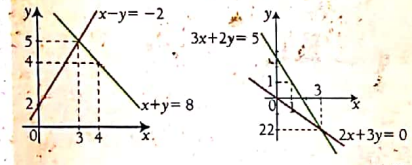
e) Não tem solução f) $S=\left\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$

g) $S=\left\{\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$

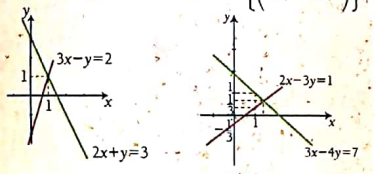
36. a) $S=\{(1,2)\}$ b) $S=\{(2,-1)\}$

c) $S=\{(0,0)\}$ d) $S=\left\{\left(\frac{2}{7}, -\frac{13}{7}\right)\right\}$

37. a) $S=\{(3,5)\}$ b) $S=\{(3,-2)\}$



38. a) $S=\{(1,1)\}$ b) $S=\left\{\left(\frac{25}{17}, \frac{11}{17}\right)\right\}$



39. a) $S=\{(-1,2)\}$ b) $S=\left\{\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)\right\}$

c) $S=\left\{\left(\frac{23}{80}, \frac{31}{80}\right)\right\}$

40. a) $S=\{(-2,1,2)\}$

b) $S=\left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

c) $S=\{(1,0,0)\}$

d) $S=\{(1,-1,2)\}$

e) $S=\left\{\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)\right\}$

41. a) $S=\left\{\left(-\frac{8}{3}, 1, \frac{7}{3}\right)\right\}$

b) $S=\left\{\left(\frac{13}{12}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)\right\}$

c) $S=\left\{\left(\frac{1-3y}{2}, y, 1\right)\right\}$

• Infinitas soluções

d) Não existem soluções

42. a) $S=\left\{\left(0, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right\}$

b) $S=\left\{\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$

Exercícios Propostos p. 69

1. a) 2

b) Não tem sentido porque o donominador é igual a zero e em $\mathbb{R}$ não podemos efectuar a divisão.

3. a) $4(x+\frac{1}{4})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

b) $(x-1)(x+1)(x^2+3)$

c) $\frac{3x(x-1)}{x(x^2+4)}$

d) $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-7)(x+7)}$

e) $\frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{4a^2+x^2}$

4. a) $k \leq \frac{9}{8}$ b) $k=\frac{9}{8}$ c) $k>\frac{9}{8}$

5. a) $2x^2-11x-21=0$

b) $8x^2-2x-1=0$

c) $15x^2-59x-30=0$

d) $x^2-26x-96=0$

6. a) $-\frac{1}{6}, -\frac{7}{6}$ b) 0,7 e 1,5

7. a) $t=\frac{25n-50}{1-n}$ e $n>1$

8. a) Não tem raízes reais

b) $S=\left\{-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

c) $S=\{1, \sqrt[3]{4}\}$ d) $S=\{0,1,5\}$

e) $S=\{-2,2\}$ f) $S=\{-\sqrt{5}, -1, \sqrt{5}\}$

9. a) $S=\{-2,2,3\}$

10. $S=\{-1,0,1,2\}$ 11. $p=-3$

12. a) $S=\varnothing$ b) $S=\varnothing$ c) $S=\{3\}$

13. a) $[-6,-2] \cup [1,3]$ b) $]-4,0[\cup]0,1[$

c) $-2 \leq x \leq 2$

d) $x \leq -2 \vee -1 \leq x < \frac{\sqrt{13}-1}{6}$

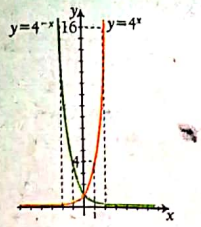
e) $x \geq 50$

14. a) $S=\{(1,-2,-2)\}$ b) $S=\{(-15,8,2)\}$

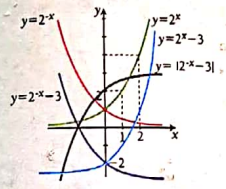
c) $S=\left\{\left(\frac{11}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

Unidade 3: Equações e Inequações Exponenciais p. 70

2. a)



3.



4. a) $S=\{-3\}$ b) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

c) $S=\{-1,1\}$ d) $S=\{-4\}$

e) $S=\{-5,1\}$ f) $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

g) $S=\{1,3\}$ h) $S=\{5\}$

i) $S=\{2\}$

5. a) $x \in]-\infty, 0[$ b) $x \in]2, +\infty[$

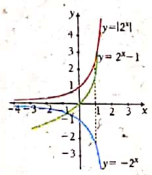
c) $x \in]0{,}5; 1[$ d) $x \in]-1; +\infty[$

Exercícios Propostos p. 83

1. Falsas: A.; B. Verdadeiras: C.; D.; E

2. a) 22 símbolos b) 6 minutos

3. a), b), c).



4. a) $x=\{-1,1\}$ b) $x=-\frac{1}{2}$

c) $x=4$ d) $x=2$

e) $x=0$. f) $x=-1$

5. a) $x=]2,+\infty[$

b) $x=\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, -+\infty\right[$

c) $x=\left]-\infty, -1\right]$ d) $x=\left]0{,}5, 1\right]$

e) $x<-1$

6. A. Falsa. Não é do tipo $x \smile a^x$, com $a>$ e $a \neq 1$.

B. Falsa. Não é do tipo $x \smile a^x$, com $a>$ $a \neq 1$.

C. Falsa. $4^x > 0$

D. Falsa. $f(0) \neq 1$

E. Falsa. $3^x + 3^{+x} \neq 3^0$

Digitalizada com CamScanner

7. a) $x \leq \frac{5}{4}$ b) $x \geq \frac{3}{5}$
c) $x < 0 \vee x > \frac{1}{2}$ d) $x \geq -\frac{5}{3} \wedge x \leq 3$
e) $x < 0 \vee x \geq \frac{1}{2}$ f) $x \geq 0 \wedge x < 3$

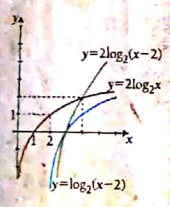
8. a) $x = 1$ b) Não há
c) $x = 0$ d) $x = 0$

Unidade 4: Equações e Inequações Logarítmicas p. 84

1. a) $\frac{1}{5}$ b) 25 c) 2
d) 5 e) 3

2. a) $D = \mathbb{R}^+$; $D' = \mathbb{R}$
b) $D =]-\infty, 0[$; $D' = \mathbb{R}$
c) $D =]-2, +\infty[$; $D' = \mathbb{R}$
d) $D =]-3, +3[$; $D' = \mathbb{R}$
e) $D =]1, +\infty[$; $D' = \mathbb{R}$

3. a) $\log \frac{(2x-5)(3x+7)}{2^4} = 0$
b) $\log_2 \frac{2x+7}{2-7} = 3$
c) $\log \frac{2^2(x^2-1)}{4x-1} = 0$

4. 

5. a) 81 b) $\frac{1}{64}$ c) 4

6. a) -3 b) 3 c) -3

7. a) $S = \{6\}$ b) $S = \{\frac{1}{8}, 3\}$ c) $S = \{13\}$

8. a) $x \in [1, +\infty[$ b) $x \in [0{,}382; 0{,}4[$
c) $x \in]0{,}5; 1[$

9. a) $S = \{(10, 10)\}$

Exercícios Propostos p. 99

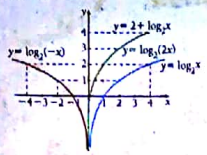
1. a) $]5, +\infty[$ b) $]-\infty, 7[$ c) $]-2, 3[$

2. A.

3. a) $\frac{8}{7}$ b) 3 c) 1,5; 3
d) 2 e) 9; 91 f) -1; 0

4. a) $]\frac{1}{5}; 1[$ b) $x < \log_5 3$

6. B.

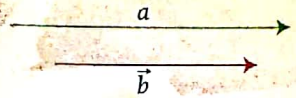
7. a), b, f e c.


8. a) Verdadeira. $y = \log_a x$ é injectiva.
b) Verdadeira. $y = a^x$ é injectiva.
c) Falsa. Se $0<1$ $a<1$, $\log a^x < \log a^x \Leftrightarrow x > y$.
d) Falsa. Se $0 < a < 1$, $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$.

9. a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{8}{7}$ c) $\{\frac{1}{4}, 4\}$
d) 7 e) 0,5 f) $\{1, 5, 3\}$
g) $\{0{,}01; 0{,}001\}$ h) 2 i) $\{\frac{1}{7}, 7\}$
j) $\{-1, 0\}$ k) 2

Unidade 5: Geometria Analítica no Plano p. 100

1. a) 2 b) $\sqrt{17}$ c) $\sqrt{13}$

2. a) 

b) 

3. A projecção é igual a zero.

4. $\frac{2\sqrt{104}}{2} = \sqrt{104}$

5. a) (8, −16) b) (1, −2)

6. Uma só. Pelo teorema do desenvolvimento de um vector numa base dada.

7. a) (−19, 0) b) $\left(\frac{74}{5}, -\frac{32}{5}\right)$

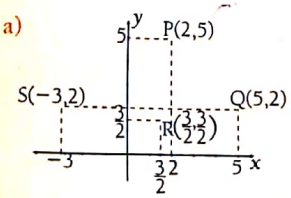
8. a) 6 b) 0 c) −5

9. a) 0 b) $\frac{49}{2}$ c) 7

10. 8

11. −8

13. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -25$ b) $u \cdot w = -14$
c) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 10$

14. a) 

b) $\overline{P_1P_2} = 3\sqrt{2}$; $\overline{P_1P_3} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$; $= \overline{P_2P_4} = 8$

15. a) $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ b) M (−4, 4)

16. Por A: $(x, y) = (-3, 0) + k(2, 2), k \in \mathbb{R}$
Por B: $(x, y) = (-5, -2) + k(2, 2), k \in \mathbb{R}$

17. $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

18. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

19. $y = \frac{1}{2}x + 3$

20. $y = \frac{2}{3}x$

21. $y = \frac{1}{4}x$

22. $m = 2$

23. a) As rectas encontram-se num ponto. Concorrentes.
b) Paralelas, mas não coicidentes.
c) Paralelas

24. a) Paralelas: $k = -\frac{1}{4}$
b) Concorrentes: $k \neq -\frac{1}{4}$

25. a) $k = \frac{11}{2}$ b) $k = -3$

26. $a = \pm 4$

27. $\theta \approx 40°$

28. $k = 7{,}5$

29. a) Concorrentes
b) Paralelas

30. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

31. a) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$
b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

33. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right); \left(\frac{9}{2}; \frac{19}{2}\right)$

34. $d = 2$

35. a) $d = 10$ b) $d = 2\sqrt{10}$

36. $d = 2{,}5$

37. a) $d = 10$ b) = 6,3

38. a) $3x - 11y = 20$; $11x + 3y = 30$
b) $2x - y = 0$; $x + 2y = 0$

39. A(−2, −1)

40. $x - 3y + 5 = 0 \vee 3x + y - 5 = 0$

41. a) $x^2 + (y-2)^2 = 16$
b) $(y+2)^2 + (y-2)^2 = 5$
c) $x^2 + y^2 = 34$
d) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$
e) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 52$

42. a) $C \circlearrowleft (3, 1)$; $r = 5$
b) $C \circlearrowleft (-2, 3)$; $r = 1$

Digitalizada com CamScanner

c) $C_{\smile}(0, 6)$; $r = 2$

d) $C_{\smile}(0, 0)$; $r = \sqrt{7}$

43. a) A circunferência de centro $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ e raio $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

b) O ponto $(-1, 2)$.

c) A circunferência de centro $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$ e o raio $\frac{1}{6}$.

d) O conjunto vazio.

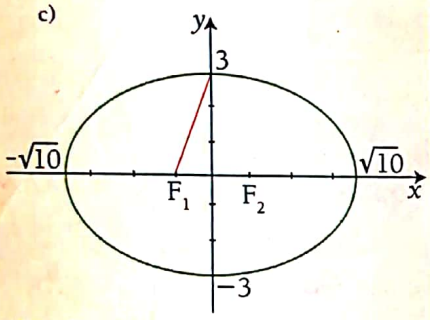
44. a) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $F_1{}_{\smile}(-1, 0)$; $F_2{}_{\smile}(1, 0)$

Vértices: $(\sqrt{10}, 0)$; $(\sqrt{-10}, 0)$;

$(0, 3)$; $(0, -3)$; $e = \frac{\sqrt{10}}{10}$

c)

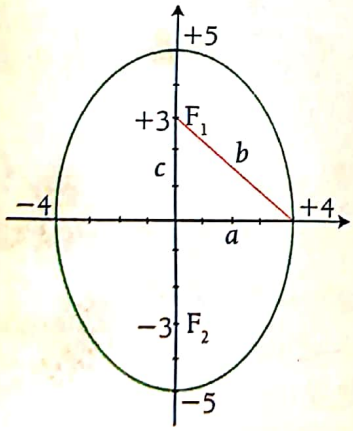


45. a) $F_1{}_{\smile}(0, +3)$; $F_2{}_{\smile}(0, -3)$

Vértices: $(+4, 0)$; $(-4, 0)$;

$(0, -5)$; $(0, +5)$; $e = \frac{3}{5}$

b)



46. $\frac{(x-2)^2}{98} + \frac{(y+10)^2}{49} = 1$

47. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{64}{5}} = 1$

48. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{128} = 1$

49. É uma hipérbole.

$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$

50. a) É uma hipérbole.

$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

b) É uma elipse.

$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$

Exercícios propostos pp. 141 a 143

1. Têm sentidos contrários.

2. a) (2, 7); b) (− 5, 13) c) (2, 7)

3. c) Paralelogramo.

4. $\vec{v} = (-9, -12)$ v $\vec{v} = (9, 12)$

5. a) $\vec{a} = \vec{9i} - \vec{6j}$ v $\vec{a} = -\vec{9i} + \vec{6j}$

b) $\vec{a} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{29}} - \frac{2\vec{j}}{3}$ $\sqrt{6}$

6. a) $\frac{}{10}$ b) $\frac{}{2}$

7. $\|\vec{w}\| = 2$, $|\vec{s}| = \frac{\sqrt{73}}{2}$

8. $-\frac{2}{9}$ 9. b)

11. a) Os pontos A, B e C não estão alinhados.

b) $x = \frac{11}{5}$ e $y = -\frac{4}{5}$

12. $\vec{AD} = -\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{BD} = -2\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{DO} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

14. a) 13 b) 58,24°

15. b), c), d) 16. $\sqrt{13}$, $\sqrt{41}$ e $7\sqrt{2}$

18. −1 19. $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

20. $P\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ 21. $P\left(0, \frac{5}{4}\right)$

22. P(6, 11) 23. $\frac{9}{2}$

24. M(5, 4) 25. a) $\vec{AB} = (2, 1)$

b) $(x, y) = (1, 2) + k(2, 1)$, $k \in \mathbb{R} \rightarrow$ recta AB;
$(x, y) = (1, 2) + k(2, 1)$, $k \in]-\infty, 1]$ semi-recta BA;
$(x, y) = (1, 2) + k(2, 1)$, $k \in [0, 1]$ segmento de recta [AB].

26. $a = \frac{5}{2}$

27. $a = 3$, $b = -1$

28. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

29. $y + 3 = a(x - 2)$

30. $a = 2$ 31. $y = -3$

32. $a = 3$

33. a) $y = -\frac{2}{3}x$; b) $x = -3$

c) $y = -x + 9$ d) $x = -1$

34. a) $3x + 2y - 19 = 0$

b) $x + y - 1 = 0$ c) $2x + 3y - 9 = 0$

35. $t = -2$

36. a) Paralelas e distintas.

b) Coincidentes. c) Concorrentes.

37. $6x - y + 22 = 0$

38. a) Circunferência de centro $C(-8, -6)$ e $r = 10$.

b) Circunferência de centro $C\left(5, -\frac{7}{2}\right)$ e $\frac{1}{2}\sqrt{113}$.

c) Ponto $C(2, -1)$

d) Conjunto vazio.

39. $C(-2, 1)$

40. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$

41. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

42. a) Vértices: $(\pm 10, 0)$, $(0, \pm\frac{5}{2})$

Focos: $(\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}, 0)$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Semi-eixo maior: 10

Semi-eixo menor: $\sqrt{3}$

b) Vértices: $(\pm\sqrt{3}, 0), (0, \pm\sqrt{5})$

Focos: $(0 \pm \sqrt{2})$; $e = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Semi-eixo maior: $2\sqrt{5}$

Semi-eixo menor: $\frac{5}{2}$

43. a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

44. a) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

b) $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{25} = 1$

45. a) Vértices: $(0, \pm 2)$; Focos $(0, \pm 2\sqrt{10}$

$e = \sqrt{10}$; Assímptotas: $y = \pm\frac{1}{3}x$

b) Vértice: $\left(\pm\frac{1}{3}, 0\right)$;

Focos: $\left(\pm\frac{\sqrt{34}}{15}, 0\right)$;

$e = \frac{\sqrt{34}}{5}$;

Assímptotas: $\pm\frac{3}{5}x$

46. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

Digitalizada com CamScanner

47. B – Falsa. Declive é a tangente trigonométrica da inclinação.

48. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

49. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$

50. a) Focos: (4, −3); (−6, −3)

b) Vértices: (3, −3); (−5, −3)

51. a) Focos: (5, 2); (−3, 2)

b) Vértices: (6, 2); (−4, 2); (1, 5); (1, −1)

c) Excenticidade: $e = \frac{x^2}{27}$

Unidade 6: Trigonometria p. 144

1. a) tg $\alpha = 0{,}65$; sen $\alpha = 0{,}55$; cos $\alpha = 0{,}84$; cotg $\alpha = 1{,}53$;

2. a) $x = 3{,}86$ b) $x = 4{,}83$

3. a) 4,8 cm e 8,3 cm

4. sen $x = 0{,}848$; cos $x = 0{,}53$; tg $x = 1{,}6$

5. sen $\alpha = \frac{a}{c}$; cos $\alpha = \frac{b}{c}$; tg $\alpha = \frac{a}{b}$

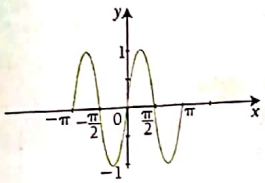
sen $\beta = \frac{b}{c}$; cos $\beta = \frac{a}{c}$; tg $\beta = \frac{b}{a}$

6. a) Falsa porque, por exemplo,

cotg $30° = \sqrt{3} > 1$

b) Falsa porque, $0 \leq \cos \alpha \leq 1$, $\forall \alpha \in [0, 90°]$

7. a)



b) $\left\{-\pi, -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}$

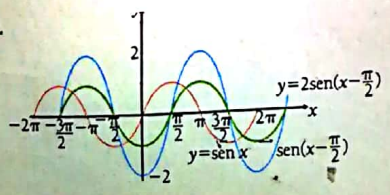
c) $\left\{-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5}{12}\pi\right\}$

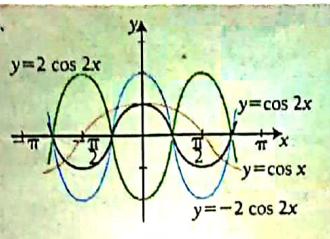
8. a) p = $\frac{2\pi}{6}$ b) p = 8 c) p = $\frac{1}{2}$

d) p = $\frac{2\pi}{3}$ e) p = 1

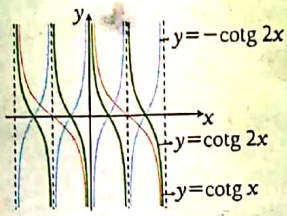
9.



10.



11.



12. d = 122,5 m

13. 14 cm

14. a = 10,65 cm; c = 11,55 cm e perímetro é 30,2 cm.

15. a) = 19,64 cm

b) = 14,91 cm

c) = 18,60 cm

16. a) $\hat{A} = 42{,}5°$ $\hat{B} = 38{,}6°$ $\hat{C} = 98{,}9°$

17. A. V B. F C. F D. V E. V

18. $\alpha = 59{,}5°$; $\beta = 35{,}6°$; $\gamma = 84{,}9°$.

19. $\frac{1^2 + 1^2 - 3^2}{2} < 0$

21. a) −cos 54° b) −sen 60°

c) −cos 30° d) −tg 30°

22. a) sen x b) cos x

23. $-\frac{31}{20}$

24. $-\sqrt{\frac{7}{9}}$

25. a) $-\frac{1}{\text{sen } x}$ b) sen x

27. a) cos $x = \frac{3}{5}$; sen $2x = \frac{24}{25}$;

cos $2x = -\frac{7}{25}$; tg $2x = -\frac{24}{7}$;

b) 2.º Q

28. a) 2 sen $2x$ cos y

b) 4 sen $4x$ cos $2x$ cos x

c) 4 cos x cos $2x$ cos $5x$

29. a) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \vee x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k \vee x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

f) $x = \frac{\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$

g) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

h) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

30. a) $\frac{5\pi}{24} + \pi k \leq x \leq \frac{13\pi}{24} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k < x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $-\frac{\pi}{8} + \pi k < x < \frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

e) $\frac{3\pi}{4} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

31. a) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \vee x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

Exercícios Propostos pp. 174 e 175

1. −97,5°

2. a) $\frac{2\pi}{9}$ rad b) $\frac{64\pi}{9}$ rad

3. a) V. tg 330° = tg (360° − 30°) =

$= -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) V. $\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2}$

c) F. sen 1350° = sen $\frac{3}{2}\pi$ d) V.

4. a) $D'_f = [3, 7]$

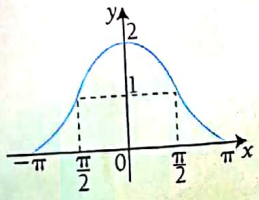
b) O período é $\frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2\pi}{3}$

5. a) $\frac{1}{3}$, $[-1, 1]$

b) 1, $[-3, 3]$

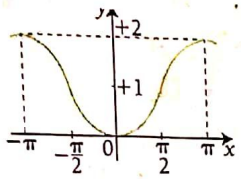
c) 6, $[-4, 2]$

6. a) O gráfico sobe uma unidade

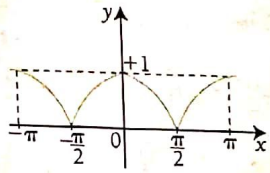


Digitalizada com CamScanner

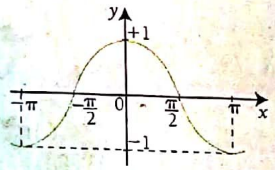
b) O gráfico de $y = -\cos x$ é simétrico ao gráfico de $y = \cos x$ em relação ao eixo dos xx. Subindo este último uma unidade obtemos o gráfico de $y = 1 - \cos x$



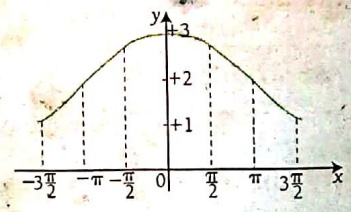
c) Os pontos de ordenada positiva ou nula mantêm-se e os pontos de ordenada negativa passam a ser os simétricos em relação ao eixo dos xx.



d) Os gráficos de $y = \cos|x|$ e de $y = \cos x$ são iguais.



e) O gráfico de $y = \cos x$ estica na horizontal segundo o factor 2. Obtemos o gráfico de $y = \cos \frac{x}{2}$. Subindo o gráfico de $y = \cos \frac{x}{2}$ duas unidades obtemos o gráfico de $y = 2 + \cos \frac{x}{2}$.



7. b)

8. 0,50

9. sen $\alpha = 0{,}53$; cos $\alpha = 0{,}85$; tg $\alpha = 0{,}62$

10. $-\frac{24}{13}$

11. d)

12. a) $S = \left\{-\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi, -\pi, \pi\right\}$

b) $S = \left\{-\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{4}\pi, -, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{4}\pi\right\}$

15. a) sen x b) cos $x(1 - 3\,\text{sen}^2 x)$

c) $\text{tg}^2 x$

16. a) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \pi k$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ v $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

d) $x = \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$

17. a) $\frac{5\pi}{24} + \pi k \leq x \leq \frac{13\pi}{24} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

d) $-\frac{\pi}{8} + \pi k < x < \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

e) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

v $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

18. a) sen $\alpha = \frac{1}{2}$; cos $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) sen $\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$; cos $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$.

19. $A = 20\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

20. A = 60 sen (CDB)

21. $\hat{A} = 30°$

Digitalizada com CamScanner