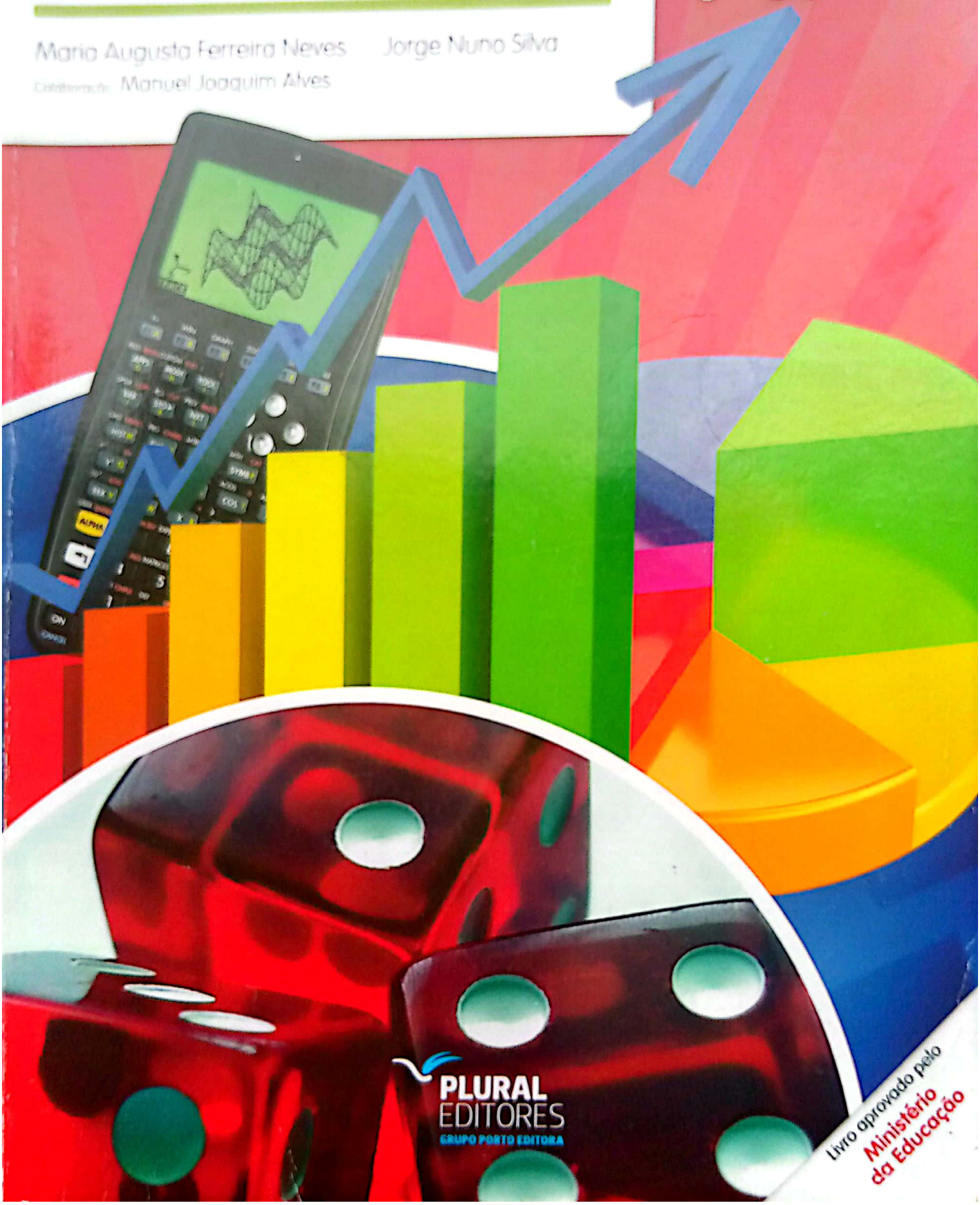
De acordo com os novos programas

Matemática 11.ª classe

Maria Augusta Ferreira Neves Jorge Nuno Silva
Colaboração: Manuel Joaquim Alves



PLURAL EDITORES
GRUPO PORTO EDITORA

Livro aprovado pelo Ministério da Educação

Digitalizada com CamScanner

Apresentação do Manual

Maria Augusta Ferreira Neves

Doutorada em Educação Matemática. Leccionou cadeiras da área científica de Matemática e da Didáctica da Matemática no Instituto Politécnico do Porto e na Universidade do Minho. Investigadora em Didáctica da Matemática e autora de manuais escolares.

Site: www.augusta-neves.net

Jorge Nuno Silva

Doutorado em Matemática por Berkeley.

Professor de História da Matemática da Universidade de Lisboa. Especialista em História de Jogos de Tabuleiro. Autor de livros de Matemática, de História da Matemática, de jogos e de divulgação.

Este manual foi elaborado de maneira a respeitar a forma como o aluno aprende, como o aluno pode ser ensinado e como o aluno é avaliado.

O programa da 11.ª classe tem seis capítulos. Em cada capítulo do programa, que é apresentado no manual, promove-se o desenvolvimento de competências e capacidades gerais, das quais se destacam:

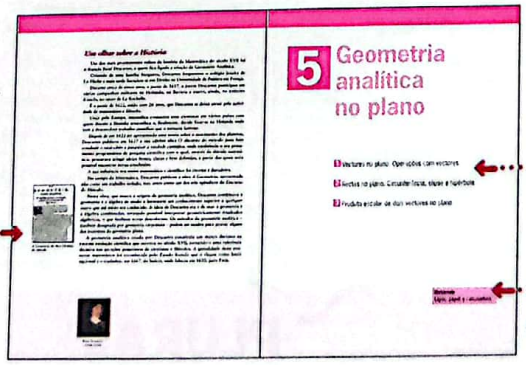
1. Utilizar e interpretar simbologia específica de Matemática.
2. Usar linguagem específica de Matemática.
3. Ler e interpretar textos da vida real e adaptar modelos matemáticos que descrevam as situações apresentadas.
4. Aplicar diferentes estratégias de resolução de problemas.
5. Interpretar e criticar resultados obtidos analiticamente ou com tecnologia gráfica.
6. Resolver problemas em contextos científicos de áreas diferentes da Matemática, aplicando métodos matemáticos.
7. Estabelecer conexões entre diferentes conceitos matemáticos.
8. Prever resultados para situações problemáticas e verificar a adequabilidade desses resultados.
9. Descrever raciocínios demonstrativos usando diferentes métodos de demonstração.
10. Descrever com clareza e rigor raciocínios que suportam estratégias de resolução de problemas.
11. Formular conjecturas para regularidades observadas com e sem experimentação.
12. Usar tecnologia gráfica em diferentes contextos, nomeadamente para:
    - efectuar cálculos;
    - prever resultados;
    - confirmar respostas;
    - acompanhar o trabalho analítico;
    - obter gráficos;
    - resolver problemas;
    - modelar situações reais.

Organização do manual

Os capítulos estão divididos por temas e em cada abertura de capítulo encontra:

- **Abertura de capítulo**

Um pouco de história para enquadrar o estudo do capítulo na história da Matemática e promover a pesquisa histórica.



Os temas em que o capítulo se desenvolve.

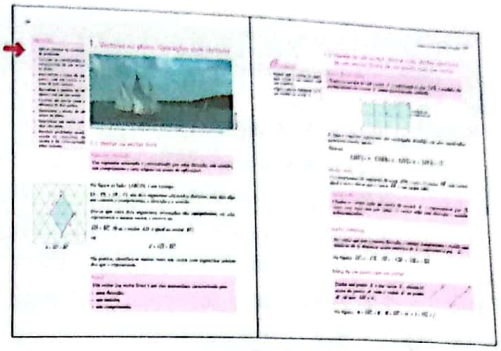
Material necessário ao estudo do capítulo.

ISBN 978-989-611-154-0

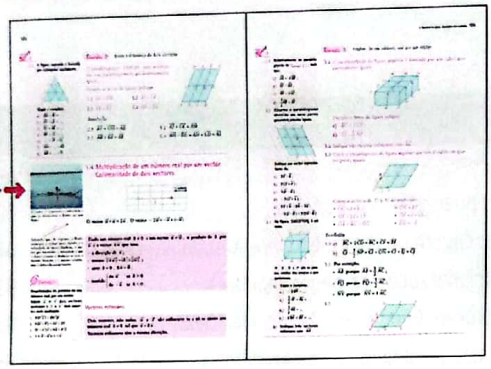
Digitalizada com CamScanner

• Abertura de tema

Para motivar e tornar agradável do ponto de vista gráfico, o tema abre com uma imagem acompanhada dos seus objectivos específicos que indicam a forma como a sequência das matérias é desenvolvida e também ajudam o aluno a organizar o seu estudo.

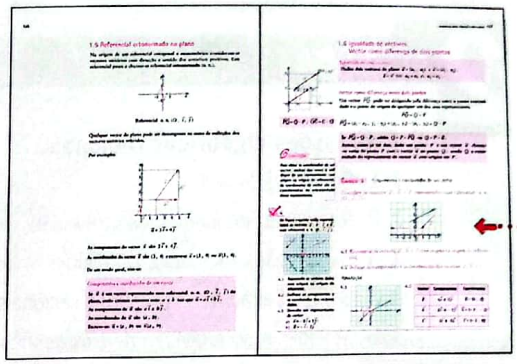


• Desenvolvimento da matéria



Partindo de contextos reais e exemplos com significado para os alunos, procurou-se estimular a descoberta guiada.

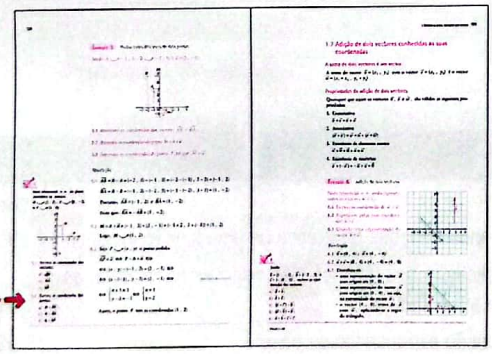
• Exemplos



Os conceitos tornam-se mais claros quando são aplicados em contextos diversificados da Matemática, da vida real ou de outras ciências.

Os exemplos enriquecem o desenvolvimento da matéria procurando dar-lhe sentido através da aplicação em novas situações.

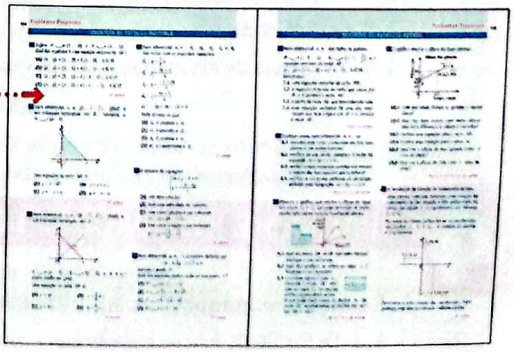
• Verificação sistemática da aprendizagem



Será que o estudante está a compreender o desenvolvimento da matéria? A experiência diz-nos que não se deve avançar sem saber o que está para trás. Esta é a razão porque encontra aqui uma questão estratégica para verificar passo a passo a sua aprendizagem.

• Problemas propostos

No final de cada tema encontra um conjunto alargado de problemas propostos com questões de escolha múltipla e questões de resposta aberta. Com estes problemas pretende-se a consolidação das aprendizagens.



• Simbologia

✓ – Verifique a sua aprendizagem

6 – Tome em consideração

• Poderá encontrar no *site* **www.pluraleditores.co.mz** resoluções detalhadas de todos os exercícios propostos neste manual.

Digitalizada com CamScanner

Índice

1 INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

Pág.

1. Iniciação à lógica bivalente

1.1 Termos e proposições 8
1.2 Equivalência de designações e proposições 10
1.3 Operações lógicas definidas no universo das proposições e no universo lógico 12
1.4 Propriedades das operações lógicas 19

Problemas Propostos 22

Pág.

2. Expressões algébricas. Quantificadores

2.1 Expressões algébricas. Classificação 28
2.2 Quantificadores 30
2.3 Segundas leis de De Morgan 35
2.4 Princípio de indução matemática 36

Problemas Propostos 38

2 ÁLGEBRA

Pág.

1. Expressões algébricas racionais

1.1 Equações (revisão) 42
1.2 Resolução de inequações (revisão) 45
1.3 Expressões racionais. Domínio 46
1.4 Simplificação de expressões racionais 48
1.5 Multiplicação e divisão de expressões racionais 49
1.6 Adição e subtracção de expressões racionais 50
1.7 Equações e inequações fraccionárias 51

Problemas Propostos 56

2. Expressões algébricas irracionais

2.1 Raiz quadrada e raiz cúbica. Radicais 58
2.2 Radical como potência de expoente racional 59

Pág.

2.3 Propriedades dos radicais 60
2.4 Passagem de um factor para fora de um radical 61
2.5 Racionalização de denominadores 61
2.6 Domínio de uma expressão irracional 62
2.7 Equações e inequações irracionais 64

Problemas Propostos 68

3. Sistemas de equações

3.1 Sistemas de duas equações a duas incógnitas (revisão) 70
3.2 Sistemas de três equações a três incógnitas 72
3.3 Resolução de sistemas pelo método de Cramer 76

Problemas Propostos 78

3 EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Pág.

1. Equações e inequações exponenciais

1.1 Função exponencial (revisão) 82
1.2 Propriedades das funções exponenciais 85
1.3 Equações exponenciais 88
1.4 Resolução de inequações exponenciais 89

Pág.

1.5 Transformações do gráfico de uma função exponencial 90
1.6 Aplicação das funções exponenciais na modelação de situações reais 91
1.7 Função exponencial de base e 92

Problemas Propostos 96

4 EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Pág.

1. Equações e inequações logarítmicas

1.1 Definição de função logarítmica 100
1.2 Logaritmos com bases especiais 102
1.3 Propriedades das funções logarítmicas 103
1.4 Propriedades operatórias dos logaritmos 104

Pág.

1.5 Equações logarítmicas 106
1.6 Inequações logarítmicas 109
1.7 Resolução de problemas da vida real utilizando logaritmos 111

Problemas Propostos 116

Digitalizada com CamScanner

5 GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

Pág.

1. Vectores no plano. Operações com vectores

1.1 Vector ou vector livre 120
1.2 Norma de um vector. Vector nulo. Vector simétrico de um vector. Soma de um ponto com um vector 121
1.3 Adição e subtracção de vectores 122
1.4 Multiplicação de um número real por um vector. Colinearidade de dois vectores 124
1.5 Referencial ortonormado no plano 126
1.6 Igualdade de vectores. Vector como diferença de dois pontos 127
1.7 Adição de dois vectores conhecidas as suas coordenadas 129
1.8 Produto de um número real por um vector. Diferença de dois vectores 130
1.9 Norma de um vector. Vectores colineares 131

Problemas Propostos 132

2. Rectas no plano. Circunferência, elipse e hipérbole

2.1 Distância entre dois pontos no plano 134
2.2 Mediatriz de um segmento de recta 135
2.3 Circunferência e círculo 136
2.4 Coordenadas do ponto médio de um segmento de recta 138
2.5 Equação vectorial de uma recta no plano 139
2.6 Equação reduzida de uma recta no plano 140
2.7 Declive de uma recta. Interpretação do declive 142
2.8 Equação de uma recta dados um ponto e o declive 144
2.9 Equação de uma recta dados dois dos seus pontos 144
2.10 Posição relativa de duas rectas no plano 145
2.11 Determinação do ponto de intersecção de duas rectas conhecidas as suas equações 146
2.12 Distância de um ponto a uma recta 148
2.13 Estudo da elipse 151
2.14 Estudo da hipérbole 155

Problemas Propostos 158

3. Produto escalar de dois vectores no plano

3.1 Produto escalar de vectores. Definição 160
3.2 Consequências da definição de produto escalar 162
3.3 Propriedades do produto escalar 162
3.4 Expressão analítica do produto escalar 163
3.5 Aplicações do produto escalar 165
3.6 Ângulo de duas rectas. Rectas perpendiculares 166
3.7 Inclinação de uma recta 167
3.8 Rectas perpendiculares 168

Problemas Propostos 170

6 FUNÇÕES, EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Pág.

1. Introdução ao estudo da trigonometria. Razões trigonométricas no triângulo rectângulo (revisão)

1.1 Medidas de ângulos: o grau e o radiano 174
1.2 As razões trigonométricas num triângulo rectângulo 177
1.3 As razões trigonométricas de ângulos especiais 178
1.4 A calculadora gráfica e as razões trigonométricas 180

Problemas Propostos 184

2. Generalização da noção de ângulo. Razões trigonométricas de um ângulo qualquer (revisão)

2.1 Ângulo orientado 186
2.2 Ângulo num referencial 187
2.3 Generalização da noção de ângulo 187
2.4 Definição das razões trigonométricas de um ângulo qualquer 190
2.5 Linhas trigonométricas 192
2.6 Sinal das razões trigonométricas 193
2.7 Razões trigonométricas dos ângulos $0°$ (0); $90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $180°$ (π) e $270°\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 193
2.8 Redução ao 1.º quadrante 195

Problemas Propostos 200

3. Funções trigonométricas como funções reais de variável real. Utilização das funções trigonométricas na modelação de situações reais

3.1 Funções trigonométricas como funções reais de variável real 202
3.2 Gráficos de funções trigonométricas 202
3.3 Estudo intuitivo das funções trigonométricas 204
3.4 Transformações dos gráficos das funções trigonométricas 207
3.5 Aplicação das funções trigonométricas na modelação de situações reais 211
3.6 Utilização da calculadora na modelação de funções cujo gráfico é uma sinusóide 215

Problemas Propostos 216

4. Equações trigonométricas. Fórmulas trigonométricas

4.1 Equações trigonométricas 218
4.2 Fórmula fundamental da trigonometria 226
4.3 Fórmulas trigonométricas do seno, co-seno e tangente da soma e da diferença de dois ângulos 230
4.4 Fórmulas da duplicação 232
4.5 Fórmulas da bissecção 234
4.6 Fórmulas da transformação 235
4.7 Resolução de equações e de inequações trigonométricas aplicando as fórmulas trigonométricas 237

Problemas Propostos 238

5. Resolução de triângulos. Fórmulas dos co-senos e dos senos

5.1 Fórmula dos co-senos 240
5.2 Fórmula dos senos 243

Problemas Propostos 246

Soluções* 248

Programa Oficial 269

* Poderá encontrar no *site* **www.pluraleditores.co.mz** resoluções detalhadas de todos os exercícios propostos neste manual.

Digitalizada com CamScanner

Um olhar sobre a História

Desde a Antiguidade grega que os homens se preocupam com o estudo das leis do pensamento válido. É muito fácil errar quando se trata de tirar conclusões... Aristóteles (século IV a. C.) instituiu o modelo dos silogismos, que consistiam em duas premissas das quais se retira infalivelmente uma conclusão. Um exemplo:

Primeira premissa: Todos os homens são mortais.

Segunda premissa: Sócrates é um homem.

Conclusão: Sócrates é mortal.

Na Idade Média, o currículo incluía, lado a lado com uma parte "de ciências" – Aritmética, Música, Geometria e Astronomia – três disciplinas muito importantes que constituíam o *trivium*: Gramática, Retórica e Lógica.

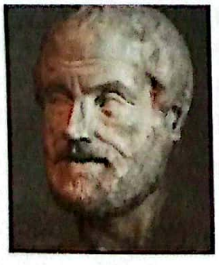
A Lógica estuda os argumentos válidos, isto é, ajuda-nos a reconhecer os que retiram conclusões das premissas de forma correcta. Se as premissas forem todas verdadeiras, como sucede usualmente, a conclusão também o deve ser.

Tradicionalmente, a Lógica fazia parte da Filosofia, mas o seu carácter preciso e técnico deram-lhe autonomia. Hoje, a Lógica está intimamente ligada com a Matemática, até porque partilha com esta a utilização de simbologia muito bem definida, que se rege por regras muito claras e que devem ser sempre seguidas.

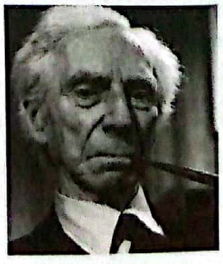
Algumas expressões, a que chamamos paradoxos ou antinomias, tiveram um papel muito importante no desenvolvimento da Lógica e na compreensão das suas limitações. Vejamos um exemplo. Seja *A* a proposição "Esta frase é falsa". Será que é *A* é verdadeira? Nesse caso o seu conteúdo deve sê-lo também, mas este diz que *A* é falsa! Será *A* falsa? Então, o que A diz está certo e concluímos que *A* é verdadeira! Resumindo: Se *A* é verdadeira, então é falsa e se *A* é falsa, então é verdadeira!

Numa dada cidade há um homem, o barbeiro, que diz "eu barbeio todos os cidadãos que não se barbeiam a eles mesmos". Quem barbeia o barbeiro?

Um dos principais lógicos e matemáticos foi Bertrand Russell, cujo nome também ficou ligado a um paradoxo: "Existe o conjunto de todos os conjuntos?".



Aristóteles
(século IV a. C.)



Bertrand Russell
(1872-1970)

Digitalizada com CamScanner

1 Introdução à lógica matemática

1 Iniciação à lógica bivalente

2 Expressões algébricas. Quantificadores

Material:
Lápis e papel

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Identificar proposições.
2. Atribuir valor lógico correcto a uma proposição.
3. Aplicar as propriedades de negação, disjunção e conjunção.
4. Demonstrar as propriedades através de tabelas de verdade.
5. Interpretar as leis de De Morgan.
6. Aplicar as leis de De Morgan na resolução de problemas.
7. Provar com tabelas de verdade as propriedades de negação, conjunção e disjunção.
8. Operar com a negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência.

1. Iniciação à lógica bivalente

Jogo de tabuleiro N'Txuva

O estudo da Lógica permite maior rigor na interpretação da linguagem corrente e nos raciocínios matemáticos.

Imaginemos que A diz a B: "Se chover vou visitar o museu".

Acontece que A foi mesmo visitar o museu e B, quando soube disso, concluiu que tinha chovido.

Será que B raciocinou bem?

É que A nunca disse que só iria visitar o museu se chovesse e não disse nada sobre o que faria no caso de não chover!

A conclusão de B é abusiva, porque pode não ter chovido e A pode ter ido visitar o museu. A não teria mentido.

Vamos então iniciar o estudo da Lógica com um duplo objectivo:

- na linguagem corrente, estarmos mais atentos à maneira como nos exprimimos;
- obter um melhor conhecimento da linguagem matemática e utilizar no estudo desta disciplina maior rigor de linguagem e pensamento.

1.1 Termos e proposições

Para melhor compreensão da linguagem matemática vamos procurar, sempre que possível, estabelecer um paralelismo com a linguagem corrente.

A partir de um conjunto de sinais elementares:

- **letras, acentos**, etc., na linguagem;
- **algarismos, sinais das operações**, etc., na linguagem matemática obtêm-se sinais compostos a que se chamam **expressões**.

Digitalizada com CamScanner

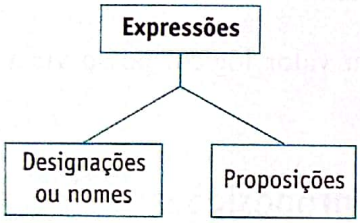
Das expressões mais simples apresentam-se a seguir alguns exemplos em linguagem:

corrente	matemática
Moçambique	10
Mário Coluna	5 + 2
bola	m.d.c. (4 , 10)
solidariedade	{1 , 2 , 3}

Expressões como estas que representam pessoas, cidades, coisas, qualidades, números, ..., chamam-se **designações**.

Designações, nomes ou termos

Designações, nomes ou termos são expressões que representam os seres. Nas frases podem surgir como sujeito.



Outro tipo de expressões como:

Mário Coluna foi jogador de futebol	(verdadeira)
Maputo é uma cidade francesa	(falsa)
$3 + 2 = 5$	(verdadeira)
$2 + 3 \times 4 = 20$	(falsa)

que exprimem juízos ou traduzem afirmações acerca dos entes chamam-se **proposições.**

Proposições

Proposições são expressões a respeito das quais faz sentido dizer se são verdadeiras ou falsas.

Os dois princípios lógicos seguintes clarificam o significado do termo proposição.

- **Princípio da não-contradição**
  Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.
- **Princípio do terceiro excluído**
  Uma proposição ou é verdadeira ou falsa (exclui-se qualquer terceira possibilidade).

Se uma proposição é verdadeira, diz-se que tem o valor lógico **verdade**, que se representa abreviadamente por V ou 1 (um). Se é falsa, diz-se que tem o valor lógico **falsidade**, que se representa abreviadamente por F ou 0 (zero).

Assim, o universo dos valores lógicos é o conjunto

$$\{V , F\} \text{ ou } \{1 , 0\} .$$

Por isso se diz **lógica bivalente**, pois apresenta apenas dois valores lógicos: **verdade** e **falsidade.**

1

Das expressões seguintes distinga as designações das proposições.

1.1 $\sqrt{4} + \sqrt{16}$

1.2 $\sqrt{4} + \sqrt{16} = 6$

1.3 $\sqrt[3]{8}$

1.4 $\sqrt[3]{8} > 2$

1.5 $\{2 , 3 , 5\}$

1.6 $1 \notin \{2 , 3 , 5\}$

1.7 m.d.c. (8 , 16)

1.8 m.d.c. (8 , 16) = 8

2

Atribua um valor lógico a cada uma das proposições do exercício anterior.

Digitalizada com CamScanner

Repare que a frase

20 é um número grande.

não é considerada uma proposição em Lógica matemática. Com efeito, se 20 representa o número de golos num jogo de futebol, então é efectivamente um número grande e a afirmação é verdadeira. Mas se 20 indica o número de habitantes de uma cidade, então é um número muito pequeno e a afirmação é falsa.

Do ponto de vista da Lógica, a frase seguinte também não é uma proposição.

A música de Lizha James não é mais bela do que a de Mingas.

De facto, a afirmação é verdadeira para uns e falsa para outros.

No entanto, a frase seguinte já é considerada uma proposição.

Amanhã vou ao cinema.

Embora neste momento não possa dizer o seu valor lógico, posso vir a dizê-lo amanhã.

1.2 Equivalência de designações e proposições

Designações sinónimas

Sempre que se pretende designar não o objecto/ser mas o seu nome, utilizam-se aspas. Assim, quando se escreve:

Nampula é uma cidade

e

"Nampula" é uma palavra

é claro que na segunda frase nos referimos ao nome da cidade de Nampula. Por isso utilizámos aspas.

Do mesmo modo, quando se escreve:

5 é um número inteiro

e

"5" é um algarismo árabe

referimo-nos na segunda frase não ao número 5 mas a uma designação deste número.

Evidentemente que há outras designações deste número 5:

$$4+1\,,\quad 3+2\,,\quad \text{V}\,,\quad \frac{10}{2}\,,\quad \ldots\,,$$

ditas **designações sinónimas.**

3 De cada um dos pares de expressões seguintes, indique a que está correctamente escrita relativamente à utilização das aspas.

3.1 4 é um número par;
4 é uma designação do número "4".

3.2 "2 + 1" e "4 − 1" são designações do número 3;
2 + 1 e 4 − 1 são designações do número "3".

3.3 $\frac{1}{2}$ é uma designação de 0,5;
"$\left(\frac{1}{2}\right)$" é uma designação de 0,5.

Digitalizada com CamScanner

Designações sinónimas

Designações sinónimas são as que designam ou nomeiam o mesmo ser.

Para indicar que dois termos designam o mesmo ente escreve-se, entre eles, o sinal $=$.

Exemplos:

1. $4+1=\frac{10}{2}$

   Isto significa que os termos "4 + 1" e "$\left(\frac{10}{2}\right)$" ambos designam o número 5.

2. $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$

   Embora "$\left(\frac{3}{5}\right)$" e "$\left(\frac{6}{10}\right)$" tenham formas diferentes, os termos designam o mesmo número.

Para indicar que dois termos não designam o mesmo ente utiliza-se o símbolo $\neq$ (diferente de).

$$4+1 \neq 7+3$$

Repare que: As fracções "$\left(\frac{3}{5}\right)$" e "$\left(\frac{6}{10}\right)$" designam o mesmo número mas são diferentes.

Assim, deverá escrever-se:

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10} \text{ e } \text{"}\left(\frac{3}{5}\right)\text{"} \neq \text{"}\left(\frac{6}{10}\right)\text{"}$$

Repare que: Porque a utilização das aspas não é muito prática, muitas vezes não são utilizadas, deduzindo-se do contexto se nos referimos aos entes ou aos seus nomes.

Proposições equivalentes

Duas proposições que têm o mesmo valor lógico dizem-se equivalentes, isto é, são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Assim, são equivalentes:

Lichinga é uma cidade (V)

e

Inhaca é uma ilha (V)

Bem como:

$$5 \times 4 - 6 = 15 \text{ (F)}$$

e

$$7 < 3 \text{ (F)}$$

4 Diga se são verdadeiras ou falsas as proposições seguintes.

4.1 $3+2=2+3$

4.2 "$3+2$" = "$2+3$"

4.3 "$5+3\times 2$" = "11"

4.4 "4" $\neq$ "$\left(\frac{8}{2}\right)$"

5 Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

5.1 A capital da província do Niassa é Lichinga.

5.2 $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a+b}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

5.3 $\sqrt[3]{a\times b}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Digitalizada com CamScanner

1.3 Operações lógicas definidas no universo das proposições e no universo lógico

Consideremos as seguintes expressões:

não , e , ou , se ... então ... , ... se e só se ...

Estas expressões são utilizadas muitas vezes para, a partir de proposições elementares, formar novas proposições (compostas).

Tudo se passa como na aritmética, em que, partindo dos números e utilizando as operações (adição, subtracção, ...), obtemos novos números.
Aqui, partindo de proposições e usando as operações, obtêm-se novas proposições.

A cada uma das expressões anteriores está associada uma operação lógica.

Assim:

não	→	negação
e	→	conjunção
ou	→	disjunção
se ... então ...	→	implicação
... se e só se ...	→	equivalência

Passemos então à definição das operações lógicas.

Negação (~)

Consideremos a proposição:

p : Mia Couto escreveu "Terra sonâmbula".

A negação desta proposição é uma nova proposição que se representa por $\sim p$ e se lê:

não é verdade que p

ou, simplesmente,

não p

Então,

$\sim p$: Não é verdade que Mia Couto escreveu "Terra sonâmbula".

Em linguagem corrente, também se diz:

$\sim p$: Mia Couto não escreveu "Terra sonâmbula".

Como a proposição p é verdadeira, a proposição $\sim p$ é falsa.

6 Escreva a negação de cada uma das proposições.

6.1 O livro escolar é um instrumento de trabalho.

6.2 O automóvel é um meio de transporte.

6.3 Todos os alunos gostam de Matemática.

Digitalizada com CamScanner

Negação de uma proposição

A negação de uma proposição p é uma nova proposição, $\sim p$, que se obtém da anterior antepondo-lhe as palavras «não é verdade que» e que é verdadeira se p é falsa e falsa se p é verdadeira.

7

Negue as proposições.

7.1 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$

7.2 π é um número irracional.

7.3 Todos os números primos são ímpares.

Exemplos:

1. q : Eu estudo Lógica.

   $\sim q$: Não é verdade que eu estudo Lógica.

   Ou, em linguagem corrente,

   $\sim q$: Eu não estudo Lógica.

2. s : $2+3\times 4=20$

   $\sim s$: Não é verdade que $2+3\times 4=20$,

   ou, mais simplesmente,

   $\sim s$: $2+3\times 4\neq 20$.

8

Escreva a negação de cada uma das proposições e indique o valor lógico da proposição e da sua negação.

8.1 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$

8.2 $\{1\}\subset\{1,\ 2,\ 3\}$

8.3 $2^3=6$

8.4 $\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$

3. r : Todos os alunos da escola estudam Lógica.

   $\sim r$: Não é verdade que todos os alunos da escola estudam Lógica.

   Em linguagem corrente diz-se:

   $\sim r$: Nem todos os alunos da escola estudam Lógica.

Com este terceiro exemplo, constatamos que a negação de uma proposição, em linguagem corrente, nem sempre se obtém antepondo **não** ao verbo da proposição.

Para determinar o valor lógico da negação de uma proposição a partir do valor lógico desta, pode utilizar-se qualquer das seguintes tabelas, que se chamam **tabelas da verdade:**

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	$\sim p$
1	0
0	1

9

Considere a proposição:

p : $\sqrt[3]{\sqrt{5}}<\sqrt[6]{5}$

9.1 Qual é o seu valor lógico?

9.2 Escreva a negação de p.

9.3 Indique o valor lógico de $\sim p$.

Digitalizada com CamScanner

Conjunção (∧)

Consideremos as proposições seguintes:

p : O Bila veste calças azuis.

e

q : O Bila veste camisa azul.

A conjunção destas proposições é a proposição "p e q" que simbolicamente se representa por $p \wedge q$.

$p \wedge q$: O Bila veste calças azuis e o Bila veste camisa azul.

Também se diz: O Bila veste calças e camisa azuis.

A proposição $p \wedge q$ só e verdadeira se p e q são simultaneamente verdadeiras.

Conjunção de proposições

A conjunção de duas proposições, p e q, é uma proposição que se representa ligando p e q pelo símbolo $\wedge$ (lê-se *e*); esta nova proposição $(p \wedge q)$ é verdadeira quando p e q são simultaneamente verdadeiras, e é falsa nos outros casos.

Exemplos:

1. p : $2 + 1 = 3$

   q : $5 + 2 > 5$

   $p \wedge q$: $2 + 1 = 3 \ \wedge \ 5 + 2 > 5$

   Como p e q são verdadeiras, também $p \wedge q$ é verdadeira.

2. r : 5 é um número primo;

   s : 5 é um número par;

   $r \wedge s$: 5 é um número primo $\wedge$ 5 é um número par.

   Neste caso, como s é falsa, também $r \wedge s$ é falsa, apesar de r ser verdadeira.

   Repare que: Uma conjunção, "$\wedge$", também poderá traduzir um "mas".

10

Sejam a e b as proposições seguintes:

a : A água é um bem essencial.

b : A protecção do ambiente é uma responsabilidade de todos.

Traduza em linguagem corrente o significado das expressões simbólicas:

10.1 $a \wedge b$;

10.2 $\sim a \wedge b$.

Digitalizada com CamScanner

11

Designando por l e m as proposições:

l : Paulina Chiziane é uma escritora moçambicana.

m : Mia Couto é um escritor moçambicano.

Traduza simbolicamente:

11.1 Paulina Chiziane e Mia Couto são escritores moçambicanos.

11.2 Paulina Chiziane é uma escritora moçambicana e Mia Couto não.

11.3 Nem Paulina Chiziane nem Mia Couto são escritores moçambicanos.

Abstraindo de todas as qualidades das proposições excepto o facto de que elas são verdadeiras ou falsas, pode definir-se a conjunção entre valores lógicos por uma das tabelas de verdade seguintes:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ou, ainda, utilizando os símbolos 1 e 0 :

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Repare que: Na elaboração de uma tabela de verdade devem esgotar-se todas as possibilidades quanto aos valores lógicos possíveis para as proposições elementares.

12

Como sabe, Paulina Chiziane e Mia Couto são escritores moçambicanos notáveis.

Diga, então, quais das proposições do exercício anterior são verdadeiras.

Neste caso:

$$p = 1 \begin{cases} q = 1 \\ q = 0 \end{cases} \qquad p = 0 \begin{cases} q = 1 \\ q = 0 \end{cases}$$

pelo que, são quatro as possibilidades a considerar:

$$\begin{cases} p = 1 \\ q = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} p = 1 \\ q = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} p = 0 \\ q = 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}.$$

Disjunção

A expressão «ou» está associada à operação lógica que se chama **disjunção.**

Porém, como a expressão «ou» pode ser utilizada com dois sentidos distintos, também há dois tipos de disjunção: **exclusiva e inclusiva.**

13

Considere as proposições:

a : Como fruta.

b : Como doce.

Traduza em linguagem simbólica:

13.1 como doce ou como fruta (mas não ambas as coisas);

13.2 ou não como doce ou não como fruta.

Disjunção exclusiva $\veebar$

A disjunção exclusiva de duas proposições p e q, é uma proposição que resulta de ligar p e q pelo símbolo $\veebar$ (lê-se *ou com sentido exclusivo*); esta nova proposição $(p \veebar q)$ é verdadeira se p e q têm valores lógicos distintos e falsa nos outros casos.

Digitalizada com CamScanner

14

Sendo:
c : $1+1=2$
d : A lógica é uma batata.
traduza em linguagem corrente:

14.1 $c \dot{\vee} d$;

14.2 $d \dot{\vee} \sim c$.

15

Indique o valor lógico das proposições consideradas em **14.1** e **14.2** .

16

Sabendo que são verdadeiras as proposições:
a : O Paulino tem 17 anos .
b : A Mia tem 16 anos .
traduza em linguagem corrente e indique o valor lógico das proposições:

16.1 $a \dot{\vee} b$;

16.2 $\sim a \dot{\vee} b$.

17

p e q são duas proposições. Se $p \wedge q$ tem o valor lógico verdadeiro, diga, justificando, qual o valor lógico de:

17.1 $p \dot{\vee} q$;

17.2 $\sim p \dot{\vee} q$.

18

Considere as proposições:
p : O Paulo é estudante.
q : O Paulo é programador.
r : O João é estudante.
Traduza em linguagem simbólica:

18.1 O Paulo é estudante e/ou programador.

18.2 Ou o Paulo é estudante ou é programador.

18.3 O Paulo e o João são estudantes e/ou o Paulo é programador.

Exemplos:

1. p : compro sapatos;
   q : compro chinelos;
   $p \dot{\vee} q$: compro sapatos ou compro chinelos (mas não ambas as coisas).

   Em linguagem corrente, para transmitir esta noção costuma-se escrever: "ou... ou...".
   Ou compro sapatos **ou** compro chinelos.

2. r : $2+2=4$ (V)
   s : $3+5=8$ (V)
   $r \dot{\vee} s$: $2+2=4 \ \dot{\vee} \ 3+5=8$ (F)

   A proposição $r \dot{\vee} s$ é falsa visto que as proposições r e s são ambas verdadeiras.

3. a : $1+1=5$ (F)
   b : $2>1$ (V)
   $a \dot{\vee} b$: $1+1=5 \ \dot{\vee} \ 2>1$ (V)

   No universo dos valores lógicos, a disjunção exclusiva fica definida por qualquer das tabelas de verdade seguintes:

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou

p	q	$p \dot{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disjunção inclusiva ($\vee$)

A disjunção inclusiva de duas proposições p e q é uma proposição que se representa ligando p e q pelo símbolo $\vee$ (lê-se *ou com sentido inclusivo*); esta nova proposição $(p \vee q)$ é verdadeira em todos os casos excepto se p e q são simultaneamente falsas.

Exemplos:

1. p : vou comprar uma camisa;
   q : vou comprar um livro;
   $p \vee q$: vou comprar uma camisa ou vou comprar um livro (ou as duas coisas).

   Em linguagem corrente, para transmitir esta noção costuma-se escrever: "... e/ou ..." .
   Vou comprar uma camisa **e/ou** vou comprar um livro.

2. r : $1+2=3$ (V)
   s : $3+1=4$ (V)
   $r \vee s$: $1+2=3 \ \vee \ 3+1=4$ (V)

   A proposição $r \vee s$ é verdadeira pois r e s são verdadeiras (a disjunção é inclusiva).

Digitalizada com CamScanner

19

Sejam a e b as proposições:

$a: 5 < 9$

$b: \frac{7}{3} \neq 2\frac{1}{3}$

19.1 Indique o valor lógico de cada uma delas.

19.2 Traduza em linguagem corrente e indique o valor lógico das seguintes proposições:

19.2.1 $a \vee b$;

19.2.2 $\sim a \vee b$;

19.2.3 $\sim a \vee \sim b$.

3. $a: 1+1=5$ (F)

$b: 2>1$ (V)

$a \vee b: 1+1=5 \vee 2>1$ (V)

No universo lógico, a disjunção inclusiva pode ser definida por uma das seguintes tabelas de verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ou

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Repare que: Em Lógica e em Matemática é mais frequente a utilização da palavra **ou** no sentido inclusivo do que no sentido exclusivo.

Por este motivo, quando se fala apenas em disjunção ou se emprega simplesmente a palavra **ou**, consideramos que se trata de disjunção inclusiva.

20

Se p e q são duas proposições e $p \dot{\vee} q$ é verdadeira, diga, justificando, o valor lógico de:

20.1 $p \vee q$;

20.2 $\sim p \vee \sim q$.

Implicação material ($\longrightarrow$)

Consideremos as proposições seguintes:

p: Carlos é maior de 18 anos.

q: Carlos tem direito a votar.

Ligando estas duas proposições pelas palavras **se ... então ...** obtemos a proposição **se** p **então** q e que se representa por:

$p \longrightarrow q$ (lê-se p *implica* q).

$p \longrightarrow q$: se Carlos é maior de 18 anos, **então** Carlos tem direito a votar.

21

Sendo p uma proposição qualquer, diga qual o valor lógico de:

21.1 $p \vee \sim p$;

21.2 $p \wedge \sim p$;

21.3 $p \dot{\vee} \sim p$.

Implicação material

Dadas as proposições p e q, chama-se implicação de p e q a uma proposição que se representa ligando as duas proposições pelo símbolo $\longrightarrow$ (lê-se *implica*, ou *se* p *então* q) e que só é falsa se p é verdadeira e q falsa.

À proposição p chama-se antecedente e à proposição q consequente.

Observação

Do dicionário:

implicar = envolver;

implicar = ter como consequência.

"$p \longrightarrow q$" também se traduz por "p é condição suficiente para q" e "q é condição necessária para p".

A implicação $p \longrightarrow q$ só é falsa se o antecedente for verdadeiro e se o consequente for falso.

Digitalizada com CamScanner

22

Considere as proposições:
p : chove;
q : o sol brilha;
r : faz calor.

Traduza simbolicamente as proposições seguintes:

22.1 Se o Sol brilha, então faz calor.

22.2 Se chove, então não faz calor.

22.3 Se não faz calor, então o Sol não brilha.

22.4 Se não chove e o Sol brilha, então faz calor.

23

Sendo:
a : $2 + 2 = 5$
b : π é um número irracional;
c : $\sqrt{3}$ é um número irracional;

traduza em linguagem corrente cada uma das proposições seguintes:

23.1 $a \longrightarrow \sim b$;

23.2 $\sim a \longrightarrow c$;

23.3 $(b \wedge c) \longrightarrow \sim a$;

23.4 $(a \vee \sim c) \longrightarrow \sim b$.

24

Indique o valor lógico de cada uma das proposições do exercício anterior.

25

Sabendo que a proposição $p \longrightarrow q$ é falsa, diga qual o valor lógico de cada uma das proposições.

25.1 $\sim p \vee q$;

25.2 $p \wedge q$;

25.3 $p \dot{\vee} q$.

Observação

Convenção:
Como abreviatura da expressão **se e só se** utiliza-se **sse**.

Exemplos:

1. Se chover vou ao cinema.
   (p) (q)

   Só é falsa se chover e eu não for ao cinema.

2. Se as galinhas têm dentes, há elefantes com 7 trombas.

   É verdade porque o antecedente é falso, logo a implicação é verdadeira.

3. $2 < 1 \longrightarrow 10 > 11$ (V)
   $2 < 1 \longrightarrow 11 > 10$ (V)

   porque o antecedente é falso em ambas as implicações.

Repare que:
Saber o valor lógico do consequente não é suficiente para concluir sobre o valor lógico da implicação.

No universo lógico, a implicação material corresponde a qualquer das seguintes tabelas de verdade.

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ou

p	q	$p \longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Equivalência material ($\longleftrightarrow$)

Equivalência material

A equivalência material de duas proposições, p e q, é uma proposição que se representa ligando p e q pelo símbolo $\longleftrightarrow$ (lê-se *se e só se* ou *é equivalente a*); esta nova proposição $(p \longleftrightarrow q)$ é verdadeira se p e q têm o mesmo valor lógico e falsa se têm valores lógicos diferentes.

Em linguagem corrente, a proposição $p \longleftrightarrow q$ traduz:

p é condição necessária e suficiente para q ;

p se e somente se q ;

ou

p se e só se q .

Digitalizada com CamScanner

26

Considere as proposições:
a : Paulino estuda Matemática.
b : Paulino quer ser cientista.
c : Paulino quer ser jornalista.
Traduza em linguagem corrente:

26.1 $a \longleftrightarrow b$;

26.2 $a \longleftrightarrow \sim c$;

26.3 $(a \wedge b) \longleftrightarrow \sim c$.

27

Sendo:
p : 12 é um número par;
q : $\frac{1}{3}$ é um número racional;
r : $\sqrt{2}$ é um número irracional.
traduza em linguagem corrente:

27.1 $p \longleftrightarrow p$;

27.2 $p \longleftrightarrow \sim r$;

27.3 $\sim p \longleftrightarrow (q \wedge \sim r)$;

27.4 $(p \wedge \sim r) \longleftrightarrow q$.

28

Indique o valor lógico de cada uma das proposições do exercício anterior.

29

Sabendo que a proposição $a \longleftrightarrow b$ é verdadeira, diga qual é o valor lógico de cada uma das proposições.

29.1 $a \vee \sim b$;

29.2 $(a \wedge b) \veebar \sim a$;

29.3 $(a \vee b) \longrightarrow a$.

Observação

Já foi referido na página 12 que duas proposições são equivalentes quando têm o mesmo valor lógico.

No caso de duas proposições gerais, A e B, elas dizem-se equivalentes se a equivalência $A \longleftrightarrow B$ for verdadeira para qualquer escolha dos valores lógicos das proposições elementares. E representa-se por $A \Longleftrightarrow B$.

Exemplos:

1. p : $2 + 3 \times 5 = 25$
   q : $3 \times 5 = 15$
   $p \longleftrightarrow q$: $2 + 3 \times 5 = 25 \overset{\text{(ssc)}}{\longleftrightarrow} 3 \times 5 = 15$
   Como p é falsa e q é verdadeira, $p \longleftrightarrow q$ é falsa.

2. a : $4 + (2 + 3) = 10$
   b : $2 + 3 = 6$
   $a \longleftrightarrow b$: $4 + (2 + 3) = 10 \overset{\text{(ssc)}}{\longleftrightarrow} 2 + 3 = 6$
   Apesar de a e b serem falsas, $a \longleftrightarrow b$ é verdadeira.

3. c : Paulina Chiziane escreveu "Balada do amor ao vento".
   d : O rio Zambeze nasce na Zâmbia.
   $c \longleftrightarrow d$: Paulina Chiziane escreveu "Balada do amor ao vento" $\longleftrightarrow$ O rio Zambeze nasce na Zâmbia.

No universo lógico, a equivalência corresponde a qualquer das seguintes tabelas de verdade:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ou

p	q	$p \longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.4 Propriedades das operações lógicas

Propriedades da conjunção e da disjunção

Supondo que p, q e r designam quaisquer proposições, é possível concluir das tabelas de verdade que as seguintes equivalências são sempre verdadeiras.

Propriedades	Conjunção	Disjunção
Comutativa	$p \wedge q \longleftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \longleftrightarrow q \vee p$
Associativa	$(p \wedge q) \wedge r \longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Exemplo:

$p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$

Teremos de considerar todas as possibilidades para as duas proposições elementares.

Há proposições que são sempre verdadeiras, como $p \vee \sim p$ (p representa uma proposição qualquer).

Digitalizada com CamScanner

Exemplo:

$2 > 3 \vee 2 \leqslant 3$ (proposição verdadeira)

$2 > 3 \wedge 2 \leqslant 3$ (proposição falsa)

Por vezes representamos por V uma proposição que sabemos ser sempre verdadeira e por F uma que sabemos ser sempre falsa.

Uma proposição que é sempre verdadeira, independentemente dos valores lógicos das proposições elementares, chama-se **tautologia.**

Exemplo:

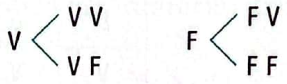
$p \longrightarrow p \vee q$

Uma proposição que é sempre falsa, independentemente dos valores lógicos das proposições elementares, chama-se **contradição.**

Exemplo:

$p \vee \sim p \longrightarrow p \wedge \sim p$

Como cada proposição só pode ter dois valores (V e F), temos:



p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

$p \wedge q \iff q \wedge p$

Repare que: os valores lógicos das duas últimas colunas são os mesmos.

Propriedades de ligação da conjunção e da disjunção

A conjunção é distributiva em relação à disjunção.

$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

A disjunção é distributiva em relação à conjunção.

$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

As demonstrações destas duas propriedades são semelhantes utilizando em ambos os casos tabelas de verdade.

30 Utilize tabelas de verdade para demonstrar que são verdadeiras as proposições seguintes, em que p e q designam qualquer dos valores lógicos V, F:

30.1 $p \vee q \longleftrightarrow q \vee p$;

30.2 $p \wedge V \longleftrightarrow V \wedge p \longleftrightarrow p$;

30.3 $p \vee q \longleftrightarrow p$.

31 Utilize tabelas de verdade para mostrar que quaisquer que sejam os valores lógicos de a e b as expressões seguintes são sempre verdadeiras (tautologias):

31.1 $(a \wedge b) \longrightarrow (a \vee b)$;

31.2 $b \longrightarrow (\sim a \longrightarrow b)$;

31.3 $\sim (a \vee b) \longleftrightarrow (\sim a \wedge \sim b)$.

32 Demonstre que a disjunção é distributiva em relação à conjunção por meio de uma tabela de verdade.

Digitalizada com CamScanner

Propriedades da negação

Dupla negação

A dupla negação corresponde à afirmação.

Qualquer que seja p,

$$\sim\sim p \iff p$$

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

33 Sabendo que p tem valor lógico 1, indique o valor da negação de cada uma das proposições.

33.1 $\sim q \vee p$;

33.2 $(\sim p \longrightarrow q) \vee r$;

33.3 $(r \wedge \sim p) \longrightarrow \sim r$.

Esta propriedade resulta imediatamente da definição de negação e está de acordo com a linguagem corrente.

Com efeito, se

p : João é estudante

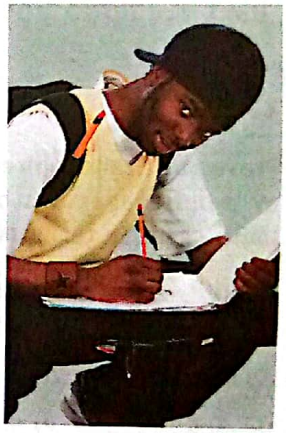
tem-se

$\sim p$: João não é estudante

e

$\sim\sim p$: Não é verdade que João não é estudante.

O que equivale a afirmar que João é estudante.



Primeiras leis de De Morgan

- Negar que duas proposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que pelo menos uma é falsa.

$$\sim (p \wedge q) \iff \sim p \vee \sim q$$

34 Escreva na forma mais simples a negação das seguintes proposições:

34.1 $a \wedge \sim b$;

34.2 $(a \wedge b) \wedge \sim c$;

34.3 $\sim a \vee b$;

34.4 $(a \vee \sim b) \wedge \sim c$.

Como se mostra na seguinte tabela de verdade.

$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\longleftrightarrow$	$\sim$	p	$\vee$	$\sim$	q
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0

Digitalizada com CamScanner

35

Sem utilizar o símbolo $\sim$, escreva a negação das proposições.

35.1 $5 < 7 < 9$

35.2 $3 > 2 \vee 3 > -2$

36

Dadas as proposições:

c : Jorge é médico.

d : Jorge estuda Matemática.

Traduza em linguagem corrente a negação das proposições:

36.1 $c \wedge \sim d$

36.2 $\sim c \vee \sim d$

37

Prove, utilizando directamente as propriedades das operações lógicas, que se tem sempre:

37.1 $a \wedge (\sim a \wedge b) = \mathrm{F}$

37.2 $a \vee (\sim a \vee b) = \mathrm{V}$

37.3 $a \wedge (b \vee \sim a) = a \wedge b$

37.4 $a \vee (b \wedge \sim a) = a \vee b$

38

Sabe-se que $p \vee q$ é verdadeira qualquer que seja a proposição q. Que pode concluir-se a respeito da proposição p?

Observação

Repare que há diversas formas de construir tabelas de verdade.

- Negar que pelo menos uma de duas proposições é verdadeira equivale a afirmar que as duas são simultaneamente falsas.

$$\sim (p \vee q) \iff \sim p \wedge \sim q$$

Como se mostra na seguinte tabela de verdade.

$\sim$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\longleftrightarrow$	$\sim$	p	$\wedge$	$\sim$	q
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0

Exemplos:

1. Negar que:

   O Paulo é estudante **e** é trabalhador.

   equivale a afirmar que:

   O Paulo **não** é estudante **e/ou não** é trabalhador.

2. Negar que:

   O Pedro estuda Física **ou** estuda Química.

   equivale a afirmar que:

   O Pedro **não** estuda Física **e não** estuda Química.

3. $p \wedge \sim p$ é sempre falso.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Do mesmo modo, a expressão:

$$p \dot{\vee} \sim p = \mathrm{V}$$

traduz o **princípio do 3.º excluído:** É verdade afirmar que uma proposição ou é verdadeira ou falsa.

p	$\sim p$	$p \dot{\vee} \sim p$
V	F	V
F	V	V

Digitalizada com CamScanner

Propriedades da implicação

Relação da implicação material com a disjunção

Utilizando uma tabela de verdade é fácil verificar que se tem sempre:

$$p \longrightarrow q \iff \sim p \vee q \qquad (1)$$

Como se tem:

p	q	$p \longrightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Também se deduz que:

$$p \vee q \iff \sim p \longrightarrow q \qquad (2)$$

Negação da implicação

A partir das leis de De Morgan e da propriedade anterior, obtém-se facilmente a negação de uma implicação.

$\sim (p \longrightarrow q) \iff \sim (\sim p \vee q)$, ou seja, $\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$.

Pelo que se tem:

$$\sim (p \longrightarrow q) \iff p \wedge \sim q$$

Dizer que p não implica q é o mesmo que afirmar que p é verdadeira e q é falsa.

Lei da conversão

A partir das propriedades anteriores pode estabelecer-se que

$$p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$$

Com efeito, e como já vimos $p \longrightarrow q \iff \sim p \vee q$.

Como a disjunção é comutativa, $p \longrightarrow q \iff q \vee \sim p$ e atendendo a (2), vem $p \longrightarrow q \iff \sim q \longrightarrow \sim p$.

Dizer que p implica q é o mesmo que afirmar que se q é falsa p também o é.

$\sim q \longrightarrow \sim p$ diz-se o **contra-recíproco** de $p \longrightarrow q$.

Também podíamos usar uma tabela de verdade.

p	$\longrightarrow$	q	$\longleftrightarrow$	$\sim$	q	$\longrightarrow$	$\sim$	p
1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0

39 Construa uma tabela de verdade para provar que se tem:

$p \vee q \longleftrightarrow \sim p \longrightarrow q$.

40 Escreva, na forma simples, a negação das proposições.

40.1 $\sim a \longrightarrow b$

40.2 $(a \wedge \sim b) \longrightarrow c$

40.3 $(a \longrightarrow \sim b) \vee \sim c$

41 Negue a seguinte proposição sem utilizar o símbolo $\sim$.

Se $2 \times 3 + 7 = 13$, então $5 \times (2 \times 3 + 7) = 60$.

Digitalizada com CamScanner

Propriedades de equivalência material

A equivalência material como conjunção de implicações

Utilizando uma tabela da verdade, podemos verificar que se tem:

$$p \longleftrightarrow q \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$$

Assim:

p	q	$p \longleftrightarrow q$	$(p \longrightarrow q)$	$(q \longrightarrow p)$	$p \longrightarrow q \wedge q \longrightarrow p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Vimos já que:

$$(p \longleftrightarrow q) \iff (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) .$$

Exprimindo as implicações em disjunção, vem:

$$(p \longleftrightarrow q) \iff (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) .$$

Logo, $\sim (p \longleftrightarrow q) \iff \sim (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$.

Aplicando as leis de De Morgan, resulta:

$$\sim (p \longleftrightarrow q) \iff (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Negar que duas proposições são equivalentes materialmente equivale a dizer que a primeira é verdadeira e a segunda é falsa ou que a segunda é verdadeira e a primeira é falsa.

Uma utilização importante das propriedades que acabámos de estudar é a simplificação de expressões. Trata-se de, por razões de economia de pensamento e de tempo, reduzir uma expressão a outra equivalente, mas com um número mínimo de operações lógicas a efectuar.

Exemplos:

Simplifique:

1. $a \wedge (\sim a \vee b)$; 2. $p \wedge (p \vee q)$; 3. $(a \longrightarrow b) \longleftrightarrow b$.

Resolução

1. Como a conjunção é distributiva em relação à disjunção, temos:

$$a \wedge (\sim a \vee b) \iff (a \wedge \sim a) \vee (a \wedge b) \qquad (a \wedge \sim a \iff \text{F})$$
$$\iff \text{F} \vee (a \wedge b) \qquad (\text{F é neutro para } \vee)$$
$$\iff a \wedge b$$

42 Simplifique a expressão:
"$(a \longrightarrow b) \wedge (a \wedge b)$" .

43 Utilize uma tabela de verdade para provar que:
$\sim (a \longleftrightarrow b) \longleftrightarrow a \veebar b$.

44 Sem utilizar o símbolo $\sim$, escreva a negação das proposições:

44.1 "$2 + 2 = 5 \longleftrightarrow 2 + 2 \neq 4$".

44.2 "$2 \times 3 = 5 \longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow 2 \times 3 + 1 = 7$" .

45 Para provar que:
$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow q \iff p \vee q$,
quaisquer que sejam os valores lógicos de p e q, utilize uma tabela de verdade e as propriedades das operações lógicas.

46 Simplifique as expressões:

46.1 "$a \vee (\sim a \wedge b)$" .

46.2 "$p \vee (p \wedge q)$" .

46.3 "$(a \vee b) \wedge (a \vee \sim b)$" .

46.4 "$(a \longrightarrow \sim b) \longrightarrow b$" .

Digitalizada com CamScanner

2. Atendendo a que $p \vee \mathrm{F} \iff p$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} p \wedge (p \vee q) &\iff (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q) && \text{(propriedade distributiva)} \\ &\iff p \vee (\mathrm{F} \wedge q) && \text{(F é absorvente para } \wedge) \\ &\iff p \vee \mathrm{F} && \text{(F é neutro para } \vee) \\ &\iff p \end{aligned}$$

3. Começamos por transformar a implicação em disjunção e, em seguida, a equivalência na conjunção:

$$\begin{aligned} (a \longrightarrow b) \longleftrightarrow b &\iff (\sim a \vee b) \longleftrightarrow b && (p \longrightarrow q \iff \sim p \vee q) \\ &\iff [(\sim a \vee b) \longrightarrow b] \wedge [b \longrightarrow (\sim a \vee b)] \\ &\iff [(a \wedge \sim b) \vee b] \wedge [\sim b \vee (\sim a \vee b)] && \text{(Propriedade distributiva, associativa e comutativa)} \\ &\iff [(a \vee b) \wedge (\sim b \vee b)] \wedge [\sim a \vee (\sim b \vee b)] && (\sim b \vee b \iff \mathrm{V}) \\ &\iff [(a \vee b) \wedge \mathrm{V}] \wedge (\sim a \vee \mathrm{V}) && \text{(V é neutro para } \wedge) \\ &\iff (a \vee b) \wedge \mathrm{V} && \text{(V é absorvente para } \vee) \\ &\iff a \vee b \end{aligned}$$

47

Utilize as propriedades das operações lógicas para provar que, quaisquer que sejam as proposições a e b, se tem:

47.1 $(a \longleftrightarrow b) \longrightarrow a \iff a \vee b$;

47.2 $\sim[(a \longrightarrow b) \wedge \sim b] \wedge \wedge \sim a \iff b \wedge \sim a$;

47.3 $(\sim a \vee [\sim (a \longrightarrow b)]) \longrightarrow \longrightarrow (a \wedge b] \iff a \wedge b$.

48

Chama-se tautologia a uma expressão composta verdadeira quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições atómicas que a formam.

Verifique, por simplificação, que as seguintes expressões são tautologias.

48.1 $(\sim a \longrightarrow a) \longleftrightarrow a$

48.2 $(\sim a \vee b) \vee (\sim a \longrightarrow \sim b)$

48.3 $\sim [(a \longleftrightarrow b) \longrightarrow a] \vee \vee \sim (\sim a \wedge \sim b)$

49

De acordo com a convenção adoptada, suprima os parênteses desnecessários nas expressões.

49.1 $p \longrightarrow [q \wedge (p \vee r)]$

49.2 $p \longrightarrow [q \longleftrightarrow (q \wedge r)]$

49.3 $[p \longrightarrow (\sim p \wedge q)] \longleftrightarrow [(p \vee q)] \longrightarrow (\sim r \wedge q)]$

Convenções:

Para evitar o uso desnecessário de parênteses numa expressão com as várias operações lógicas convencionou-se (como acontecia nas expressões numéricas) que:

- a primeira operação a efectuar é a negação;
- em seguida, e pela ordem em que apareçam, a conjunção e as disjunções;
- por último, e também pela ordem em que surjam, a implicação e a equivalência.

Então, pode escrever-se:

$$p \longrightarrow q \wedge r,\ p \vee q \longleftrightarrow r$$

e

$$a \vee \sim b \longleftrightarrow c$$

respectivamente, com o significado de:

$$p \longrightarrow (q \wedge r),\ (p \vee q) \longrightarrow r$$

e

$$[a \vee (\sim b)] \longleftrightarrow c\,.$$

Por outro lado, e de acordo com a convenção, é absolutamente necessário utilizar parênteses quando as operações têm a mesma prioridade.

Como vimos, têm significados diferentes:

$$(p \wedge q) \vee r \quad \text{e} \quad p \wedge (q \vee r)$$

bem como:

$$(p \longleftrightarrow q) \longrightarrow r \quad \text{e} \quad p \longleftrightarrow (q \longrightarrow r)\,.$$

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Considere a proposição:

O João não é jornalista e a Mia é enfermeira.

Sendo:

p : O João é jornalista.

q : A Mia é enfermeira.

simbolicamente, a proposição traduz-se por:

(A) $p \wedge q$;

(B) $\sim p \vee q$;

(C) $p \wedge \sim q$;

(D) $\sim p \wedge q$.

10 pontos

2 Considere as proposições:

a : Maputo é uma cidade.

b : Paulino escreveu um livro.

A tradução em linguagem corrente da proposição $a \longrightarrow \sim b$ é:

(A) Ou Maputo é uma cidade ou Paulino escreveu um livro.

(B) Se Maputo é uma cidade, então Paulino escreveu um livro.

(C) Se Maputo é uma cidade, então Paulino não escreveu um livro.

(D) Maputo é uma cidade e Paulino escreveu um livro.

10 pontos

3 Sabe-se que a proposição $p \longleftrightarrow q$ é falsa.

Pode-se afirmar que:

(A) $p \wedge q$ é verdadeira;

(B) $\sim p \vee q$ é falsa;

(C) $p \vee q$ é falsa;

(D) $\sim p \longrightarrow p \vee q$ é falsa.

10 pontos

4 Considere a proposição:

$$a \wedge (a \wedge \sim b) .$$

Uma proposição equivalente é:

(A) $a \wedge \sim b$;

(B) $\sim a \wedge b$;

(C) $a \wedge b$;

(D) $a \vee \sim b$.

10 pontos

5 Considere a proposição:

$$(\sim a \wedge b) \vee a .$$

Uma proposição equivalente é:

(A) $\sim a \wedge b$;

(B) $a \vee b$;

(C) $\sim a \wedge \sim b$;

(D) $\sim a \vee \sim b$.

10 pontos

6 A negação da proposição $a \longrightarrow \sim b$ é a proposição:

(A) $\sim a \vee b$;

(B) $a \wedge \sim b$;

(C) $\sim a \wedge \sim b$;

(D) $a \wedge b$.

10 pontos

7 A negação da proposição $(a \longrightarrow \sim b) \wedge \sim c$ é a proposição:

(A) $\sim a \wedge b \wedge c$;

(B) $\sim a \vee (b \wedge c)$;

(C) $(a \wedge b) \vee c$;

(D) $a \wedge b \vee c$.

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

8 Dadas as proposições:

p : O Eusébio foi futebolista.

q : O Jeremias era pescador.

r : A Olívia era estudante.

Considere que p e q são verdadeiras e r é falsa.

8.1 Traduza em linguagem corrente:

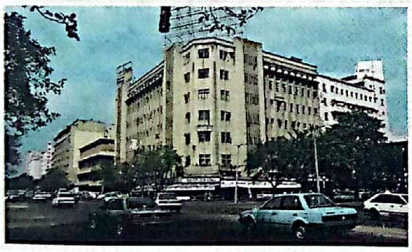
$\sim r \wedge q$; $\sim q \longrightarrow r$; $p \wedge q \wedge r$.

8.2 Determine o valor lógico de cada uma destas proposições.

30 pontos

9 Representando pelas letras a , b e c as proposições elementares:

a : A Joana visitou Maputo.



Maputo

b : A Joana visitou Macia.

Macia

c : A Joana visitou Nacala.

Nacala

9.1 Traduza em linguagem simbólica.

9.1.1 A Joana não visitou Maputo e/ou visitou Macia.

9.1.2 Se a Joana visitou Maputo então visitou Nacala ou Macia.

9.1.3 Se a Joana visitou Maputo e não visitou Nacala, então não visitou Macia.

9.2 Admitindo que a é falsa, diga qual é o valor lógico de cada uma das proposições anteriores.

40 pontos

10 Considere a proposição:

$$p : \sim a \longrightarrow (\sim a \vee b \longrightarrow a \wedge b) .$$

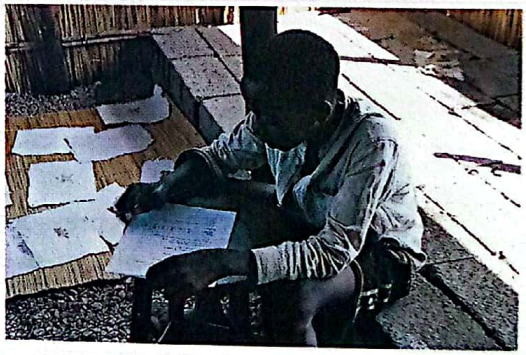
Prove que, quaisquer que sejam os valores lógicos de a e b, se tem $p \longleftrightarrow a$:

10.1 utilizando uma tabela de verdade;

10.2 simplificando p .

30 pontos

11 Sejam a , b e c três proposições.



a : O Manuel estuda Física.

b : O Manuel estuda Matemática.

c : O Manuel estuda Biologia.

11.1 Traduza em linguagem corrente a negação de $a \vee b$.

11.2 Admitindo como falsa a proposição

$$(a \longrightarrow \sim b) \vee (a \wedge c)$$

diga quais são as disciplinas estudadas pelo Manuel.

30 pontos

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Distinguir proposição de expressão proposicional (condição).
2. Identificar expressões algébricas.
3. Classificar expressões algébricas.
4. Utilizar quantificadores na tradução de expressões correntes em expressões quantificadas e vice-versa.
5. Explicar o método de demonstração por indução matemática.
6. Aplicar o método de indução matemática na demonstração de teoremas.

2. Expressões algébricas. Quantificadores

Inhambane

Negar que todas as mulheres têm saias iguais é o mesmo que afirmar que pelo menos uma tem saia diferente.

2.1 Expressões algébricas. Classificação

Uma expressão algébrica é uma expressão que tem pelo menos uma variável.

Expressões algébricas
- **Expressões designatórias**
  Exemplos: $x+3$; $x-1$; x^2 ; $\frac{1}{x}$
- **Condições**
  Exemplos: $x+3=5$; $x>2$; $\frac{1}{x}<0$

Nas expressões designatórias, quando se concretiza a variável ou as variáveis obtém-se uma **designação**.

Por exemplo:

Na expressão designatória $\sqrt{x}$, se $x=4$ então $\sqrt{x}=2$.

Nas condições, quando se concretiza a variável ou variáveis obtém-se uma proposição (verdadeira ou falsa).

Por exemplo:

$x+3=0$

Se $x=-3$, $-3+3=0 \iff 0=0$. Proposição verdadeira.

Se $x=3$, $3+3=0 \iff 6=0$. Proposição falsa.

Em geral, as equações e as inequações são condições.

Digitalizada com CamScanner

Classificação de condições

Num universo dado, uma condição diz-se:

- **universal** quando qualquer concretização da variável ou variáveis a transforma numa proposição verdadeira.

Exemplos:

$x^2 \geqslant 0$ é universal em $\mathbb{R}$

$x + 1 = 1 + x$ é universal em $\mathbb{R}$

- **impossível** quando qualquer concretização da variável ou variáveis a transforma numa proposição falsa.

Exemplos:

$x^2 < 0$ é impossível em $\mathbb{R}$

$x + 1 = x + 2$ é impossível em $\mathbb{R}$

- **possível** quando não é impossível. É evidente que toda a condição universal é possível.

Exemplos:

$x + 3 = 0$ é possível em $\mathbb{R}$

Para $x = -3$ a proposição é verdadeira.

Observação

Uma mesma condição pode ser universal, impossível ou possível de acordo com o universo.

Por exemplo: $x \geqslant 0$ é universal em $\mathbb{N}$; é impossível em $\mathbb{R}^-$ e possível em $\mathbb{R}$.

Condições
- Possíveis
  - Universais
  - Não universais
- Impossíveis

Uma condição define um **conjunto** que é o conjunto dos elementos que, quando concretizam a variável, a transformam numa proposição verdadeira.

Exemplo:

Consideremos a condição $x^2 - 4 = 0$.

Esta condição define o conjunto $\{-2, 2\}$.

1

Das seguintes expressões algébricas refira as que são condições:

1.1 n;

1.2 $\frac{2}{n} + 3 > 0$;

1.3 $\frac{x-7}{5}$;

1.4 $2 > n$;

1.5 $1 - \sqrt{3} > x$;

1.6 $\sqrt{3} > \sqrt{x}$;

1.7 $1 - \sqrt{x-1} > 0$.

Digitalizada com CamScanner

2.2 Quantificadores

Além das operações lógicas já estudadas, podemos ainda considerar mais duas, as quais se aplicam apenas nas expressões com variáveis:

- quantificação universal;
- quantificação existencial.

A estas operações correspondem, na linguagem corrente, as palavras "todo" e "algum".

Todo ⤳ $\forall$ (quantificador universal)

Algum ⤳ $\exists$ (quantificador existencial)

Quantificador universal

Consideremos, em $\mathbb{N}$, a condição universal:

$$x \geqslant 0$$

Para dizer em linguagem corrente que esta proposição é universal escreve-se:

"Todo o número natural é maior ou igual que zero."

Em linguagem simbólica, e com o mesmo significado, escreve-se:

$$\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$$

Podemos então observar que, por meio deste símbolo, a condição inicial transformou-se numa proposição (verdadeira).

De um modo geral:

O símbolo $\forall$ relativo a uma variável define uma operação lógica que transforma uma condição nessa variável numa proposição.

Esta operação denomina-se **quantificação universal** e o respectivo símbolo **quantificador universal**.

Como o quantificador universal indica que, num dado universo, uma condição é universal:

- a proposição obtida é verdadeira se a condição for universal;
- a proposição obtida é falsa se a condição não for universal.

2 Escreva em linguagem simbólica:

2.1 Todo o ser humano é mortal.

2.2 Todos os peixes têm guelras.

2.3 Todo o número inteiro é um número real.

3 Traduza em linguagem corrente:

3.1 $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$;

3.2 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \geqslant n$;

3.3 $\forall x \in P$, x respira por guelras (P conjunto dos peixes);

3.4 $\forall x \in \mathbb{R},\ x+4>0$;

3.5 $\forall x \in \mathbb{N},\ x+4>0$.

4 Das proposições do exercício anterior, indique as que não são verdadeiras.

5 Indique o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

5.1 $\forall x \in \mathbb{R},\ x > \frac{x}{2}$

5.2 $\forall x \in \mathbb{N}^*,\ x > \frac{x}{2}$

5.3 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

5.4 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, $\forall x \in \mathbb{N}$

6 Sendo $A = \{2, 3, 4\}$, escreva na forma de expressão quantificada.

6.1 $2>0 \wedge 3>0 \wedge 4>0$

6.2 $2<2\times2 \wedge 3<2\times3 \wedge 4<2\times4$

Digitalizada com CamScanner

Exemplos:

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x+1>x$ (proposição verdadeira)
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x+1>2$ (proposição falsa)

Além da leitura apresentada para o símbolo $\forall$, este ainda pode significar:

"qualquer que seja"; "para todo";
"para qualquer"; "para cada".

Relativamente à escrita, o quantificador pode surgir:

- antes da condição e separado dela por uma vírgula ou dois pontos;
- depois da condição e separado dela por uma vírgula.

Se a variável aparece em índice, a vírgula e os dois pontos são desnecessários.

Assim, a proposição:

$$\forall x \in \mathbb{N},\ x \geqslant 0$$

também pode apresentar as seguintes formas:

$\forall x \in \mathbb{N}: x \geqslant 0$ $\quad$ $\forall_{x \in \mathbb{N}}\ x \geqslant 0$

$x \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{N}$ $\quad$ $x \geqslant 0\ \forall_{x \in \mathbb{N}}$

Repare que: Num universo finito, o quantificador universal traduz-se por conjunções sucessivas de proposições.

Por exemplo, sendo $C=\{1, 3, 5\}$, dizer que:

$$1 \text{ é ímpar} \wedge 3 \text{ é ímpar} \wedge 5 \text{ é ímpar}$$

é o mesmo que dizer:

"todo o elemento de C é ímpar"

ou, simbolicamente,

$$\forall x \in C,\ x \text{ é ímpar.}$$

7

Escreva em linguagem simbólica:

7.1 Existe pelo menos um número real maior que 50.

7.2 Há pelo menos um número primo par.

7.3 Há pelo menos um número real cujo quadrado é igual a 16.

7.4 Algumas cobras são venenosas.

Quantificador existencial

A partir da condição possível em $\mathbb{R}$:

$$x+1=0$$

pode afirmar-se: "Existe pelo menos um número real que verifica a condição $x+1=0$."

Em linguagem simbólica, escrever-se-ia com o mesmo significado:

$$\exists x \in \mathbb{R}: x+1=0$$

Digitalizada com CamScanner

Em sentido mais lato:

O símbolo $\exists$ (lê-se *existe pelo menos um*) relativo a uma variável define uma operação lógica que transforma uma condição dessa variável numa proposição.

A esta operação chama-se **quantificação existencial** e ao respectivo símbolo **quantificador existencial.**

Como o quantificador existencial se destina a afirmar que, num dado universo, uma condição é possível:

- a proposição obtida é verdadeira se a condição é possível;
- a proposição obtida é falsa se a condição é impossível.

Exemplos:

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4 = 0$ (proposição verdadeira)
2. $\exists n \in \mathbb{N},\ n > 0$ (proposição verdadeira)
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$ (proposição falsa)

8

Traduza em linguagem corrente.

8.1 $\exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 3x + 2 = 0$

8.2 $\exists x \in \mathbb{N} :\ x^2 + 3x + 2 = 0$

8.3 $\exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 + 3 > 0$

8.4 $\exists x \in \mathbb{R} :\ 3x - 2 < x$

8.5 $\exists x \in \mathbb{N}^* :\ 3x - 2 < x$

O símbolo $\exists$, que se lê *existe pelo menos um* ou *há pelo menos um*, só pode aparecer antes da condição e sempre separado desta por uma vírgula ou dois pontos.

Assim, a proposição:

$$\exists x \in \mathbb{R} :\ x + 1 = 0$$

também pode escrever-se:

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x + 1 = 0$$

e

$$\exists_{x \in \mathbb{R}}\ x + 1 = 0$$

9

Indique o valor lógico de cada uma das proposições do exercício anterior.

Repare que: Num universo finito, o quantificador existencial traduz-se por uma disjunção sucessiva de proposições.

Por exemplo, sendo $C = \{-2,\ -1,\ 0\}$, dizer que

$$-2 + 1 = 0 \vee -1 + 1 = 0 \vee 0 + 1 = 0,$$

é o mesmo que dizer:

"há pelo menos um elemento de C cuja soma com 1 é igual a zero",

ou, simbolicamente:

$$\exists x \in C :\ x + 1 = 0$$

10

Quando a condição num dado universo admite uma só solução utiliza-se o símbolo $\exists^1$, que se lê "existe um e um só".
Como tal, diga se são verdadeiras ou falsas as proposições:

10.1 $\exists^1 x \in \mathbb{N} :\ x^2 - 4 = 0$;

10.2 $\exists^1 x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 4 = 0$;

10.3 $\exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 4 = 0$.

Repare que: Em relação a qualquer dos quantificadores, o domínio da variável pode ser omitido sempre que esteja subentendido.

Digitalizada com CamScanner

Variáveis mudas e variáveis livres; quantificação parcial

Quando um quantificador incide sobre uma variável, esta torna a designação de **muda, aparente ou ligada**; já a uma variável que não está quantificada chama-se **livre**.

Exemplos:

1. Nas condições seguintes, em $\mathbb{R}$:

$$x < 2x$$

e

$$x + 3 = 5$$

x é uma variável **livre**.

2. Mas nas proposições

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \ , \ x < 2x$$

e

$$\exists x \in \mathbb{R} : \ x + 3 = 5$$

x é uma variável **muda**.

11

Nas expressões seguintes, refira quais as variáveis livres e quais as mudas.

11.1 x é múltiplo de y

11.2 $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ x + 0 = x$

11.3 $\exists y \in \mathbb{R} : \ x + y = 0$

11.4 $\forall x \in \mathbb{N} \ , \ x + 3 > 2$

No entanto, numa mesma expressão podem aparecer, simultaneamente, variáveis livres e variáveis mudas.

Por exemplo, em $\mathbb{R}$, na expressão:

$$\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 + y = 0$$

x é uma variável muda e y uma variável livre.

Note que esta expressão não é uma proposição mas sim uma condição na variável y .

12

Entre as expressões do exercício anterior, distinga as proposições das condições.

Na verdade, da concretização de y resultam proposições.

Assim, para $y = 1$ temos a proposição falsa:

$$\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 1 = 0$$

e, para $y = -4$, a proposição é verdadeira:

$$\exists x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 4 = 0$$

13

Considere a condição em $\mathbb{N}^*$, $\exists x \in C : x + 2y < 6$, sendo $C = \{1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ 4\}$.

Qual o conjunto-solução da condição?

De um modo geral, dada uma condição com mais de uma variável livre, a aplicação de um quantificador transforma a condição noutra com menos uma variável livre.

Digitalizada com CamScanner

Quantificação múltipla

Consideremos, em $\mathbb{R}$, a condição:

$$y = x$$

Para obtermos uma proposição a partir desta condição, temos de utilizar dois quantificadores (quantificação múltipla).

- **Utilizando duas vezes o quantificador universal**

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = x$$

ou

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ y = x$$

Em linguagem corrente:

Quaisquer dois números reais são iguais (proposição falsa).

- **Utilizando duas vezes o quantificador existencial**

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ y = x$$

ou

$$\exists x, y \in \mathbb{R} :\ y = x$$

Em linguagem corrente:

Existem pelo menos dois números reais que são iguais (proposição verdadeira).

- **Utilizando quantificadores diferentes**

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ y = x$

   Em linguagem corrente:

   Para todo o número real existe pelo menos um número real igual a ele (proposição verdadeira).

2. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} :\ y = x$

   Em linguagem corrente:

   Existe pelo menos um número real que é igual a todos os outros números reais (proposição falsa).

Quando se utilizam quantificadores diferentes e se troca a sua ordem, obtêm-se proposições diferentes que podem ter ou não o mesmo valor lógico.

14

Considere, em $\mathbb{R}$, a condição $x + y = 0$.

14.1 Utilize, para a transformar numa proposição, dois quantificadores:

a) universais;

b) existenciais;

c) um universal e um existencial;

d) um existencial e um universal.

14.2 Traduza cada uma das proposições anteriores em linguagem corrente e indique o seu valor lógico.

15

Qual o valor lógico das proposições:

15.1 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ xy = x$;

15.2 $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy = x$.

Digitalizada com CamScanner

2.3 Segundas leis de De Morgan

Consideremos, no conjunto T dos alunos da turma, as proposições:

1. $\forall x \in T$, x estuda Matemática.
2. $\exists x \in T$: x visitou Pemba.

Em linguagem corrente traduzem-se, respectivamente, por:

1. Todos os alunos estudam Matemática.
2. Há pelo menos um aluno que visitou Pemba.

A negação destas proposições em linguagem corrente é:

1. Nem todos os alunos da turma estudam Matemática.
2. Nenhum aluno da turma visitou Pemba.

Traduzindo em linguagem simbólica:

1. $\exists x \in T$, x não estuda Matemática.
2. $\forall x \in T$, x não visitou Pemba.

Isto é,

$\sim (\forall x \in T$, x estuda Matemática$) \iff \exists x \in T$, x não estuda Matemática.

$\sim (\exists x \in T$: x visitou Pemba$) \iff \forall x \in T$, x não visitou Pemba.

Em geral:

1. A negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial seguido de negação:

$$\sim \forall = \exists \sim$$

2. A negação transforma o quantificador existencial em quantificador universal seguido de negação:

$$\sim \exists = \forall \sim$$

Estes dois enunciados são conhecidos por **segundas leis de De Morgan.**

16 Nega cada uma das seguintes proposições:

16.1 $\forall x \in T$, x joga futebol.

16.2 $\exists x \in T$: x joga xadrez $\wedge$ $\wedge x$ joga dominó.

16.3 $\exists x \in \mathbb{R}$: $2x + 1 = x - 5$.

16.4 $\exists x \in \mathbb{N}$, $|x| < 2 \vee$ $\vee 2x - 5 > 0$.

17 Aplica as leis de De Morgan para obter a negação (sem o sinal $\sim$) de:

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}$: $x = 3y$.

Digitalizada com CamScanner

2.4 Método de indução matemática

Considere-se a sucessão:

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = 3 + b_{n-1}, \quad n \geqslant 2 \end{cases}$$

Escrevendo alguns termos da sucessão, vem:

$$5, \ 8, \ 11, \ 14, \ \ldots$$

A observação dos termos da sucessão faz conjecturar que o termo geral seja:

$$b_n = 3n + 2$$

Mas será de facto este o termo geral?

Se a Matemática fosse uma ciência experimental, em que a repetição de um fenómeno, um grande número de vezes, levasse a aceitá-lo como lei, naturalmente que diríamos que sim. Mas em Matemática tem de se provar a veracidade de todos os casos e, como são infinitos, por muitos que se verifiquem, nunca se verificam todos.

Em situações como estas pode, por vezes, recorrer-se à demonstração pelo **método de indução matemática:**

Método de indução matemática

Se no universo $\mathbb{N}^*$ representarmos uma condição por $A(n)$ e se:

- **$A(1)$ é verdadeira (condição inicial)**

e

- **$A(p) \longrightarrow A(p+1)$ é verdadeira para todo p (hereditariedade),**

então $A(n)$ é universal.

Observação

$A(p)$ designa-se por **hipótese de indução** e $A(p+1)$ por **tese.**

Considere-se, então, a sucessão (b_n), definida por recorrência:

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = 3 + b_{n-1}, \quad n \geqslant 2 \end{cases}$$

Prove-se que $b_n = 3n + 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicando o método de indução matemática, considere-se a condição $A(n)$ definida por $b_n = 3n + 2$.

$A(n): \ b_n = 3n + 2$

1.º $A(1): \ b_1 = 3 \times 1 + 2$

Ora, $b_1 = 5$ e $5 = 3 \times 1 + 2$.

Logo, $A(1)$ é verdadeira.

Digitalizada com CamScanner

2.º Suponhamos que $A(n)$ é verdadeira para o inteiro p, ou seja:

$$b_p = 3p + 2$$

Vamos provar, então, que $A(n)$ é verdadeira para $p+1$, isto é:

$$b_{p+1} = 3(p+1) + 2$$

Observação

A ideia do **método de indução matemática** é a seguinte:

Se uma propriedade é verdadeira para o inteiro 1 e se é hereditária é verdadeira para o inteiro 2. E por ser hereditária é verdadeira para o inteiro 3 e assim sucessivamente...

Note também que há propriedades que são verdadeiras para o inteiro 1 e eventualmente para outros inteiros, mas não são hereditárias para todos eles, por exemplo:

$n^2 - n + 41$ é um número primo para valores de n compreendidos entre 1 e 40, mas não para $n = 41$.

Existem propriedades que são hereditárias e não são válidas para o inteiro 1.

"10^n é múltiplo de 4" é hereditária mas não é válida para $n = 1$.

Relembre-se a sucessão de recorrência:

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = 3 + b_{n-1}, \quad n \geqslant 2 \end{cases}$$

Partindo desta definição, pode-se escrever:

$$b_{p+1} = 3 + b_p$$

Mas sabe-se, por hipótese de indução, que $b_p = 3p + 2$.

Então, substituindo b_p, vem:

$$b_{p+1} = 3 + (3p + 2)$$

Efectuando os cálculos, vem:

$$b_{p+1} = 3p + 3 + 2$$

ou seja:

$$b_{p+1} = 3(p+1) + 2$$

isto é:

$$A(p+1)$$

Concluímos, então, que se $A(n)$ for verdadeira para o inteiro p, também é verdadeira para o seu sucessor $p+1$ (a proposição é hereditária).

- **A condição $A(n)$ é universal em $\mathbb{N}^*$**

Como já tínhamos verificado que era verdadeira para $n = 1$, pode-se concluir que o termo geral para a sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = 3 + b_{n-1}, \quad n \geqslant 2 \end{cases}$$

é:

$$b_n = 3n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

18

18.1 Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Prove, por indução matemática, que:

$u_n = 1 + 2^{1-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

18.2 Prove, por indução matemática, que:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $3^n \times 2^n = (3 \times 2)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Das seguintes expressões, qual delas **não** é uma proposição?

(A) $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x > 1$

(B) $\forall x \in \mathbb{N}^*\,,\ x \geqslant 1$

(C) $\forall x \in \mathbb{Z}^-\,,\ x > 0$

(D) $\forall x \in \mathbb{N}^*\,,\ x + y > 0$

10 pontos

2 Qual das seguintes expressões traduz a proposição:

"Há um número racional maior que 10^{1000}".

(A) $\exists x \in \mathbb{Q}\,,\ x > 10^{1000}$

(B) $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x > 10^{1000}$

(C) $\exists x \in \mathbb{Q}\,,\ x \geqslant 10^{1000}$

(D) $\forall x \in \mathbb{Q}\,,\ x \geqslant 10^{1000}$

10 pontos

3 Qual das seguintes expressões traduz a proposição:

"Todos os números naturais, excepto o zero, são não negativos".

(A) $\exists x \in \mathbb{N}^*\,,\ x > 0$

(B) $\forall x \in \mathbb{N}^*\,,\ x > 0$

(C) $\forall x \in \mathbb{N}^*\,,\ x \geqslant 0$

(D) $\forall x \in \mathbb{N}^*\,,\ x < 0$

10 pontos

4 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ n > 1$

(B) $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 > 0$

(C) $\exists x \in \mathbb{R}\,,\ \sqrt{x} \notin \mathbb{R}$

(D) $\exists x \in \mathbb{R}\,,\ \sqrt[3]{x} \notin \mathbb{R}$

10 pontos

5 A negação da proposição:

"$\exists y \in \mathbb{Z} : y < 0 \ \wedge\ y^2 = 0$"

é a proposição:

(A) $\exists y \in \mathbb{Z}\,,\ y \geqslant 0 \ \wedge\ y^2 \neq 0$;

(B) $\forall y \in \mathbb{Z}\,,\ y \geqslant 0 \ \vee\ y^2 \neq 0$;

(C) $\forall y \in \mathbb{Z}\,,\ y > 0 \ \vee\ y^2 \neq 0$;

(D) $\forall y \in \mathbb{Z}\,,\ y = 0 \ \vee\ y^2 = 0$.

10 pontos

6 A negação da proposição:

"$\forall x \in \mathbb{N}\,,\ |x| > 3 \ \wedge\ x < 2$"

é a proposição:

(A) $\exists x \in \mathbb{N} : |x| \leqslant 3 \ \vee\ x \geqslant 2$;

(B) $\forall x \in \mathbb{N} : |x| \leqslant 3 \ \wedge\ x \geqslant 2$;

(C) $\exists x \in \mathbb{N} : |x| < 3 \ \wedge\ x > 2$;

(D) $\exists x \in \mathbb{N} : |x| \leqslant 3 \ \wedge\ x \leqslant 2$.

10 pontos

7 Considere as proposições:

$p : \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y = x$;

$q : \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x + y = x$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $p \wedge q$ é verdadeira;

(B) $p \veebar q$ é verdadeira;

(C) $p \longrightarrow q$ é verdadeira;

(D) $p \longleftrightarrow q$ é verdadeira.

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

8 Escreva usando linguagem simbólica.

8.1 Todo o número natural é positivo.

8.2 Há números reais negativos.

8.3 O valor absoluto de um número racional é sempre não negativo.

8.4 A equação $x = x + 6$ é impossível em $\mathbb{R}$.

8.5 Entre -5 e 5 há alguns números inteiros.

8.6 Entre 4 e 5 não há números inteiros.

20 pontos

9 Traduza em linguagem corrente cada uma das proposições seguintes e indique o seu valor lógico.

9.1 $\forall x \in \mathbb{N},\ x$ é real

9.2 $\forall p \in L,\ p \wedge p = p$

9.3 $\exists x \in \mathbb{R} : |x| - 7 \leqslant 0$

9.4 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > \frac{1}{n}$

9.5 $\exists y \in \mathbb{R} : y > \frac{1}{y}$

9.6 $\exists x \in [1,\ 5[: x = 5$

20 pontos

10

10.1 Traduza em linguagem corrente as expressões:

a) $\exists x \in H,\ x$ esteve na Lua
(H – conjunto dos seres vivos).

Astronauta a chegar à Lua na missão ***Apollo15***

b) $\forall x \in \mathbb{Z},\ x = 2x$.

10.2 Indique o valor lógico das proposições de **10.1**.

10.3 Sem utilizar o símbolo $\sim$, escreva em linguagem simbólica a negação das proposições de **10.1**.

20 pontos

11

11.1 Traduza em linguagem simbólica, utilizando quantificadores, as seguintes proposições:

a) "Dado um inteiro qualquer, existe pelo menos outro inteiro menor do que ele."

b) "Há pelo menos um inteiro que é menor que todos os outros."

11.2 Indique o valor lógico das proposições anteriores.

20 pontos

12 Indique o valor lógico das proposições:

12.1 $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N},\ y < x$.

12.2 $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N},\ y \leqslant x$.

20 pontos

13 Sabe-se que, em $\mathbb{R}$, a multiplicação goza das seguintes propriedades:

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists^1 z \in \mathbb{R},\ z = xy$;

b) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = yx$;

c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (xy)z = x(yz)$;

d) $\exists u \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ xu = ux = x$;

e) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy = yx = 1$.

13.1 Identifique-as.

13.2 Indique o valor lógico das proposições:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists u \in \mathbb{R},\ xu = ux = x$;

b) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ xy = yx = 1$.

20 pontos

14 Traduza em linguagem simbólica e relativamente à adição em $\mathbb{R}$:

14.1 a propriedade comutativa;

14.2 a existência de um elemento neutro;

14.3 que todo o número real tem simétrico.

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

Um olhar sobre a História

Ao longo da história da Matemática, muitos dos episódios ocorridos dariam hoje, provavelmente, argumentos para um filme. É o caso da descoberta de um método para a resolução de equações de grau superior ao 2.° por matemáticos italianos.

Cerca de 1515, Scipione del Ferro (1465-1526), professor de Matemática na Universidade de Bolonha, resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + px = q$ em que p e q são números positivos. Este matemático manteve em segredo o seu trabalho e apenas o revelou ao seu aluno Antonio Fior.

Por volta de 1535, Niccolò Fontana de Brescia, normalmente referido como Tartaglia, o *Gago*, devido a uma agressão por um soldado francês durante a infância que lhe afectou a voz, reivindicou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = q$ (p e q são números positivos).

Fior, pensando que Tartaglia estava a mentir, desafiou-o para uma disputa pública para resolução de problemas. Tartaglia só alguns dias antes do concurso encontrou também soluções para equações cúbicas sem o termo quadrático.

Iniciada a disputa pública, Tartaglia estava preparado para resolver dois tipos de equações cúbicas, enquanto Fior só estava preparado para a resolução de um tipo. Tartaglia triunfou exuberantemente nesta disputa.

Mais tarde, Girolamo Cardano, que ensinava Matemática e praticava Medicina em Milão, publicou em 1545 um grande tratado de álgebra e nele aparecia a solução das equações cúbicas de Tartaglia. Acontece que Tartaglia havia ensinado Cardano a resolver um caso da cúbica, sob juramento de segredo. Contudo, este deduziu os outros casos e descobriu que quem tinha mesmo prioridade era Del Ferro. Assim, sentiu-se livre para publicar os métodos de resolução, dando também crédito a Tartaglia. Mas este não gostou. Seguiram-se os seus protestos e uma discussão entre este e Cardano. A defesa deste ficou a cargo do seu aluno Ludovico Ferrari que, por sua vez, descobriu um método para resolver algebricamente as equações do 4.° grau.

As equações de grau superior não têm método geral de resolução, como ficou provado no século XIX.

Niccolò Fontana (Tartaglia)

Girolamo Cardano

Digitalizada com CamScanner

2 Álgebra

1 Expressões algébricas racionais

2 Expressões algébricas irracionais

3 Sistemas de equações

Material:
Lápis e papel

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Determinar o domínio de expressões algébricas racionais.
2. Operar com fracções racionais.
3. Resolver equações e inequações racionais.

1. Expressões algébricas racionais

Pintura de Malangatana

Na Matemática como na vida as equações ajudam a resolver problemas.

1.1 Equações (revisão)

Princípios de equivalência

A resolução de uma equação consiste na determinação do seu **conjunto-solução.**

Utilizando os princípios de equivalência que vamos enunciar, vai-se transformando a equação dada noutras até que o conjunto-solução seja de fácil determinação.

Princípio da adição

Se adicionarmos aos dois membros de uma equação a mesma expressão obtém-se uma equação equivalente no domínio comum à expressão e à equação.
Nesse domínio:

$$A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$$

Repare que: É este princípio de adição que justifica a **regra de transposição:** se numa equação se transpõe um termo de um membro para o outro com troca de sinal, obtém-se uma equação equivalente.

$$A + C = B \Leftrightarrow A = B - C$$

Digitalizada com CamScanner

Princípio da multiplicação

Multiplicando os dois membros de uma equação por um mesmo número k diferente de zero, ou por uma expressão, C, que nunca se anule para qualquer valor da variável, obtém-se uma equação equivalente no domínio comum à expressão e à equação dada.
Nesse domínio tem-se:

- se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$A = B \iff kA = kB$$

- se $C \neq 0$, para todo o número real x,

$$A = B \iff CA = CB$$

Exemplo 1 **Resolver uma equação do 1.° grau**

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$x - (-x + 3) = -x + 2$

Resolução

$x - (-x + 3) = -x + 2 \iff x + x - 3 = -x + 2 \iff$

$\iff x + x + x = 2 + 3 \iff 3x = 5 \iff x = \frac{5}{3}$

$S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

1

Resolva, e classifique, em $\mathbb{R}$, as equações.

1.1 $1 - x = \frac{1}{2}$

1.2 $-\frac{1}{2}x = 0$

1.3 $-x - (-x + 2) = \frac{1}{4}$

1.4 $-x + 3 - 7 = x$

1.5 $x - 2 = -(2 + x)$

Exemplo 2 **Resolução de uma equação do 2.° grau**

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações do 2.° grau.

2.1 $3x^2 = 0$

2.2 $2x^2 - 6 = 0$

2.3 $x^2 - 7x = 0$

2.4 $x^2 - 5x + 6 = 0$

Resolução

2.1 $3x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$

$S = \{0\}$

2.2 $2x^2 - 6 = 0 \iff 2x^2 = 6 \iff x^2 = 3 \iff x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

$S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

Observação

Equações do 2.° grau
$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Tem-se:

$ax^2 + bx + c = 0 \iff$

$\iff x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee$

$\vee x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Se $b^2 - 4ac < 0$: equação impossível
- Se $b^2 - 4ac \geqslant 0$: equação possível

Digitalizada com CamScanner

2

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

2.1 $-\frac{1}{3}x^2 = 0$

2.2 $5x^2 - 4 = 0$

2.3 $6x^2 + 4 = 0$

2.4 $-x^2 = 7x$

2.5 $x^2 - 7x + 10 = 0$

2.3 $x^2 - 7x = 0 \iff x(x-7) = 0 \iff x = 0 \vee x - 7 = 0 \iff$

$\iff x = 0 \vee x = 7$

$S = \{0, 7\}$

2.4 $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \iff x = \frac{5 \pm 1}{2} \iff$

$\iff x = \frac{6}{2} \vee x = \frac{4}{2} \iff x = 3 \vee x = 2$

$S = \{2, 3\}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Exemplo 3 Resolução de uma equação da forma $A(x) \times B(x) \times \ldots \times H(x) = 0$

Resolva, cada uma das seguintes equações depois de decompor em factores o 1.º membro.

3.1 $x^3 - 4x = 0$ **3.2** $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

Resolução

3.1 $x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2 - 4) = 0 \iff x(x-2)(x+2) = 0 \iff$

$\iff x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$

$S = \{-2, 0, 2\}$

3.2 $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \iff x(x^2 - 2x - 3) = 0$

Sabe-se que:

$ax^2 + bx + c = 0 \iff a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, onde x_1 e x_2 são as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$.

Aplicando este conhecimento, tem-se:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 3}}{2} \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \iff$

$\iff x = \frac{2 \pm 4}{2} \iff x = \frac{2+4}{2} \vee x = \frac{2-4}{2} \iff$

$\iff x = 3 \vee x = -1$

Logo,

$x(x^2 - 2x - 3) = 0 \iff x(x-3)(x+1) = 0 \iff$

$\iff x = 0 \vee x - 3 = 0 \vee x + 1 = 0 \iff$

$\iff x = 0 \vee x = 3 \vee x = -1$

$S = \{-1, 0, 3\}$

Observação

Equações da forma

$A(x) \times B(x) \times \ldots \times H(x) = 0$

em que $A(x)$, $B(x)$, ..., $H(x)$ são polinómios em x.

Na resolução destas equações utiliza-se a **lei do anulamento do produto:**

um produto de dois ou mais números só é nulo se pelo menos um dos factores é nulo.

$A(x) \times B(x) \times \ldots \times H(x) = 0 \iff$

$\iff A(x) = 0 \vee B(x) = 0 \vee \ldots \vee H(x) = 0$

3

Resolva cada uma das seguintes equações.

3.1 $\frac{2}{3}x^3 = 0$

3.2 $3x^3 + 1 = 0$

3.3 $2x^3 - 14x^2 + 24x = 0$

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 4 **Resolução de uma equação biquadrada**

Resolva a equação $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$.

Resolução

Para $x^2 = t$, a equação dada transforma-se em:

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \iff t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \iff$$

$$\iff t = \frac{6 \pm 4}{2} \iff t = 5 \vee t = 1$$

Tem-se que:

$$x^2 = 5 \vee x^2 = 1 \iff x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -1 \vee x = 1$$

$$S = \{-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}\}$$

4 Resolva cada uma das seguintes equações.

4.1 $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

4.2 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

1.2 Resolução de inequações (revisão)

Exemplo 5 **Resolução de uma inequação**

Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$2(1 - x) - \frac{1 + 8x}{2} < 3 - x$$

Resolução

$$2(1 - x) - \frac{1 + 8x}{2} < 3 - x \iff$$

$$\iff \underset{(2)}{2} - \underset{(2)}{2x} - \underset{(1)}{\frac{1 + 8x}{2}} < \underset{(2)}{3} - \underset{(2)}{x} \iff$$

$$\iff 4 - 4x - 1 - 8x < 6 - 2x \iff$$

$$\iff -4x - 8x + 2x < 6 - 4 + 1 \iff$$

$$\iff -10x < 3 \iff 10x > -3 \iff$$

$$\iff x > -\frac{3}{10}$$

$$S = \left]-\frac{3}{10}, +\infty\right[$$

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações.

5.1 $-x > \frac{1}{2} + 2x$

5.2 $1 - \frac{x - 1}{2} > \frac{x + 3}{5}$

Digitalizada com CamScanner

Observação

Inequações do tipo

$A(x) \times B(x) > 0$ ou

$A(x) \times B(x) < 0$

$A(x)$	+	−	+	−
$B(x)$	+	−	−	+
$A(x) \times B(x)$	+	+	−	−

Atende-se à regra dos sinais da multiplicação:

$A(x) \times B(x) > 0 \iff$

$\iff \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$

$A(x) \times B(x) < 0 \iff$

$\iff \begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) < 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$

Exemplo 6 Resolução de uma inequação

Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$(x+3)(x-2) < 0$

Resolução

$(x+3)(x-2) < 0$

$x+3=0 \iff x=-3$
$x-2=0 \iff x=2$

- zero de $x+3$ é -3
- zero de $x-2$ é 2
- Vamos construir um quadro onde se estuda o sinal dos dois factores e, em seguida, o sinal do produto.

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$x+3$	−	0	+	+	+
$x-2$	−	−	−	0	+
$(x+3) \times (x-2)$	+	0	−	0	+

$S =]-3, 2[$

6

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações.

6.1 $(x-2)(x-1) > 0$

6.2 $x(x-3) < 0$

6.3 $x^2 - 6x \geqslant 0$

1.3 Expressões racionais. Domínio

Expressão racional

Uma expressão racional de uma variável é uma expressão do tipo $\frac{n(x)}{d(x)}$, onde $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios e $d(x)$ é diferente do polinómio nulo. O domínio, D, da expressão racional é o conjunto dos números reais que não anulam o denominador:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : d(x) \neq 0\}$$

São expressões racionais:

- $\frac{1}{x-3}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $\quad x-3 \neq 0 \iff x \neq 3$
- $\frac{1}{x^2-1}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ $\quad x^2-1 \neq 0 \iff x \neq 1 \wedge x \neq -1$
- $\frac{x^2-1}{x^2+3}$ $\quad D = \mathbb{R}$ $\quad x^2+3 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- x^2+2x+1 $\quad D = \mathbb{R}$ $\quad$ Um polinómio define uma função racional inteira.

Digitalizada com CamScanner

Não são expressões racionais, por exemplo:

- $\sqrt{x}+3$;

A expressão $\sqrt{x}+3$ não é um polinómio.

- $|x|$;

$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$

- $\dfrac{2^x}{3+x}$.

2^x não é um polinómio;
x^2 é um polinómio.

Nem sempre a determinação do domínio de uma expressão racional é imediata como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo 7 **Determinar o domínio de uma expressão racional**

Determine o domínio de cada uma das seguintes expressões racionais.

7.1 $\dfrac{2x}{x^2+x-2}$ **7.2** $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+5x^2-6x}$

Resolução

7.1 $D=\{x \in \mathbb{R} : x^2+x-2 \neq 0\}$

$x^2+x-2=0 \iff x=\dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

Aplica-se a fórmula $x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e resolve-se a equação do 2.º grau.

$\iff x=\dfrac{-1+3}{2} \vee x=\dfrac{-1-3}{2} \iff x=1 \vee x=-2$

$D=\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

Recorde que se ax^2+bx+c é um trinómio do 2.º grau e x_1 e x_2 são as raízes do trinómio, então $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ com $a \neq 0$.

Então, $\dfrac{2x}{x^2+x-2}=\dfrac{2x}{(x-1)(x+2)}$ e $D=\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

7.2 $D=\{x \in \mathbb{R} : x^3+5x^2-6x \neq 0\}$

Tem-se:

$x^3+5x^2-6x=0 \iff x(x^2+5x-6)=0$

$\iff x=0 \vee x^2+5x-6=0$

$\iff x=0 \vee x=\dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2}$

$\iff x=0 \vee x=-6 \vee x=1$

Logo,

$D=\mathbb{R} \setminus \{0, -6, 1\}$

Aplica-se a fórmula $x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ para resolver a equação do 2.º grau.

O domínio são todos os números reais excepto os que anulam o denominador $\{0, -6, 1\}=\{-6, 0, 1\}$.

A ordem, na escrita em extensão de um conjunto, não é relevante.

7

7.1 Explique por que razão:

$\sqrt{2x+3}$ é uma expressão racional e $\sqrt{2x+3}$ não é uma expressão racional.

7.2 Escreva como um produto.

a) $2x-2$

b) x^2-4

c) $1-x^2$

d) $\dfrac{x^2}{4}-49$

e) x^2-4x+3

f) $2x^2-11x+5$

g) x^3-x^2

h) x^3-x

7.3 Determine o domínio de cada uma das seguintes expressões racionais.

a) $\dfrac{1}{2x-2}$

b) $\dfrac{3x}{x^2-4}$

c) $\dfrac{x^3}{1-x^2}$

d) $\dfrac{3x^5-1}{\frac{x^2}{4}-49}$

e) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

f) $\dfrac{1}{2x^2-11x+5}$

g) $\dfrac{3x+1}{x^3-x^2}$

h) $\dfrac{3x^2-7}{x^3-x}$

i) $\dfrac{3x^2+1}{4x^2-4x+6}$

j) $\dfrac{2x}{3x^2-6x-9}$

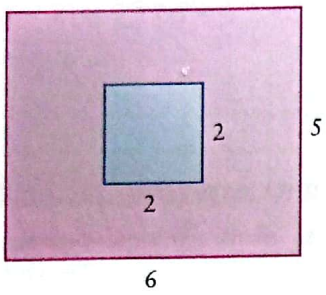
k) $\dfrac{3x^5+1}{x^3-4x^2-5x}$

l) $\dfrac{2x}{x^4-2x^2-3}$

Digitalizada com CamScanner

1.4 Simplificação de expressões racionais

Na resolução de um problema, sempre que a resposta é uma fracção, esta deve ser apresentada de uma forma simplificada.

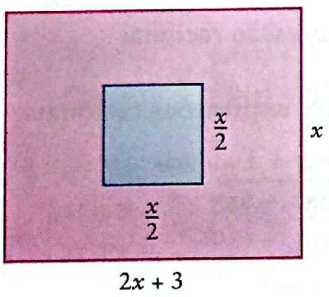


Por exemplo:

A razão entre as áreas do rectângulo e do quadrado representados ao lado é:

$$\frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

Se a resposta é uma expressão racional com variáveis no numerador ou no denominador, também deve ser dada na forma simplificada.



Por exemplo:

A razão entre a área do rectângulo e do quadrado representados ao lado é:

$$\frac{x(2x+3)}{\frac{x^2}{4}} = \frac{2x+3}{\frac{x}{4}} = \frac{8x+12}{x}$$

Se uma expressão racional está simplificada, o numerador e o denominador não têm factores em comum.

Exemplo 8 Simplificar expressões racionais

Simplifique.

8.1 $\frac{2x^2-6x}{4x^2}$ **8.2** $\frac{x^2-3x-18}{2x-12}$ **8.3** $\frac{-2x^2+5x-2}{-x^2+x+2}$

Resolução

8.1 $\frac{2x^2-6x}{4x^2} = \frac{2x(x-3)}{2x(2x)} =$

Põe-se em evidência os factores comuns ao numerador e ao denominador (2 e x).

$= \frac{\cancel{2x}(x-3)}{\cancel{2x}(2x)}$

Divide-se o numerador e o denominador pelos factores comuns.

$= \frac{x-3}{2x}, \quad x \neq 0$

Expressão simplificada.

8.2 $\frac{x^2-3x-18}{2x-12} = \frac{(x-6)(x+3)}{2(x-6)}$

Factoriza-se o numerador e o denominador.

$= \frac{\cancel{(x-6)}(x-3)}{2\cancel{(x-6)}}$

Divide-se o numerador e o denominador por $(x-6)$.

$= \frac{x-3}{2}, \quad x \neq 6$

Expressão simplificada equivalente à dada.

Note que ao dividir a expressão $x-6$ alterou-se o domínio da expressão dada e, por isso, a igualdade só é válida para $x \neq 6$.

8

Simplifique cada uma das seguintes fracções e indique os valores da variável, para os quais a simplificação é válida.

8.1 $\frac{x-3}{9-x^2}$

8.2 $\frac{x-5}{x^2+25-10x}$

8.3 $\frac{\frac{x}{2}+1}{\frac{1}{x}}$

8.4 $\frac{3x+x^2}{x+3}$

8.5 $\frac{(x-5)^2}{25-x^2}$

8.6 $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x}$

8.7 $\frac{x^2-3x-4}{x^2-4x}$

8.8 $\frac{x^5-x^2}{x^4+x^3+x^2}$

8.9 $\frac{x+\frac{1}{2}x}{x-\frac{1}{x}}$

Digitalizada com CamScanner

8.3 $\dfrac{-2x^2+5x-2}{-x^2+x+2}$

$= \dfrac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{-(x-2)(x+1)}$

$= \dfrac{-2x+1}{-x-1}, \quad x \neq 2$

$= \dfrac{2x-1}{x+1}, \quad x \neq 2$

$-2x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{-5+3}{-4} = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{-5-3}{-4} = 2 \end{cases}$

$-x^2+x+2=0 \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \begin{cases} x = \dfrac{-1+3}{-2} = -1 \\ x = \dfrac{-1-3}{-2} = 2 \end{cases}$

Factoriza-se o numerador e o denominador.
Divide-se o numerador e o denominador pelo factor comum $(x-2)$.
Expressão simplificada.

1.5 Multiplicação e divisão de expressões racionais

As regras para multiplicar ou dividir expressões racionais são semelhantes às que utilizamos para multiplicar ou dividir números fraccionários.

Assim, sempre que as expressões têm significado, tem-se:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad ; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemplo 9 **Multiplicação de expressões racionais**

Identifique o domínio da expressão e, no domínio, efectue e simplifique.

$$\frac{x}{2x-3} \times \frac{x-3}{2x^2}$$

Resolução

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$$

$$\frac{x}{2x-3} \times \frac{x-3}{2x^2} =$$

$$= \frac{x(x-3)}{(2x-3)(2x^2)} =$$

$$= \frac{x-3}{2x(2x-3)}$$

Multiplicam-se os numeradores e os denominadores.

9

Efectue as multiplicações, simplifique os resultados e indique os valores da variável para os quais a simplificação é válida.

9.1 $\dfrac{x}{4} \times \dfrac{-4}{5x^3}$

9.2 $\dfrac{x^2+3x}{2-x} \times \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$

9.3 $\dfrac{2x}{x^2+2x+1} \times \dfrac{1-x^2}{x^2}$

9.4 $\dfrac{x^2+4x+4}{x-2} \times \dfrac{x^2-4x+4}{x+2}$

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 10 Divisão de expressões racionais

Identifique o domínio da expressão e, no domínio, efectue e simplifique.

$$\frac{x}{2} : \frac{2x^2 - 2x}{2x} \times \frac{3x + 2}{x - 1}$$

Resolução

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\ ,\ 1\}$

$$\frac{x}{2} : \frac{2x^2 - 2x}{2x} \times \frac{3x + 2}{x - 1} = \frac{x}{2} \times \frac{2x}{2x^2 - 2x} \times \frac{3x + 2}{x - 1}$$

Passagem de divisão para multiplicação invertendo os termos do divisor.

$$= \frac{x\,(2x)\,(3x + 2)}{2\,(2x^2 - 2x)\,(x - 1)}$$

Multiplicam-se os numeradores e os denominadores.

$$= \frac{x\,(2x)\,(3x + 2)}{2\,(2x)\,(x - 1)\,(x - 1)}$$

Simplifica-se a expressão.

$$= \frac{x\,(3x + 2)}{2\,(x - 1)^2}$$

10

Efectue as seguintes divisões, simplifique os resultados e indique os valores da variável para os quais são válidas as operações e as simplificações.

10.1 $(-3x) : \frac{2}{x + 1}$

10.2 $\frac{x^4 - 1}{x^4} : \frac{x^2 + 1}{3x}$

10.3 $\frac{x^2 - 25}{15x} : \frac{x^2 + 10 + 25}{9x^2}$

10.4 $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 5x + 4} : \frac{x + 3}{x - 4}$

11

Efectue, no respectivo domínio, as operações indicadas e, se possível, simplifique o resultado.

11.1 $\frac{x}{x - 2} + \frac{2x + 1}{x + 2} - \frac{2x^2}{x^2 - 4}$

11.2 $\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{x^2}{x + 1} + \frac{1}{x^2 + x}$

11.3 $\frac{2x}{x - 2} - \frac{2x + 3}{2x^2 - x - 6}$

11.4 $\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{2x}{2 - x} + \frac{3}{x + 2}$

11.5 $\frac{3x - 1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{1 - x^2}$

11.6 $\frac{4}{4x^2 - 9} - \frac{3x}{4x^2 + 12x + 9} + \frac{1}{2x - 3}$

11.7 $\frac{3}{x^3 - 9x} + \frac{2}{3\,(x - 3)^2} + \frac{1}{x^2 + 3x}$

11.8 $\frac{2}{x} \times \frac{x^2}{6}$

11.9 $\frac{x^2 - 16}{x^4} \times \frac{x^2}{x^2 + 4x}$

11.10 $\frac{(x + 1) \times 5}{x^2 - 1}$

11.11 $(x + 1) : \frac{5x^2 - 5}{x^2}$

11.12 $\frac{x^2 - 9}{2x} : \frac{x^2 + 6x + 9}{4x^2}$

11.13 $\frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x - 10} : \frac{x - 1}{x + 2}$

1.6 Adição e subtracção de expressões racionais.

Os procedimentos usados na adição e subtracção de expressões racionais são semelhantes aos que se utilizam na adição e subtracção de fracções.

Exemplo 11 Adição e subtracção de expressões racionais

Efectue e simplifique:

11.1 $\frac{2}{3x} + \frac{1}{x - 3}$; **11.2** $\frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{1}{2 - x}$.

Resolução

Escrevem-se as expressões com o mesmo denominador.

11.1 $\frac{2}{3x} + \frac{1}{x - 3} = \frac{2\,(x - 3)}{3x\,(x - 3)} + \frac{3x}{3x\,(x - 3)} =$

$(x - 3)$ $(3x)$

Adicionam-se os numeradores e dá-se o mesmo denominador.

$$= \frac{2x - 6 + 3x}{3x\,(x - 3)}$$

Simplifica-se a expressão.

$$= \frac{5x - 6}{3x\,(x - 3)},\ x \neq 0 \text{ e } x \neq 3$$

$$-\frac{1}{2 - x} = \frac{1}{-2 + x} = \frac{1}{x - 2}$$

11.2 $\frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{1}{2 - x} = \frac{2x}{(x - 2)\,(x + 2)} + \frac{1}{x - 2}$

$(x + 2)$

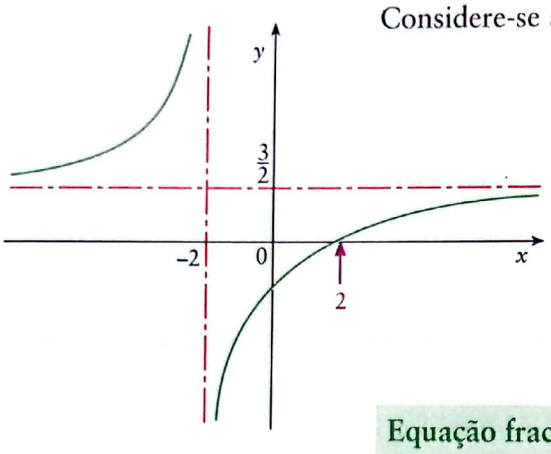
Simplifica-se a expressão do numerador.

$$= \frac{2x + (x + 2)}{(x - 2)\,(x + 2)} =$$

$$= \frac{3x + 2}{x^2 - 4},\ x \neq -2 \text{ e } x \neq 2$$

Digitalizada com CamScanner

1.7 Equações e inequações fraccionárias



Considere-se a função racional definida por $f(x) = \frac{3x}{x+2} - \frac{3}{2}$ cuja representação gráfica se encontra ao lado.

Um dos passos para procedermos à representação gráfica da função é determinarmos os pontos de intersecção do gráfico com o eixo das abcissas.

Para tal, resolve-se a equação fraccionária:

$$\frac{3x}{x+2} - \frac{3}{2} = 0$$

Equação fraccionária

Uma equação fraccionária é uma equação que tem a incógnita no denominador.

Vejamos, passo a passo, como resolver a equação.

$$\frac{3x}{x+2} - \frac{3}{2} = 0$$
$$\text{(2)} \qquad (x+2)$$

$\Leftrightarrow \frac{6x - 3(x+2)}{2(x+2)} = 0$ — Reduz-se a equação à forma $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.

$\Leftrightarrow \frac{3x-6}{2(x+2)} = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 6 = 0 \wedge 2(x+2) \neq 0$ — $\frac{A(x)}{B(x)} = \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \wedge x \neq -2$

$\Leftrightarrow x = 2$

2 é a solução da equação porque:

- **1.°** se $x = 2$, $2(x+2) \neq 0$
- **2.°** $\frac{3 \times 2}{2+2} - \frac{3}{2} = 0$

Substitui-se x por 2 na equação dada e a equação transforma-se numa igualdade numérica verdadeira.

Por que é que a resolução de equações fraccionárias merece cuidados especiais? Não é possível aplicar os princípios de equivalência da adição e da multiplicação estudados na resolução de equações não fraccionárias?

Reparemos que:

A equação $x + 3 = 0$ tem uma solução: o número -3.

Adicionando a ambos os membros a expressão $\frac{1}{x+3}$:

$$x + 3 + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+3}$$

obtemos uma equação fraccionária.

Esta segunda equação não é equivalente à primeira, pois -3 é solução da 1.ª equação mas não é solução da 2.ª. Para $x = -3$, os dois membros da 2.ª equação não têm significado.

Digitalizada com CamScanner

O mesmo aconteceria se multiplicássemos ambos os membros da equação $x+3=0$ por $\frac{1}{x+3}$.

Assim,

$(x+3)\times\frac{1}{x+3}=0$ é uma equação fraccionária que não é equivalente à equação $x+3=0$.

$$(x+3)\times\frac{1}{x+3}=0 \not\Leftrightarrow x+3=0$$

Ao adicionarmos uma expressão com a variável podem-se fazer desaparecer soluções.

$$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \longrightarrow S=\{-3\}$$

$x+3+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+3}$ $\longrightarrow$ equação impossível; -3 não pertence ao domínio da condição.

O mesmo pode acontecer se multiplicarmos os dois membros de uma equação por uma expressão com variáveis.

$$\frac{3x}{2}=0 \longrightarrow S=\{0\}$$

$\frac{3x^2}{2x}=0 \longrightarrow S=\{\ \}$, a equação é impossível; 0 não pertence ao domínio da equação.

Mas também é possível introduzir soluções estranhas numa equação, por exemplo:

$$x+3=0 \longrightarrow S=\{-3\}$$

$(x-2)(x+3)=0 \longrightarrow S=\{2\ ,\ -3\}$ (só se pode multiplicar os dois membros por uma expressão que nunca se anule.)

Um processo de resolução de uma equação fraccionária que minimize a possibilidade de cometer erros consiste no seguinte:

Resolução de uma equação fraccionária

1.° Determine-se o domínio D da equação, isto é, o conjunto dos valores que não anulam os denominadores.

2.° Reduza-se a equação à forma $\frac{A(x)}{B(x)}=0$.

3.° Resolva-se a equação $A(x)=0$.

4.° Indiquem-se as soluções da equação que são as soluções de $A(x)=0$ que pertencem ao domínio da equação $\frac{A(x)}{B(x)}=0$.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 12 Resolver uma equação fraccionária

Resolva a equação:

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$$

Resolução

- $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- A equação tem a forma $\frac{A(x)}{B(x)}=0$.

Determinam-se os zeros do numerador:

$$x^2-3x+2=0 \iff x=\frac{3+\sqrt{9-8}}{2} \vee x=\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}$$
$$\iff x=2 \vee x=1$$

- Como $1\notin D$ e $2\in D$, vem:

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0 \iff x=2$$

A equação tem uma única solução: 2.

Também se podia escrever:

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \iff A(x)=0 \wedge B(x)\neq 0$$

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0 \iff x^2-3x+2=0 \wedge x-1\neq 0$$
$$\iff (x=2 \vee x=1) \wedge x\neq 1$$
$$\iff x=2$$

12 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

12.1 $x-\frac{1}{x}=0$

12.2 $\frac{x^2-4}{x-2}=0$

12.3 $x+\frac{2}{2x-6}+\frac{1}{x-3}=2$

12.4 $1-\frac{x}{4x^2-1}=2+\frac{x}{1-4x^2}$

12.5 $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=-\frac{3}{1-x^2}$

12.6 $\frac{1}{3}+\frac{1-2x}{6-3x}=\frac{x^2}{x^2-4}$

Exemplo 13 Resolução de uma equação fraccionária

Resolva a equação:

$$\frac{2x+1}{3x-3}=\frac{7}{x^2-x}$$

Resolução

$$\frac{2x+1}{3x-3}=\frac{7}{x^2-x} \iff$$

$$\iff \frac{2x+1}{3x-3}=\frac{7}{x^2-x}=0 \iff \frac{2x+1}{3(x-1)}-\frac{7}{x(x-1)}=0$$
$$\qquad\qquad\qquad\quad (x) \qquad\qquad (3)$$

$$\iff \frac{x(2x+1)-21}{3x(x-1)}=0 \iff \frac{2x^2+x-21}{3x(x-1)}=0$$

$$\iff 2x^2+x-21=0 \wedge 3x(x-1)\neq 0$$

$$\iff \left(x=3 \vee x=-\frac{7}{2}\right) \wedge (x\neq 0 \wedge x\neq 1) \iff x=3 \vee x=-\frac{7}{2}$$

13 Resolva cada uma das equações fraccionárias.

13.1 $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{1-x}=1$

13.2 $\frac{x^2}{x+1}-\frac{x}{x+1}=\frac{3}{2}$

13.3 $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4x}$

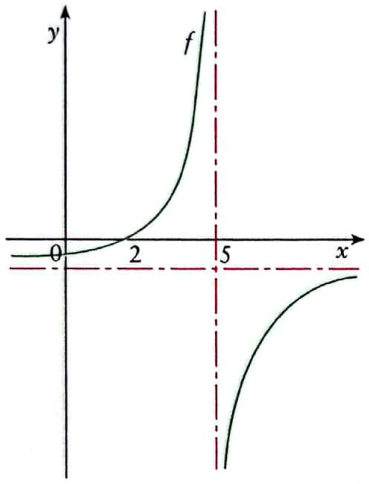
13.4 $\frac{24x}{x^2-16}-\frac{3x}{x-4}=\frac{5}{x+4}$

Digitalizada com CamScanner

Inequações fraccionárias

Considere-se a função racional, f, definida por:

$$f(x) = \frac{x-2}{5-x}$$



Quais são os valores de x que tornam a função positiva?

Para respondermos à questão vamos resolver a inequação:

$$\frac{x-2}{5-x} > 0$$

Observando a representação gráfica da função, conclui-se que $f(x) > 0$ se $x \in]2\,,\,5[$.

Vejamos como resolver analiticamente a inequação dada.

A inequação é fraccionária porque a variável x surge no denominador. Para estudarmos o sinal da fracção temos de ter em atenção o sinal do numerador e do denominador simultaneamente.

O processo mais simples consiste na elaboração de um quadro onde se estuda o sinal do numerador e do denominador separadamente e, em seguida, o sinal da fracção.

Quer-se: $\frac{x-2}{5-x} > 0$.

A variável x toma valores desde $-\infty$ a $+\infty$, mas há dois números "mais importantes" do que os outros para este problema, que são o 2 e o 5, respectivamente, zero do numerador e zero do denominador.

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$5-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x-2}{5-x}$	$-$	0	$+$	s.s.	$-$

A função é positiva para $x \in]2\,,\,5[$.

De um modo geral, resolve-se uma inequação fraccionária reduzindo-a à forma:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

e, em seguida, elabora-se um quadro idêntico ao apresentado onde se estuda separadamente o sinal do numerador, o sinal do denominador e finalmente o sinal da fracção.

Observação

s. s. lê-se *sem significado*.

Observação

Outro processo de resolução da inequação:

$$\frac{x-2}{5-x} > 0$$

Se a fracção é positiva, os termos têm o mesmo sinal, ou seja, são ambos positivos ou ambos negativos.

$$\frac{x-2}{5-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2<0 \\ 5-x<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ -x>-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x<2 \\ -x<-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<5 \end{cases} \vee \begin{cases} x<2 \\ x>5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow 2<x<5$$

Se a fracção fosse negativa, escrever-se-ia:

$$\frac{x-2}{5-x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2<0 \\ 5-x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2>0 \\ 5-x<0 \end{cases}$$

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 14 Resolução de uma inequação fraccionária

Resolva, analiticamente, a inequação:

$$\frac{2-x^2}{x-3} \leqslant 1-x$$

Resolução

$\frac{2-x^2}{x-3} \leqslant 1-x$ é uma inequação fraccionária porque tem a variável no denominador.

Comecemos por reduzi-la à forma $\frac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0$.

$$\frac{2-x^2}{x-3} \leqslant 1-x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x^2}{x-3} - \frac{1-x}{1} \leqslant 0 \quad (x-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x^2}{x-3} - \frac{(1-x)(x-3)}{x-3} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x^2-x+3+x^2-3x}{x-3} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x+5}{x-3} \leqslant 0$$

Determinação dos zeros:

$$\frac{-4x+5}{x-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x+5=0 \wedge x-3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -4x=-5 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5}{4} \wedge x \neq 3$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		3	$+\infty$
$-4x+5$	+		0	−	−	−
$x-3$	−		−	−	0	+
$\frac{-4x+5}{x-3}$	−		0	+	s.s.	−

Então, $\frac{-4x+5}{x-3} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{5}{4} \vee x > 3$.

Logo, $S = \left]-\infty, \frac{5}{4}\right] \cup]3, +\infty[$.

14

14.1 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações.

a) $\frac{x}{3} - 1 > \frac{2x+1}{4}$

b) $\frac{x+1}{3-x} < 0$

c) $\frac{x+1}{x-3} > 2$

d) $\frac{2x+3}{x} \leqslant 3$

e) $\frac{3}{2x+3} \geqslant 0$

f) $\frac{x^2+5}{2-3x} < 0$

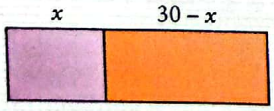
g) $\frac{x^2-25}{x^2+25} \geqslant 0$

h) $\frac{x-1}{2-3x} \geqslant 0$

i) $\frac{x^2}{(x-3)(4+x)} \geqslant 0$

j) $\frac{1}{x} > x$

14.2 Uma peça de madeira com 30 cm de comprimento foi dividida em duas partes.



a) A razão entre a mais pequena e a maior é $\frac{3}{5}$. Determine o comprimento da peça mais pequena.

b) Resolva a inequação: $\frac{x}{30-x} < \frac{3}{5}$

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 A equação

$$\frac{x^2+4x+3}{x+3}=0$$

(A) não tem soluções.

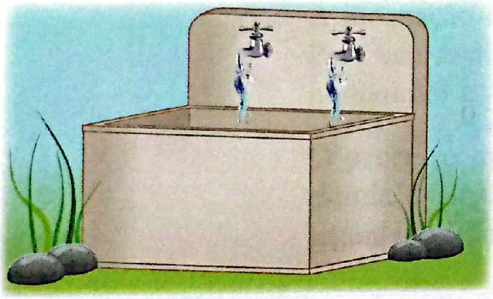
(B) tem duas soluções.

(C) tem uma solução.

(D) é indeterminada.

10 pontos

2 Uma torneira demora 5 horas a encher um tanque e outra precisa de 4 horas.



Se as duas torneiras estiverem abertas e t for o tempo que as duas levam a encher o tanque, a equação que permite determinar t é:

(A) $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{t}$;

(B) $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=t$;

(C) $\frac{t}{4}+\frac{t}{5}=1$;

(D) $\frac{1}{4}+\frac{1}{t}=\frac{1}{5}$.

10 pontos

3 O domínio da expressão $\frac{x}{x^2-6x+5}$ é:

(A) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

(B) $\mathbb{R}\setminus\{5\}$;

(C) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$;

(D) $\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$.

10 pontos

4 Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

(A) $\frac{x}{x-3}=\frac{3}{3-x} \iff x=3$

(B) $\frac{x^3-8}{x^2-4}=0 \iff x^3-8=0$

(C) $\frac{x^3-1}{x^2+1}=0 \iff x^3-1=0$

(D) $\frac{2-x}{x}>0 \iff 2-x>3$

10 pontos

5 Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

(A) $\frac{3}{x-4}>0 \iff x-4>0$

(B) $\frac{-5}{x-8}\geqslant 0 \iff -x-8<0$

(C) $\frac{x^2+1}{1-x}>0 \iff 1-x>0$

(D) $\frac{x^3}{x^4+1}>0 \iff x>0$

10 pontos

6 Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

O domínio da expressão $\frac{x^2+3}{x^2}$ é:

(A) $\mathbb{R}$;

(B) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

(C) $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$;

(D) $\mathbb{R}\setminus\{0,-3\}$.

10 pontos

7 Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

(A) $(2x+1)=0 \iff x(2x+1)=0$

(B) $(x^2+4)(x-1)=0 \iff x-1=0$

(C) $(x^2-4)(x+1)>0 \iff x+1>0$

(D) $x^2(x-1)\geqslant 0 \iff x-1\geqslant 0$

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

8 Determine, em $\mathbb{R}$, o domínio de cada uma das seguintes expressões.

8.1 $\dfrac{x}{x-3}$

8.2 $\dfrac{1}{x^2-9x}$

10 pontos

9 Diga, justificando, se são ou não equivalentes as expressões $A(x)$ e $B(x)$.

$A(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2+5x}$ e $B(x)=\dfrac{x-5}{x}$

10 pontos

10 Simplifique cada uma das expressões e escreva o domínio em que é válida a simplificação.

10.1 $\dfrac{4x^2-8}{32-8x^4}$

10.2 $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

10 pontos

11 Efectue cada uma das operações e indique o domínio em que é válido o resultado.

11.1 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2x}-\dfrac{5}{x^2}$

11.2 $\dfrac{(x+1)\times 5}{x^2-1}$

11.3 $\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-x-10}:\dfrac{x-1}{x+2}$

20 pontos

12 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

12.1 $\dfrac{5}{x-1}=0$

12.2 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{5}{x^2+4x}$

20 pontos

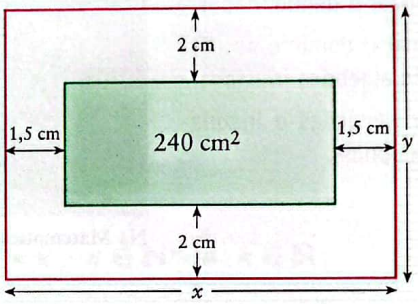
13 Resolva cada uma das seguintes inequações.

13.1 $\dfrac{3}{2x+1}\leqslant 0$

13.2 $\dfrac{1}{3x+1}\geqslant\dfrac{1}{4}$

20 pontos

14 Um livro vai ser impresso em páginas rectangulares.



A zona de impressão, de área $240\ cm^2$, ocupa a parte central do papel.

São deixadas margens, como se mostra na figura.

Seja x o comprimento da folha e y a largura.

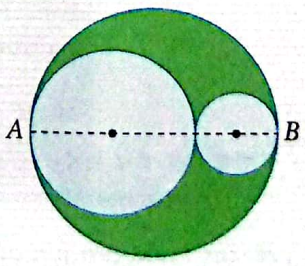
Mostre que a área total da página, em função de x, é dada por:

$A(x)=\dfrac{228x+4x^2}{x-3}$

20 pontos

15 Na figura $\overline{AB}=40$ m e $\overline{BC}=x$ m.

A parte colorida a azul representa duas piscinas circulares.



Mostre que a área A da zona relvada, colorida a verde na figura, é dada por:

$A=\dfrac{\pi}{2}(-x^2+40x)$

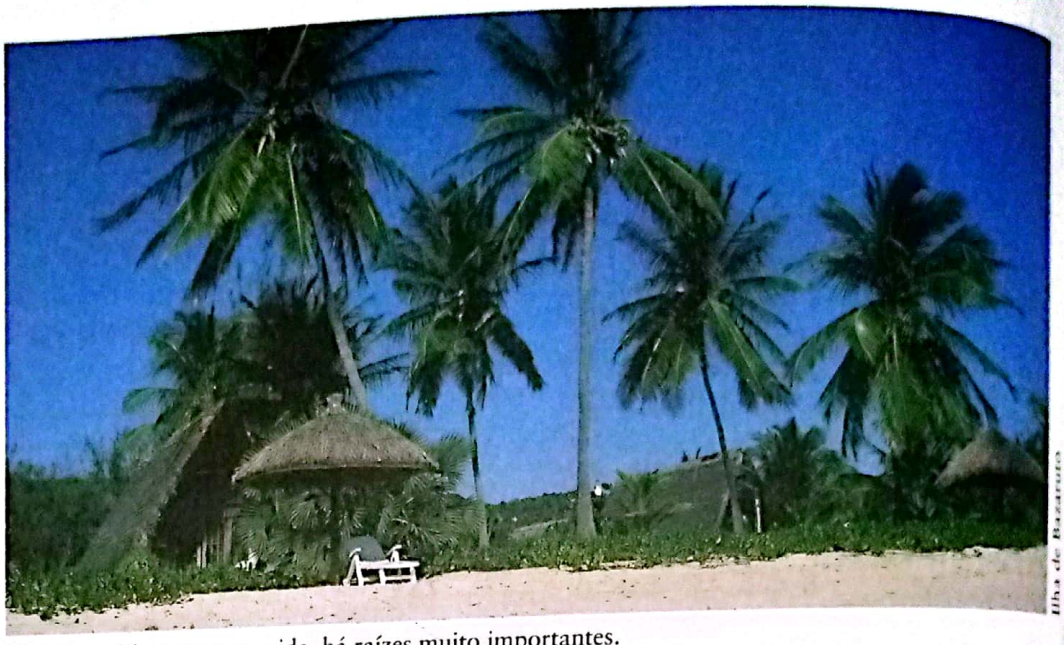
20 pontos

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Aplicar a definição de raiz índice n de um número real a para resolver equações e problemas.
2. Escrever um radical como potência de expoente racional e vice-versa.
3. Operar com radicais.
4. Passar um factor para fora de um radical.
5. Racionalizar o denominador.
6. Determinar o domínio de uma expressão algébrica irracional.
7. Resolver equações e inequações irracionais.

2. Expressões algébricas irracionais



Na Matemática, como na vida, há raízes muito importantes.

2.1 Raiz quadrada e raiz cúbica. Radicais

Raiz quadrada de um número não negativo a é o número b, não negativo, que, elevado ao quadrado, é igual a a.

$\sqrt{a} = b$ se e só se $b^2 = a$, sendo a e b números não negativos.

Raiz cúbica de um número a é o número b que, elevado ao cubo, é igual a a.

$$\sqrt[3]{a} = b \text{ se e só se } b^3 = a$$

Observação

Repare que:

- $\sqrt[n]{0} = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $a \geqslant 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\sqrt[1]{a} = a$, para todo o a.
- $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$, $a \geqslant 0$.

(No caso da raiz quadrada não se escreve o índice do radical).

De um modo geral:

Raiz índice n de um número real a é o número real b que, elevado ao número natural não nulo n, é igual a a.

Se n é ímpar: $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$

Se n é par: $\sqrt[n]{a} = b \implies b^n = a \wedge a$ e b não negativos

Repare que:

$(-5)^2 = 25$ e $\sqrt{25} \neq -5$, portanto, $b^2 = a \not\iff \sqrt{a} = b$, em $\mathbb{R}$.

Índice do radical — $\sqrt[n]{a}$ — Radical, Radicando

A expressão $\sqrt[n]{a}$ é um radical e $\sqrt{\ }$ é o símbolo de radical; a é o radicando e n o índice do radical.

Digitalizada com CamScanner

2.2 Radical como potência de expoente racional

Radical como potência de expoente racional

Tem-se que:

(1) $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$, $a \geqslant 0$, m, $n \in \mathbb{N}^*$

Mantendo as operações e propriedades habituais, é natural ter também

(2) $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{n \times \frac{m}{n}} = a^m$, $a \geqslant 0$, m, $n \in \mathbb{N}^*$.

pelo que surge a seguinte definição:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a \geqslant 0, \quad m, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Por exemplo, $\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}}$; $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$.

Exemplo 1 Equação do tipo $x^n = k$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{R}$

1.1 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

a) $x^2 = 25$

b) $x^4 = -16$

c) $x^5 = -1$

1.2 Discuta, em $\mathbb{R}$, as soluções da equação $x^n = k$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{R}$, tendo em conta a paridade de n e o sinal de k.

Resolução

1.1 a) $x^2 = 25 \iff x = \sqrt{25} \vee x = -\sqrt{25} \iff x = 5 \vee x = -5$;
$S = \{-5, 5\}$

b) $x^4 = -16$. A equação é impossível em $\mathbb{R}$, pois $x = \sqrt[4]{-16}$, já que $x^4 \geqslant 0$, $\forall x$, não é um número real;
$S = \{\}$.

c) $x^5 = -1 \iff x = \sqrt[5]{-1} \iff x = -1$;
$S = \{-1\}$.

1.2 $x^n = k$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{R}$.

- Se n é par e $k > 0$; $x^n = k \iff x = \sqrt[n]{k} \vee x = -\sqrt[n]{k}$;
a equação tem duas soluções reais simétricas.
- Se n é par e $k < 0$; a equação é impossível em $\mathbb{R}$.
- Se n é ímpar e $k \in \mathbb{R}$; $x^n = k \iff x = \sqrt[n]{k}$;
a equação tem uma e uma só solução real.
- Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $k = 0$; $x^n = 0 \iff x = \sqrt[n]{0} \iff x = 0$;
a equação tem uma única solução que é igual a zero.

1

1.1 Sem usar a calculadora, indique as soluções reais de cada uma das seguintes equações.

a) $x^2 = 9$

b) $x^2 = 100$

c) $x^4 = 10\,000$

d) $x^6 = -4$

e) $x^3 = 27$

f) $x^7 = -1$

g) $x^5 = -32$

h) $x^8 = 0$

i) $x^3 = -\frac{1}{64}$

1.2 Use a calculadora para indicar com uma casa decimal um valor aproximado de:

$\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$

(repare que $3\sqrt[3]{5} = 3 \times \sqrt[3]{5}$)

Recorde que os arredondamentos só devem ser feitos no final dos cálculos.

1.3 Um círculo tem de área 19,635 cm². Qual é o perímetro do círculo?
Apresente o resultado com aproximação às décimas do centímetro.

Digitalizada com CamScanner

2.3 Propriedades dos radicais

Sejam a e b números reais e m e n números naturais não nulos. Sempre que as expressões tenham sentido (as raízes são números reais e os denominadores diferentes de zero), tem-se:

Propriedade	Exemplo
$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\sqrt[5]{6} : \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{6:3} = \sqrt[5]{2}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[12]{6}$
$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$\sqrt{9^4} = (\sqrt{9})^4 = 3^4 = 81$
$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} \lvert a \rvert & \text{se } n \text{ é par} \\ a & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2 = \lvert -2 \rvert$ $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$
$a\sqrt[n]{c} \pm b\sqrt[n]{c} = (a \pm b)\sqrt[n]{c}$	$2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ $-\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

Exemplo 2 **Para mostrar**

Mostre que:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{ab}, \text{ sendo } a \geqslant 0 \text{ e } b \geqslant 0.$$

Resolução

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b})$$
$$= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
$$= (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2$$
$$= a \times b$$

Por outro lado,

$$(\sqrt{ab})^2 = ab$$

logo, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, c. q. m.

2

2.1 Escreva sob a forma de potência.

a) $\sqrt[3]{25}$

b) $\sqrt[5]{a^2}$

2.2 Escreva sob a forma de radical.

a) $3^{\frac{1}{2}}$

b) $5^{\frac{1}{5}}$

c) $a^{\frac{5}{9}}$

2.3 Escrevendo os radicais sob a forma de potência, mostre que:

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{6} = \sqrt{30}$;

b) $\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10}$;

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$.

2.4 Calcule, com uma casa decimal.

a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt[5]{5} + 2\sqrt[4]{3}$

2.5 Simplifique cada uma das expressões.

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{2^2}$

c) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5}$

e) $(\sqrt[3]{2})^2 - 3\sqrt[3]{4}$

f) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$

Digitalizada com CamScanner

2.4 Passagem de um factor para fora de um radical

Passagem de um factor para fora de um radical

1.° passo: Factorizar o radicando.

2.° passo: Aplicar a propriedade: $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$, com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Por exemplo:

Observação

$\sqrt{a^2} = a$, para todo o $a \in \mathbb{R}_0^+$.

$$\begin{aligned}\sqrt{80} &= \sqrt{2^4 \times 5} \\ &= \sqrt{2^4} \times \sqrt{5} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{5} \\ &= 2 \times 2 \times \sqrt{5} \\ &= 4 \times \sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$80 = 2^4 \times 5$

Tem-se, por exemplo:

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$;

$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$; $5 \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{75}$.

2.5 Racionalização de denominadores

Quando a resposta a um problema é dada com um número escrito sob a forma de fracção, esta não deve ter radicais no denominador.

Por exemplo, o número $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tem um radical no denominador. Para dar a resposta deve-se racionalizar o denominador, pelo que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(multiplicou-se ambos os termos da fracção por $\sqrt{2}$ que é o radical que aparece no denominador).

Assim, a resposta deve ser $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e não $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Racionalização de denominadores

Racionalizar um denominador é escrever uma expressão equivalente mas sem radicais no denominador.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 3 Racionalizar o denominador

Racionalize os denominadores de:

3.1 $\frac{1}{3\sqrt{5}}$;

3.2 $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$;

3.3 $\frac{2}{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$.

Observação

1. Recorde que:
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

2. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ diz-se expressão conjugada de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.
$a+\sqrt{b}$ diz-se expressão conjugada de $a-\sqrt{b}$.

Resolução

3.1 $\frac{1}{3\sqrt{5}} = \frac{1\times\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$ Multiplicam-se o numerador e o denominador por $\sqrt{5}$.

$= \frac{\sqrt{5}}{3\times 5} = \frac{\sqrt{5}}{15}$

3.2 $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$ Multiplicam-se o numerador e o denominador por $(\sqrt{3}+1)$.

$= \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

3.3 $\frac{2}{\sqrt{2}+3\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2}-3\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+3\sqrt{3})(\sqrt{2}-3\sqrt{3})}$

$= \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(3\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{2-27}$

$= \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{-25} = \frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{25}$

3

3.1 Simplifique cada uma das expressões.

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}$

b) $\sqrt{20}+\sqrt{125}$

c) $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}$

d) $\sqrt{75}+12\sqrt{48}-\sqrt{108}$

e) $4\sqrt{147}+3\sqrt{\frac{4}{3}}-2\sqrt{192}$

f) $\sqrt[3]{-16}-\sqrt[3]{-81}+\sqrt[3]{\frac{2}{27}}$

3.2 Racionalize o denominador de:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$;

e) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; f) $\frac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

3.3 Efectue as operações e apresente o resultado com denominador racional.

a) $\sqrt{2}:\sqrt{5}$

b) $\sqrt{3}:(2\sqrt{2})$

2.6 Domínio de uma expressão irracional

Consideremos a expressão irracional:

$\sqrt[n]{A(x)}$

- Se n é ímpar, o domínio de $\sqrt[n]{A(x)}$ é o domínio de $A(x)$.
- Se n é par, o domínio de $\sqrt[n]{A(x)}$ é dado por $D = \{x \in D(A(x)) : A(x) \geqslant 0\}$.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 4 **Domínio de uma expressão irracional**

Determine, em $\mathbb{R}$, o domínio de:

4.1 $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$;

4.2 $\sqrt{x^2-1}$;

4.3 $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x}}$.

Resolução

4.1 $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

$D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

4.2 $\sqrt{x^2-1}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geqslant 0\}$

$x^2 - 1 = 0 \iff (x-1)(x+1) = 0 \iff x = 1 \vee x = -1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)\times(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

4.3 $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x}}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} \geqslant 0\right\}$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	s. s.	$-$	0	$+$

$D =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$

4

Determine o domínio de cada uma das seguintes expressões.

4.1 $\sqrt{(x+1)^2}$

4.2 $\sqrt{x+1}$

4.3 $\sqrt[4]{-x^2+1}$

4.4 $\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}$

4.5 $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$

Digitalizada com CamScanner

2.7 Equações e inequações irracionais

Numa equação irracional, a incógnita surge no radicando.

Por exemplo, são equações irracionais:

$$\sqrt{x} = 1 \; ; \quad x + \sqrt{x} = 2 \; ; \quad \sqrt[3]{x^2 + 3} = x$$

Para resolvermos uma equação irracional pode-se usar o método gráfico ou o método algébrico.

Na resolução de uma equação irracional pelo método algébrico elevam-se ao quadrado, ao cubo... os membros da equação de modo a eliminar os símbolos de radical.

Mas é preciso ter algum cuidado nas respostas às questões colocadas. Por exemplo:

$a = b \implies a^2 = b^2$ → Se dois números reais são iguais então os seus quadrados também são iguais.

A implicação recíproca não é verdadeira.

Por exemplo, do facto de $(-5)^2 = (+5)^2$ não se pode concluir que $-5 = 5$.

Podemos, então, concluir que a equivalência $a = b \iff a^2 = b^2$ **não é válida**, pelo que, ao elevar ao quadrado ambos os membros de uma equação podem ser introduzidas soluções estranhas.

Exemplo 5 **Resolução de uma equação irracional**

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$\sqrt{2x + 3} = 6 - x$

Resolução

Para resolver esta questão, elevam-se os membros ao quadrado.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x + 3} = 6 - x &\implies (\sqrt{2x + 3})^2 = (6 - x)^2 \\ &\iff 2x + 3 = 36 - 12x + x^2 \\ &\iff x^2 - 14x + 33 = 0 \\ &\iff x = 11 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Atendendo a que a equivalência não se verifica em todos os passos da resolução da equação, é necessário verificar as soluções.

Se $x = 11$, vem:

$\sqrt{22 + 3} = 6 - 11 \iff \sqrt{25} = -5$, **o que é falso.**

Se $x = 3$, vem:

$\sqrt{6 + 3} = 6 - 3 \iff 3 = 3$, **o que é verdadeiro.**

Logo, a equação dada só tem uma solução.

$S = \{3\}$

5

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$\sqrt{x - 1} = 13 - x$.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 6 Determinação de um número especial

Determine o número que adicionado à sua raiz quadrada é igual a 2.

Resolução

$x + \sqrt{x} = 2 \iff \sqrt{x} = 2 - x$ Isola-se o radical num dos membros.

$\implies x = 4 - 4x + x^2$ Elevam-se os membros ao quadrado.

$\iff -x^2 + 5x - 4 = 0$

$\iff x = \frac{-5 + \sqrt{25 - 16}}{-2} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{25 - 16}}{-2}$

$\iff x = \frac{5 - 3}{2} \vee x = \frac{5 + 3}{2}$

$\iff x = 1 \vee x = 4$

Verificação

Se $x = 1$, $1 + \sqrt{1} = 2$ **Verdade**

Se $x = 4$, $4 + \sqrt{4} = 2$ **Falso**

Logo, a equação só tem a solução 1.

6

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$x + \sqrt{x + 1} = 1$.

Exemplo 7 Resolução de uma inequação irracional

Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$x + 2\sqrt{x} > 3$

Resolução

Comecemos por resolver a equação $x + 2\sqrt{x} = 3$ usando um novo método que consiste numa mudança de variável.

$x + 2\sqrt{x} = 3$

$\iff x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$ $\left.\begin{matrix}\sqrt{x} = a \\ x = a^2\end{matrix}\right.$

$\iff a^2 + 2a - 3 = 0$

$\iff a = -3 \vee a = 1$ $\left.\begin{matrix}\\ a = \sqrt{x}\end{matrix}\right.$

$\iff \sqrt{x} = -3 \vee \sqrt{x} = 1$

$\sqrt{x} = -3$ é impossível.

$\iff \sqrt{x} = 1$

$\iff x = 1$

Verificação

Para $x = 1$, $1 + 2\sqrt{1} - 3 = 0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x + 2\sqrt{x} - 3$	$-$	0	$+$

$S =]1, +\infty[$

7

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

7.1 $(3x + 4)^{\frac{1}{2}} \geqslant 2$

7.2 $(15 - 2x)^{\frac{1}{2}} - x > 0$

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 8 Resolução de equações irracionais

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

8.1 $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$

8.2 $\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 6} = x$

Resolução

8.1 $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2x-1}$ — Isola-se um dos radicais.

$\Rightarrow \left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{2x-1}\right)^2$ — Elevam-se ambos os membros ao quadrado.

$\Leftrightarrow 3x + 1 = 1 + 2\sqrt{2x-1} + (2x-1)$ — Simplificam-se os membros da equação.

$\Leftrightarrow -2\sqrt{2x-1} = 2x - 1 + 1 - 3x - 1$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{2x-1} = -x - 1$ — Isola-se de novo o radical.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = x + 1$

$\Rightarrow \left(2\sqrt{2x-1}\right)^2 = (x+1)^2$ — Elevam-se os dois membros ao quadrado.

$\Leftrightarrow 4(2x-1) = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow 8x - 4 = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ — Resolve-se a equação do 2.º grau.

$\Leftrightarrow x = \dfrac{+6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

Verificação

Se $x = 1$, $\sqrt{3+1} - \sqrt{2-1} = 1$ — Substitui-se x por 1.

$2 - 1 = 1$ **Verdade**

Se $x = 5$, $\sqrt{15+1} - \sqrt{10-1} = 1$ — Substitui-se x por 5.

$4 - 3 = 1$ **Verdade**

A equação irracional dada tem duas soluções: 1 e 5.

8.2 $\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 6} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 6 = x^3$ — $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-2) + 3(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

Verificação

Se $x = 2$, $\sqrt[3]{8 - 6 + 6} = 2$.

8

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

8.1 $\sqrt{2x-1} - 1 = 0$

8.2 $\sqrt{3x+5} = -2$

8.3 $\sqrt[3]{1-2x} = 3$

8.4 $\sqrt{12-x} - x = 0$

8.5 $3 - x = \sqrt{3x+1}$

8.6 $\sqrt{3 - 2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 0$

8.7 $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 0$

8.8 $\frac{x}{2} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$

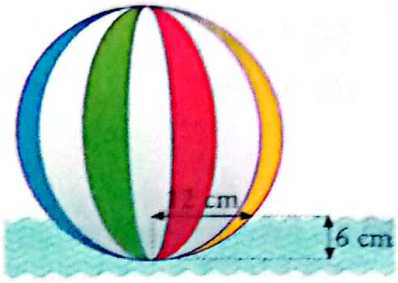
8.9 $(2x+3)^{\frac{1}{2}} = 1 + (x+1)^{\frac{1}{2}}$

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 9 O volume da bóia

Uma bóia esférica está a flutuar no mar. O raio da circunferência formada pelo contacto da superfície da água com a bóia é de 12 cm.

O ponto da bóia que está a uma maior profundidade dista 6 cm do nível da água.



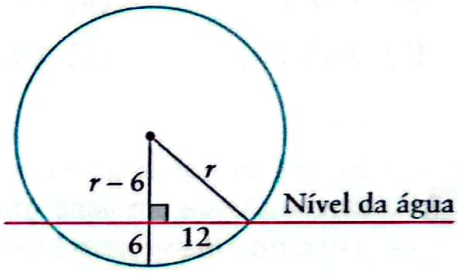
9.1 Qual é o diâmetro da bóia?

9.2 Qual é o volume da bóia?
Apresente o resultado arredondado às milésimas do decímetro cúbico.

9.3 Calcule o raio de uma esfera de volume $V = 20\ \text{cm}^3$.

Resolução

9.1 No esquema ao lado, estão representados os dados do problema.



Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$r^2 = 12^2 + (r-6)^2$

Resolução da equação:

$r^2 = 12^2 + (r-6)^2 \iff r^2 = 144 + r^2 - 12r + 6^2 \iff$

$\iff r^2 = 144 + r^2 - 12r + 36 \iff 12r = 180 \iff r = 15$

Sabemos que o diâmetro é igual ao dobro do raio, assim:

$2r = 30$

O diâmetro da bóia é de 30 cm.

9.2 O volume da bóia é:

Volume da esfera $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi \times 15^3\ \text{cm}^3 \approx 14\ 137\ \text{cm}^3 = 14{,}137\ \text{dm}^3$

9.3 $20 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r = \sqrt[3]{20 \times \frac{3}{4\pi}} \iff r = \sqrt[3]{\frac{15}{\pi}} \approx 1{,}68$

O raio da esfera é, aproximadamente, 1,68 cm.

9

Arrumaram-se três esferas iguais dentro de uma caixa cilíndrica (figura 1).

Como se pode observar no esquema (figura 2):

Figura 1

Figura 2

- a altura da caixa é igual ao triplo do diâmetro de uma esfera;
- o raio da base do cilindro é igual ao raio de uma esfera.

9.1 Mostre que o volume da caixa que não é ocupado pelas esferas é igual a metade do volume das três esferas.
(Nota: designe por r o raio de uma esfera.)

9.2 O volume de caixa é $1205{,}76\ \text{cm}^3$.
Qual é o raio de uma esfera?

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

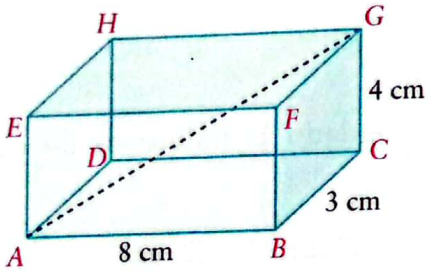
1 Um rectângulo tem de área $27\ m^2$.
Um quadrado com a mesma área tem de lado:

(A) 5,1 m ; **(B)** $3\sqrt{3}$ m ;

(C) 5,2 m ; **(D)** $\sqrt[3]{27}$ m .

10 pontos

2 Um paralelepípedo rectângulo tem as dimensões indicadas na figura seguinte.



O valor exacto da diagonal $[AG]$ é:

(A) $\sqrt{89}$ cm ; **(B)** 9,4 cm ;

(C) 9,43 cm ; **(D)** $\sqrt{77}$ cm .

10 pontos

3 Na construção de um cubo gastaram-se $79\ cm^2$ de cartolina. Dessa cartolina desperdiçaram-se $25\ cm^2$.

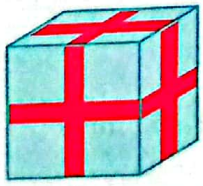
A aresta do cubo mede:

(A) 8,9 cm ; **(B)** 3 cm ;

(C) $\sqrt{54}$ cm ; **(D)** $3\sqrt[3]{2}$ cm .

10 pontos

4 A área de superfície total de uma caixa cúbica é $72\ cm^2$.



O comprimento da fita para colocar na caixa da forma como se indica na figura é:

(A) $48\sqrt{3}$ cm ; **(B)** $72\sqrt{3}$ cm ;

(C) $36\sqrt{3}$ cm ; **(D)** $24\sqrt{3}$ cm .

10 pontos

5 O número de ouro Φ é dado por:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

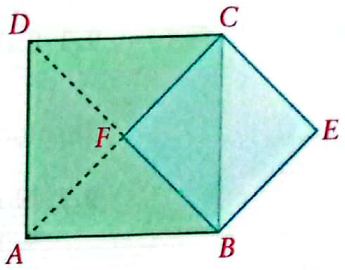
Qual dos seguintes números é o mais próximo de Φ ?

(A) 2π **(B)** $2\sqrt{2\pi}$

(C) $\sqrt{2\pi}$ **(D)** 4π

10 pontos

6 Na figura estão representados dois quadrados: $[ABCD]$ e $[BECF]$.



A área do quadrado maior é $\sqrt{3}\ cm^2$.

A área do quadrado menor é:

(A) $1,5\ cm^2$;

(B) $\sqrt{2}\ cm^2$;

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ cm^2$;

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}\ cm^2$.

10 pontos

7 Considere a seguinte expressão $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}$.

Uma expressão equivalente à expressão dada é:

(A) $2\sqrt{5}+3\sqrt{15}$;

(B) $-3-\sqrt{15}$;

(C) $3-\sqrt{15}$;

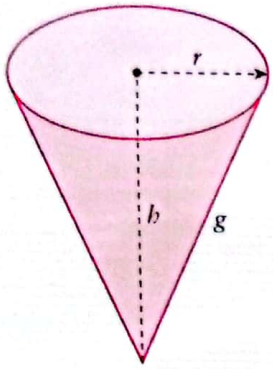
(D) $-2\sqrt{5}-3\sqrt{15}$.

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

8 Para forrar o copo do gelado, sem dobras, gastaram-se $282{,}7\ cm^2$ de papel decorativo. A altura do cone é $14\ cm$.



8.1 Sabendo que a área lateral do cone, A, é dada por $A = \frac{P}{2} \times g$, onde A é o perímetro da base e g a geratriz, mostre que:

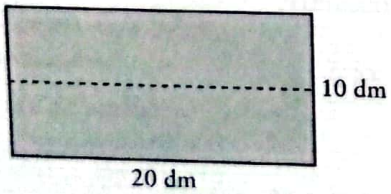
$$A = \pi r \sqrt{r^2 + 14^2},$$

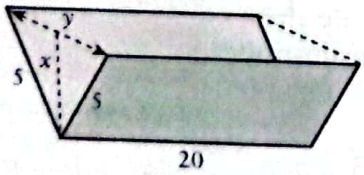
onde r é o raio da base do cone.

8.2 Determine, com uma casa decimal, o raio do cone.

30 pontos

9 Dobrou-se ao meio uma folha de metal com a forma rectangular e com as dimensões indicadas nas figuras seguintes.

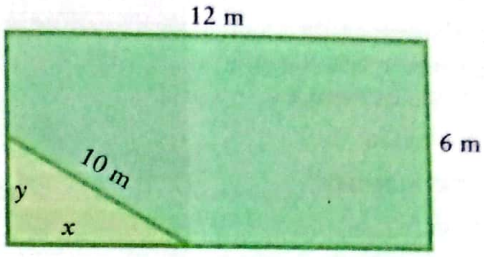




Determine x e y de modo que, tapando os lados triangulares da caleira, esta tenha capacidade para 60 litros.

30 pontos

10 Um terreno rectangular tem 12 metros de comprimento e 6 de largura.



Aproveitando os muros existentes, pretende-se vedar um canto do terreno usando uma rede com $10\ m$ de comprimento. Para que o canto vedado tenha uma área de $20\ m^2$ e a forma sugerida na figura, quais devem ser as dimensões de x e y?

30 pontos

11 O período T de um pêndulo (em segundos) é o tempo necessário para completar um ciclo completo (ir e voltar ao ponto de partida).

A expressão:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{e}{980}}$$

dá-nos o período T em segundos, onde e é o comprimento do pêndulo em centímetros.

11.1 Determine, com uma casa decimal, o período de um pêndulo com $20\ cm$ de comprimento.

11.2 Se um pêndulo tem o período de $1{,}2$ segundo, qual é o comprimento do pêndulo?

11.3 O que pode dizer acerca do comprimento dos pêndulos de dois relógios se o período de um é o triplo do período do outro?

40 pontos

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Resolver sistemas de duas equações a duas incógnitas (revisão).
2. Resolver sistemas de equações lineares a três incógnitas aplicando os métodos:
   - de substituição;
   - de adição ordenada;
   - de Cramer.

3. Sistemas de equações

Aeroporto de Tete

Os sistemas de equações são utilizados para resolver problemas com várias condições.

3.1 Sistemas de duas equações a duas incógnitas (revisão)

Problema 1 Os animais da quinta

Numa quinta havia vacas e galinhas num total de 90 cabeças e 260 pernas.
Quantas vacas e galinhas havia na quinta?

Resolução

x = número de galinhas; y = número de vacas.

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 2x + 4y = 260 \end{cases}$$

O número de cabeças é 90.
As galinhas têm 2 pernas e as vacas têm 4 pernas.

Do enunciado resulta um sistema de duas equações a duas incógnitas que vamos resolver pelo método de substituição.

$$\begin{cases} x = 90 - y \\ 2x + 4y = 260 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90 - y \\ 2(90 - y) + 4y = 260 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90 - y \\ 180 - 2y + 4y = 260 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 90 - y \\ 2x = 260 - 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90 - y \\ 2y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90 - 40 \\ y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases}$$

Resposta: Na quinta há 50 galinhas e 40 vacas.

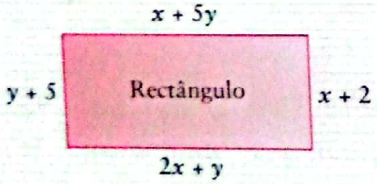
1

1.1 y pessoas foram divididas por x barcos.
- Se cada barco levar 8 pessoas sobram 5.
- Se cada barco levar 7 pessoas sobram 11.

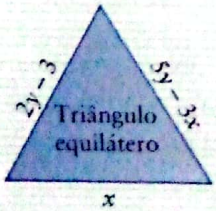
Quantos pessoas foram transportadas nos barcos?

1.2 Observe as figuras e de acordo com os dados determine x e y.

a)



b)



Digitalizada com CamScanner

Problema 2 Resolução de um sistema de duas equações

A diferença entre o triplo do dinheiro do Jeremias e o dobro do dinheiro da Olívia é igual a 4 meticais.

O triplo do dinheiro do Jeremias excede em 5 meticais o dinheiro da Olívia.

Quantos meticais tem cada um?

Resolução

Sejam:

x = dinheiro do Jeremias ;

y = dinheiro da Olívia.

Então:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - 5 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -3x + y = -5 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo **método de adição ordenada.**

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -3x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$-y = -1$$

ou

$$y = 1 .$$

Note que, pelo facto dos coeficientes de x serem simétricos, a equação que resulta da adição ordenada só tem a incógnita y.

Atendendo a que:

$$(2)\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2y = 2 \end{cases}$$

podemos agora substituir a primeira equação pela sua soma com a segunda:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$3x = 6$$

ou

$$x = 2$$

A solução do sistema é o par ordenado $(2 , 1)$.

Resposta: O Jeremias tem 2 meticais e a Olívia 1 metical.

2

2.1 O fabricante de cestos

Um fabricante de cestos ganha 3 meticais por cada cesto que fabrica sem defeito e perde 5 meticais por cada cesto que fabrica com defeito.

Numa semana fabricou 160 cestos e obteve um lucro de 400 meticais.

Quantos cestos com defeito foram produzidos?

2.2 O lamento do pombo

Dos cem que aqui nascemos, neste bonito pombal, eu mais dezanove lamentamos a nossa sorte.

Namoradas não temos.

Do pombal sairemos para procurar a nossa consorte.

Quantas pombas nasceram no pombal?

Digitalizada com CamScanner

3.2 Sistemas de três equações a três incógnitas

A um sistema do tipo:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

em que a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'' e d'' são números reais, chama-se **sistema de três equações lineares**, nas incógnitas x, y e z, escrito na forma canónica.

Uma solução de um sistema deste tipo é um terno ordenado de números que verificam simultaneamente todas as equações.

Observação

Terno ordenado
$(x, y, z) = (1, 2, 3) \iff$
$\iff x = 1, y = 2$ e $z = 3$

Resolver um sistema é determinar as suas soluções. Para tal, vamos transformar o sistema noutros cada vez mais simples, usando princípios ou métodos de equivalência.

3.2.1 Método de substituição

Se, num sistema de equações, resolvermos uma delas em ordem a uma das incógnitas e substituirmos, nas outras equações, essa incógnita pela expressão designatória obtida, obteremos um sistema equivalente ao primeiro.

Aplicando este princípio para resolver o sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \qquad \text{(forma canónica)}$$

começa-se por resolver a 1.ª equação em ordem a z (ou qualquer outra):

$$z = \frac{d - ax - by}{c}$$

Então, representando $\frac{d - ax - by}{c}$ por $f(x, y)$, são equivalentes os sistemas:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \iff \begin{cases} z = f(x, y) \\ a'x + b'y + c' \cdot f(x, y) = d' \\ a''x + b''y + c'' \cdot f(x, y) = d'' \end{cases}$$

E como as duas últimas equações contêm apenas as incógnitas x e y, seguir-se-ia a resolução do sistema constituído por estas duas equações.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 3 Resolução de um sistema de três equações

Aplicando o método de substituição, resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ 3x - y - 4z = 3 \end{cases}$$

Resolução

Resolvendo a primeira equação em ordem a z (poderia ser em ordem a x ou a y) e, aplicando o princípio de substituição, vem, sucessivamente:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ 3x - y - 4z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x + 3y \\ x + y - 2(1 - 2x + 3y) = 3 \\ 3x - y - 4(1 - 2x + 3y) = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x + 3y \\ x + y - 2 + 4x - 6y = 3 \\ 3x - y - 4 + 8x - 12y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x + 3y \\ 5x - 5y = 5 \\ 11x - 13y = 7 \end{cases}$$

Agora, no sistema constituído pelas duas últimas equações (duas incógnitas), pode-se, por exemplo, resolver a primeira equação em ordem a y.

Vem:

$$\begin{cases} z = 1 - 2x + 3y \\ y = x - 1 \\ 11x - 13(x - 1) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x + 3y \\ y = x - 1 \\ 11x - 13x + 13 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x + 3y \\ y = x - 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x + 3y \\ y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

O sistema admite como única solução $(3, 2, 1)$, pelo que, é um sistema possível e determinado.

3

Resolva, pelo método de substituição, cada um dos seguintes sistemas.

3.1 $\begin{cases} 2x + y - 5z = 8 \\ y = 3z + x \\ 4x - 8 = 0 \end{cases}$

3.2 $\begin{cases} x + 3z = 10 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} 4x - 3y + z = 10 \\ 2x - 4y + 5z = 10 \\ x + 5y + z + 9 = 0 \end{cases}$

Digitalizada com CamScanner

3.2.2 Método de adição ordenada

Se num sistema de equações substituirmos uma equação pela que se obtém adicionando ordenadamente essa equação com qualquer das outras, obteremos um sistema equivalente ao primeiro.

Assim:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \iff \begin{cases} (a + a')x + (b + b')y + (c + c')z = d + d' \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Exemplo 4 Resolução de um sistema de três equações

Aplicando o método de adição ordenada, resolva o sistema.

$$\begin{cases} 6x + 4y - 5z = 13 \\ 3x - 3y - z = -5 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Resolução

Vamos começar por multiplicar as 2.ª e 3.ª equações por números escolhidos de maneira a eliminar a incógnita nas duas equações.

$$\begin{array}{l} \\ \boxed{-2} \times \\ \boxed{-6} \times \end{array} \begin{cases} 6x + 4y - 5z = 13 \\ 3x - 3y - z = -5 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + 4y - 5z = 13 \\ -6x + 6y + 2z = 10 \\ -6x + 6y + 12z = 0 \end{cases}$$

Adicionando ordenadamente a primeira equação com a segunda e a primeira equação com a terceira, vem:

$$\begin{array}{rr} \text{1.ª eq.} & 6x + 4y - 5z = 13 \\ \text{2.ª eq.} & \underline{-6x + 6y - 2z = 10} \\ & 10y - 3z = 23 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \text{1.ª eq.} & 6x + 4y - 5z = 13 \\ \text{3.ª eq.} & \underline{-6x + 6y + 12z = 0} \\ & 10y + 7z = 13 \end{array}$$

Substituindo a segunda e terceira equações do sistema dado por estas somas, vem:

$$(1) \begin{cases} 6x + 4y - 5z = 13 \\ 10y - 3z = 23 \\ 10y + 7z = 13 \end{cases}$$

Digitalizada com CamScanner

Em seguida, elimina-se na última equação a incógnita y.

$$\begin{array}{rl} 2.^a \text{ eq.} & \begin{cases} 10y - 3z = 23 \\ 10y + 7z = 13 \end{cases} \\ \boxed{-1} \times 3.^a \text{ eq.} & \end{array} \iff \begin{cases} 10y - 3z = 23 \\ -10y - 7z = -13 \end{cases}$$

$$-10z = 10$$

$$z = -1$$

Substituindo a última equação de (1) por esta soma, obtém-se o sistema equivalente seguinte.

$$(2) \begin{cases} 6x + 4y - 5z = 13 \\ 10y - 3z = 23 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vamos, agora, eliminar x na segunda equação.

$$\begin{array}{rl} 2.^a \text{ eq.} & 10y - 3z = 23 \\ \boxed{3} \times 3.^a \text{ eq.} & -3z = -3 \\ \hline & 10y = 20 \\ & y = 2 \end{array}$$

Obtém-se o sistema equivalente.

$$\begin{cases} 6x + 4y - 5z = 13 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Eliminando de uma vez y e z na primeira equação, vem, finalmente:

$$\begin{array}{rl} \boxed{-4} \times & \begin{cases} 6x + 4y - z = 13 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \\ \boxed{5} \times & \end{array} \iff \begin{cases} 6x + 4y - 5z = 13 \\ -4y = -8 \\ -5z = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

A solução do sistema é o terno ordenado $(0, 2, -1)$.

Repare que: Utilizando simultaneamente os dois métodos (método misto), a partir do sistema (2), obtém-se rapidamente a solução.

Com efeito, substituindo z por -1 na segunda equação, vem:

$$10y - 3 \times (-1) = 23 \iff 10y = 20 \iff y = 2$$

E, substituindo y por 2 na primeira equação, vem:

$$6x + 4 \times 2 - 5 \times (-1) = 13 \iff 6x = 0 \iff x = 0$$

Chegamos, assim, à solução $(0, 2, -1)$.

4 Determine o terno (x, y, z) que verifica cada um dos seguintes sistemas, aplicando o método de adição ordenada.

4.1 $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 6 \\ 2x - y + 5z = 10 \\ x + 2y - z = -7 \end{cases}$

4.2 $\begin{cases} 5x + 6y + 4z = 3 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 3x + 2y - 2z = -1 \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} 8x + 4y + 3z = 14 \\ 4x + 2y - z = 2 \\ x - 3y + 5z = 11 \end{cases}$

Digitalizada com CamScanner

3.3 Resolução de sistemas pelo método de Cramer

A regra ou método de Cramer é uma das maneiras de resolver um sistema linear, mas só se utiliza nos sistemas em que o número de equações e o número de incógnitas forem iguais.

Matriz

Uma matriz é um conjunto de números dispostos de forma rectangular. Há matrizes com o mesmo número de linhas e de colunas, são as matrizes quadradas.

Observação

Há autores que usam $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ em lugar de $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Exemplo:

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ matriz de 2×2, isto é, 2 linhas e 2 colunas.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ matriz de 3×3, isto é, 3 linhas e 3 colunas.

A cada matriz quadrada está associado um número, chamado **determinante da matriz.**

O determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ denota-se por $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ e calcula-se multiplicando os elementos das diagonais e subtraindo-os.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 3 = 5 - 6 = -1$$

De um modo geral, para calcular os determinantes de matrizes de 2×2 e 3×3 procede-se da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb \, .$$

O determinante de uma matriz 3×3 pode obter-se do determinante de uma matriz 2×2:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

A solução do sistema:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3 \end{cases}$$

é dada por:

$$x = \frac{D_x}{D} \, , \; y = \frac{D_y}{D} \text{ e } z = \frac{D_z}{D} \, , \text{ se } D \neq 0 \, ,$$

onde:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \, , \; D_x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \, , \; D_y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ e } D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} .$$

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 5 **Resolução de um sistema pelo método de Cramer**

Resolva o sistema seguinte pelo método de Cramer.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ 5x + 5y + 3z = -8 \end{cases}$$

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times [3 - (-10)] - 3(-6 - 5) + 5(4 - 1) =$$

$$= 1 \times 13 - 3 \times (-11) + 5 \times 3 =$$

$$= 13 + 33 + 15 = 61$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-8) \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times [3 - (-10)] - 3 \times (-6 - 5) - 8(4 - 1) =$$

$$= 4 \times 13 + 3 \times 11 - 8 \times 3 =$$

$$= 52 + 33 - 24 = 61$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & -8 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(9 - 16)] - 3(12 + 8) + 5(-8 - 3)$$

$$= -7 - 60 - 55 = -122$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & -8 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-8 - 15) - 3(16 - 20) + 5(-6 - 4) =$$

$$= -23 + 12 - 50 = -61$$

Donde:

$$x = \frac{61}{61} = 1 \; ; \; y = \frac{-122}{61} = -2 \; ; \; z = \frac{-61}{61} = -1 \, .$$

A solução do sistema é: $(1 \, , \, -2 \, , \, -1)$.

5

Resolva, usando o método de Cramer, os seguintes sistemas.

5.1 $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$

5.2 $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2y - 3z = 5 \\ z + 3x = 5 \end{cases}$

5.3 $\begin{cases} \frac{3x - 4}{5} - \frac{y + 3}{2} = 0 \\ 4x - 7y = -3 \\ z + 3y = 16 \end{cases}$

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

A solução do sistema é o par ordenado $(x\ ,\ y)$ igual a:

(A) $(4\ ,\ -1)$;

(B) $(-1,\ 4)$;

(C) $(1\ ,\ 4)$;

(D) $(-1\ ,\ -4)$.

10 pontos

2 Considere o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} = 2(x-y) \\ \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{2(y+1)}{3} \end{cases}$$

A solução do sistema é o par ordenado $(x\ ,\ y)$ igual a:

(A) $(7\ ,\ 5)$;

(B) $(5\ ,\ 7)$;

(C) $(-7\ ,\ -5)$;

(D) $(-5\ ,\ 7)$.

10 pontos

3 Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 2x - 2y - 2z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \end{cases}$$

O terno ordenado $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ que é solução do sistema é igual a:

(A) $(1\ ,\ -3\ ,\ 2)$;

(B) $(-1\ ,\ 2\ ,\ 3)$;

(C) $(2\ ,\ -3\ ,\ 1)$;

(D) $(-2\ ,\ -3\ ,\ 1)$.

10 pontos

4 Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 2x - 2y - 2z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \end{cases}$$

Pode afirmar-se que:

(A) o sistema é possível e determinado.

(B) o sistema é impossível.

(C) o sistema é possível e indeterminado.

10 pontos

5 Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

A solução do sistema é o par ordenado $(x\ ,\ y\ ,\ z)$ igual a:

(A) $(1\ ,\ 1\ ,\ 1)$;

(B) $(2\ ,\ 2\ ,\ 2)$;

(C) $(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$;

(D) $(-1\ ,\ 0\ ,\ 0)$.

10 pontos

6 Considere o sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 5 \\ 4x + y - 3z = 2 \\ 6x + 7y - 17z = 4 \end{cases}$$

Pode afirmar-se que:

(A) o sistema é impossível;

(B) a solução do sistema é $(-1\ ,\ 0\ ,\ 1)$;

(C) a solução do sistema é $(-2\ ,\ 0\ ,\ 2)$;

(D) a solução do sistema é $\left(0\ ,\ 0\ ,\ \dfrac{5}{4}\right)$.

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

7 Observe a seguinte resolução de um sistema de duas equações sendo uma linear e outra não linear.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + (1 - x)^2 = 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 - 2x + x^2 = 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x - 1) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

O sistema tem duas soluções: $(0\ ,\ 1)$ e $(1\ ,\ 0)$.

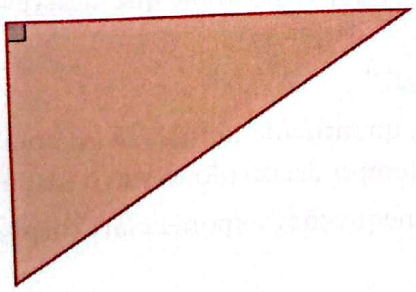
Utilize o mesmo método para resolver os seguintes sistemas.

7.1 $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + 4y^2 = 13 \end{cases}$

7.2 $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x^2 - y^2 = -23 \end{cases}$

20 pontos

8 Num triângulo rectângulo:



a hipotenusa mede 13 cm. Sabendo que a soma dos comprimentos dos catetos é igual a 17 cm, calcule a medida dos comprimentos dos catetos.

20 pontos

9 Aplicando o método de substituição, resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3x - 5y + 4z = 12 \\ y + 3z = 7 \\ z = 2 \end{cases}$$

20 pontos

10 Resolva, pelo método de adição ordenada, o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 22 \\ x - 4y + 2z = -5 \\ 2x - y + z = 12 \end{cases}$$

20 pontos

11 Resolva, pelo método de Cramer, o sistema:

$$\begin{cases} 6x - y + 8z = 4 \\ 4x + 3y + 4z = 6 \\ 10x - 5y - 8z = -2 \end{cases}$$

30 pontos

12 Considere o sistema.

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 2x + 9y + 15z = 4 \\ 3x + 6y + 10z = 6 \end{cases}$$

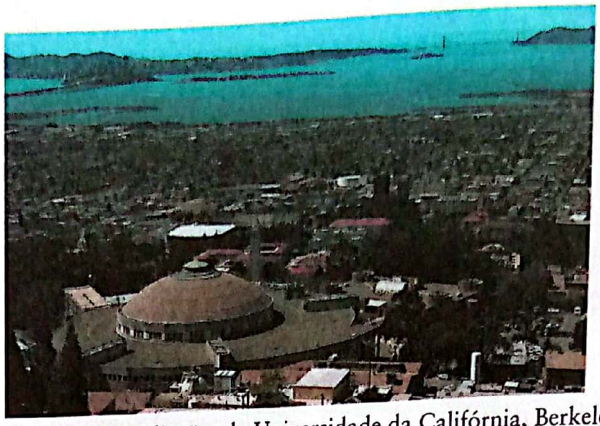
12.1 Verifique que $(2\ ,\ -5\ ,\ 3)$ é solução do sistema.

12.2 Mostre que o sistema admite como soluções todos os ternos ordenados do tipo $(2\ ,\ -5a\ ,\ 3a)$ em que $a \in \mathbb{R}$ (é um sistema indeterminado).

Digitalizada com CamScanner

Um olhar sobre a História

Em 1940, dois cientistas que trabalhavam no Laboratório de Radiações da Universidade da Califórnia, em Berkeley, descobriram mais um elemento: o carbono-14 (^{14}C).



Laboratório de Radiações da Universidade da Califórnia, Berkeley

Medalha do prémio Nobel

Em 1949, **Willard Frank Libby** (1908-1980), um químico americano que também estudara em Berkeley, descobre como utilizar o ^{14}C na determinação aproximada da idade de seres orgânicos, o que teve muita importância, por exemplo, na Arqueologia. Este trabalho valeu-lhe o Prémio Nobel da Química de 1960.

O carbono-14 é um constituinte do carbono existente na Natureza, mas tem uma característica especial: é radioactivo, isto é, desintegra-se por radiação. A proporção de ^{14}C no carbono total é constante. As plantas absorvem carbono no seu processo de fotossíntese, os animais comem as plantas, adquirindo-o também. Assim, o carbono existe em todos os seres vivos. Contudo, quando um organismo morre, o seu ^{14}C continua a desintegrar-se, enquanto o restante carbono permanece, o que provoca uma alteração na proporção entre o ^{14}C e o carbono total. Conhecendo as leis que regem a radioactividade do ^{14}C, os cientistas conseguem determinar, aproximadamente, a data da morte de um animal, uma planta, um tecido, etc., mesmo em forma fóssil.

O carbono-14 desintegra-se segundo uma lei exponencial, isto é, a uma taxa proporcional à quantidade de material existente. A fórmula que descreve este tipo de comportamento é:

$$A = A_0 e^{-at}$$

em que A_0 é a quantidade inicial, A é a quantidade actual, a é uma constante própria do material em estudo e t mede o tempo decorrido desde o instante inicial.

Saber resolver e interpretar equações e inequações exponenciais tornou-se ainda mais importante...

Digitalizada com CamScanner

3 Equações e inequações exponenciais

1 Equações e inequações exponenciais

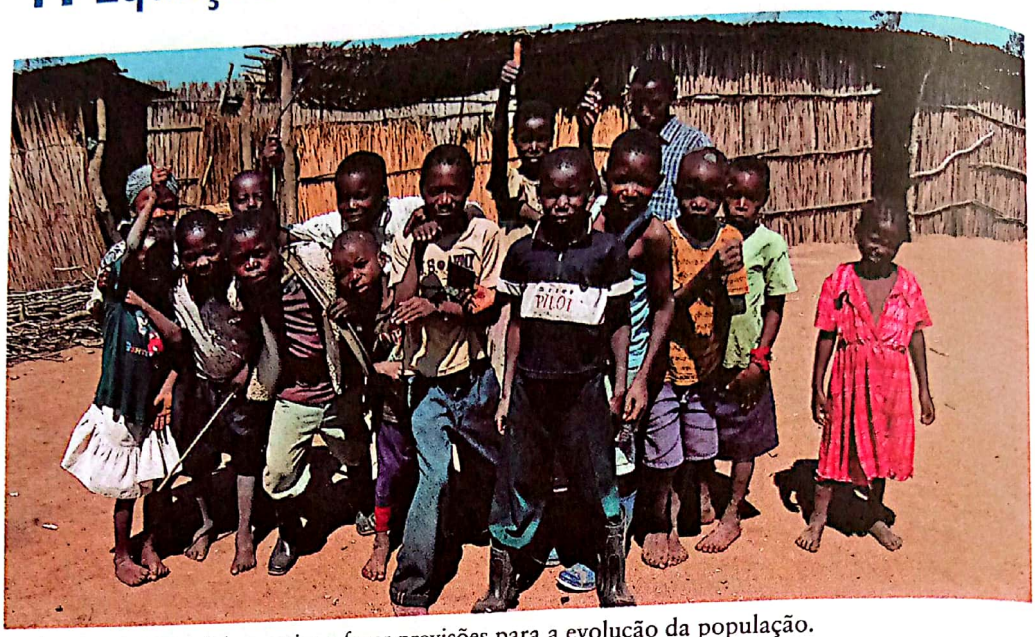
Material:
Lápis, papel e calculadora

Digitalizada com CamScanner

1. Equações e inequações exponenciais

Objectivos

1. Identificar as equações e as inequações exponenciais.
2. Resolver gráfica e analiticamente as equações e inequações exponenciais.
3. Resolver problemas do dia-a-dia que envolvam equações e inequações exponenciais.



Vila de Chilembene

As funções exponenciais permitem fazer previsões para a evolução da população.

1.1 Função exponencial (revisão)

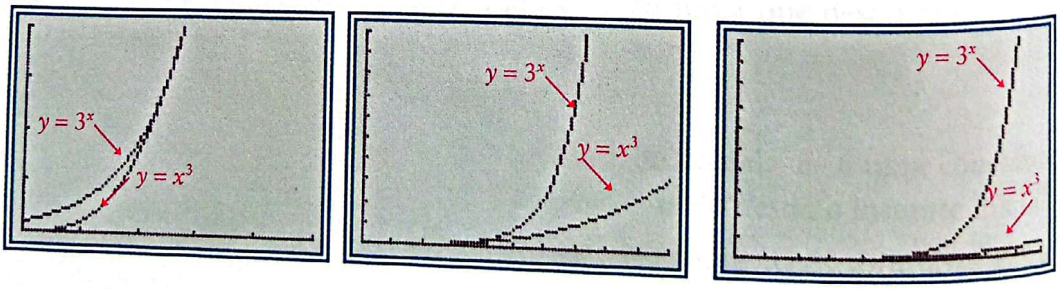
As funções exponenciais e as funções logarítmicas são das funções mais importantes na Matemática.

Através delas os cientistas fazem estimativas para fenómenos que ocorreram há milhões de anos, mas com elas também se pode prever o crescimento de uma população, de um investimento económico ou estudar a desintegração de um material radioactivo.

A expressão **crescimento exponencial** faz parte da nossa linguagem do dia-a-dia. Usualmente significa que algo cresce muito rapidamente.

Com a sua calculadora compare os gráficos de $y = x^3$ e $y = 3^x$, nos domínios:

$$[0\,,\ 5]\,;\ [0\,,\ 10] \text{ e } [0\,,\ 15]\,.$$



Para valores elevados de x, o comportamento das duas funções é muito diferente. A função $y = 3^x$ cresce muito mais rapidamente.

O que é uma função exponencial?

Nas funções $y = x^3$ ou $y = x^{\frac{1}{3}}$, a expressão analítica que as define é uma potência em que a base é a variável x e o expoente uma constante.

Estas funções não são funções exponenciais, mas **funções algébricas.**

Digitalizada com CamScanner

As funções:

$y = 2^x$; $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; $y = 3^{-x}$ são funções em que a base é constante e o expoente é variável.

Função exponencial

Uma função da forma:

$$f(x) = a^x$$

é chamada uma função exponencial, sendo a e x números reais tais que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Note que em $f : x \rightsquigarrow y = a^x$:

- se $a = 0$, $f(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, e f seria uma função constante em $\mathbb{R}^+$.
- se $a = 0$ e $x \in \mathbb{R}^-$, $f(x)$ não seria um número real.
- se $a < 0$, então $f(x)$ nem sempre seria um número real.

Por exemplo, se $a = -4$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$, que não é um número real.

Observação

Se $a = 1$, $f(x) = 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, e f seria uma função constante.

Qual é o domínio de uma função exponencial?

Sabemos, por exemplo, que:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 \quad \text{e} \quad 2^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}.$$

Se o expoente é um número racional não temos dúvidas acerca do significado da potência. E se o x é irracional?

Por exemplo, qual é o significado de $2^{\sqrt{3}}$?

Tomando aproximações sucessivas de $\sqrt{3}$ obtemos uma sucessão de potências.

Tem-se que $\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,80\ldots$ $\sqrt{3}$ representa uma dízima infinita não periódica.

$2^{1,7} = 2^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{2^{17}} = 3{,}249\,009\,585\ldots$

$2^{1,73} = 2^{\frac{173}{100}} = \sqrt[100]{2^{173}} = 3{,}317\,278\,183\ldots$

$2^{1,732} = 2^{\frac{1732}{1000}} = \sqrt[1000]{2^{1732}} = 3{,}321\,880\,096\ldots$

$2^{1,73205} = 3{,}321\,995\,226\ldots$

$2^{1,7320508} = 3{,}321\,997\,068\ldots$

Quando o expoente x se aproxima de $\sqrt{3}$ o valor de 2^x tende para um dado número b.

Define-se $2^{\sqrt{3}}$ como sendo esse número b.

Digitalizada com CamScanner

Fica então definida a função para qualquer número real x.

Domínio de uma função exponencial

O domínio da função $f(x) = a^x$ para $a > 0$ e $a \neq 1$ é o conjunto dos números reais.

As propriedades das potências que se conhecem para expoentes racionais também se aplicam para expoentes irracionais.

Recordemos essas propriedades.

Propriedades da potenciação (Estas propriedades são válidas sempre que as expressões tenham significado)		
P.1: $a^1 = a$	P.5: $a^n \times b^n = (a \times b)^n$	P.9: $(a^n)^m = a^{n \times m}$
P.2: $1^n = 1$;	P.6: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$	P.10: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
P.3: $a^0 = 1$, $a \neq 0$;	P.7: $a^n \times a^m = a^{n+m}$	P.11: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
P.4: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$	P.8: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	

Exemplo 1 **Evolução da população mundial**

Durante as últimas décadas, verificou-se que a população mundial crescia 2% ao ano e que em 1992 era cerca de 6 mil milhões.

Mostre que a população P pode ser dada pela expressão:

$$P(t) = 6(1 + 0{,}02)^t$$

com t em anos e $t = 0$ correspondente a 1992.

Represente graficamente a função. Qual será a população em 2100?

Resolução

Com a ajuda da calculadora construiu-se a seguinte tabela:

Tempo em anos (t)	**População mundial em mil milhões (P)**
(1992 $\longrightarrow t = 0$) 0	6
1	$6 + 6 \times 0{,}02 = 6\ (1 + 0{,}02)$
2	$6\ (1 + 0{,}02)\ (1 + 0{,}02) = 6\ (1 + 0{,}02)^2$
3	$6\ (1 + 0{,}02)^2\ (1 + 0{,}02) = 6\ (1 + 0{,}02)^3$
...	...
30	$6\ (1 + 0{,}02)^{30}$
60	$6\ (1 + 0{,}02)^{60}$
...	...
t	$6\ (1 + 0{,}02)^t$

Digitalizada com CamScanner

1

Considere a função referida ao lado para prever a população mundial.

1.1 Use a calculadora gráfica para obter uma representação gráfica desta função.

1.2 Calcule a população mundial prevista para o ano 2200 e comente o valor encontrado.

1.3 Em que ano a população mundial ultrapassará os 100 mil milhões de indivíduos, mantendo-se aplicável este modelo (recorra à calculadora gráfica)?

1.4 Se a população crescesse não 2% ao ano mas 3%, como se representaria analiticamente a função?

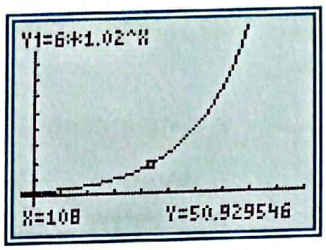
A população mundial pode ser encontrada pela função:

$$P(t) = 6\,(1 + 0{,}02)^t$$

com t em anos após 1992.

Assim, no ano 2100 $(2100 - 1992 = 108)$, a população mundial prevista será $6 \times (1{,}02)^{108} \approx 51$ mil milhões.

Representando graficamente a função P, vem:



1.2 Propriedades das funções exponenciais

As funções exponenciais serão monótonas?

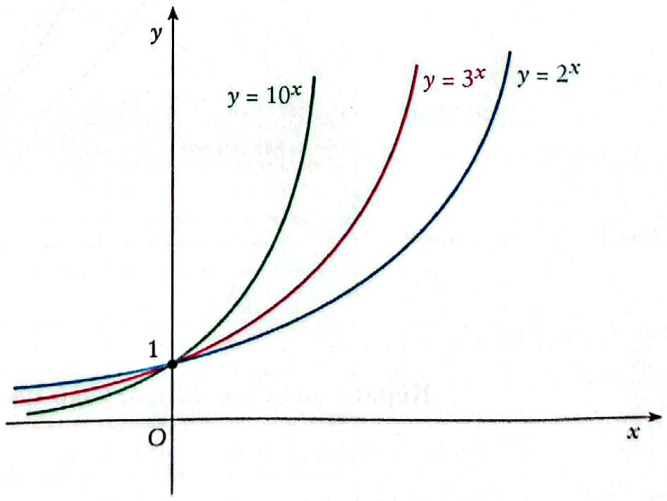
Qual será o seu contradomínio?

Para responder a estas e outras questões, vamos fazer um estudo intuitivo da família de funções:

$$y = a^x\,,\ a > 1\,.$$

Sejam:

$$f : x \rightsquigarrow y = 2^x\,;\quad g : x \rightsquigarrow y = 3^x\,;\quad h : x \rightsquigarrow y = 10^x$$



Digitalizada com CamScanner

Observação

- $x \longrightarrow +\infty$ lê-se **x tende para mais infinito.**
- $\lim_{x \to +\infty} a^x$ lê-se **limite de a^x quando x tende para mais infinito.**
- Trata-se de analisar o comportamento da função quando x é indefinidamente grande.
- A recta $y = b$ é uma **assimptota horizontal** do gráfico da função f se $f(x) \longrightarrow b$ quando $x \longrightarrow +\infty$ ou $x \longrightarrow -\infty$.

- Os gráficos passam todos pelo ponto $(0\ ,\ 1)$ pois $a^0 = 1\ ,\ a \neq 0$.
- Quando $x \longrightarrow +\infty$, as funções tendem para $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty\ ,\ a > 1\ .$$

- Quando $x \longrightarrow -\infty$, as funções tendem para 0

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0\ ,\ a > 1\ .$$

(Repare que, por exemplo, $2^{-100} = \frac{1}{2^{100}}$ é um número muito próximo de zero.)

Relativamente às funções $y = a^x\ ,\ a > 1$, pode afirmar-se que:

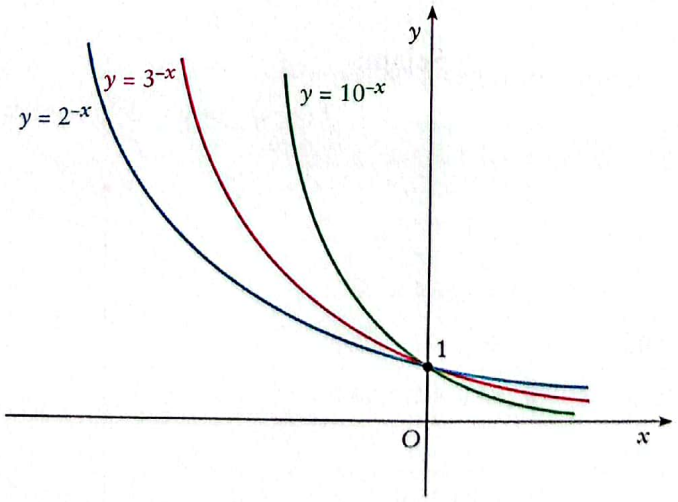
o domínio é $\mathbb{R}$, o contradomínio é $\mathbb{R}^+$, são contínuas, injectivas e crescentes.

Como podemos obter o gráfico da função $y = a^{-x}$ a partir do gráfico da função $y = a^x\ ,\ a > 1$?

Dada uma função $f(x)$, sabemos que o gráfico de $f(-x)$ se obtém reflectindo o de $f(x)$ relativamente ao eixo das ordenadas.

Aplicando os conhecimentos das transformações dos gráficos de funções, sabemos que os dois gráficos são simétricos relativamente ao eixo das ordenadas.

Ilustraremos com ajuda gráfica.



Repare que estas funções são decrescentes.

Digitalizada com CamScanner

De um modo geral tem-se:

A função exponencial $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$ tem as seguintes propriedades:

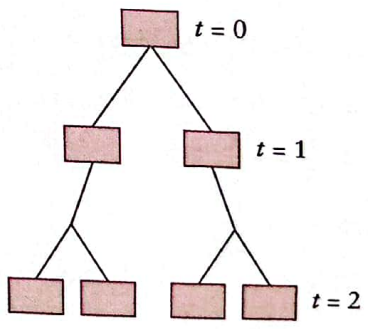
1. **A função f é estritamente crescente para $a > 1$ e estritamente decrescente para $0 < a < 1$.**
2. **O gráfico da função intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.**
3. **A recta da equação $y = 0$, eixo Ox, é uma assimptota horizontal do gráfico de f.**
4. **O domínio de f é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $]0, +\infty[$.**
5. **A função f é injectiva.**
6. **A função f é contínua.**

Exemplo 2 A reprodução das bactérias

Admita que numa praia havia 1 milhão de bactérias às 15 horas do dia 10 de Agosto.

Sabe-se que, em média, cada bactéria divide-se em duas numa hora.

Representando t o número de horas decorridas após as 15 horas do dia 10 de Agosto, escreva a expressão analítica que modela a situação e calcule o número de bactérias existentes às 15 horas do dia 20 de Agosto se nada for feito para contrariar o crescimento das mesmas.



Resolução

t (horas)	P (milhões)
0	1
1	2
2	4
3	8
...	...
t	2^t

Então:

$$P(t) = 2^t$$

Passados 10 dias (240 horas), vem:

$$P(240) = 2^{240} \approx 1{,}8 \times 10^{72}.$$

2

2.1 Uma população de bactérias aumenta 50% em cada dia. Se no início da contagem havia 1 milhão de bactérias, quantas haverá ao fim de t dias?

2.2 Represente graficamente a função $f(t) = 1{,}5^t$.

Digitalizada com CamScanner

1.3 Equações exponenciais

As funções exponenciais são injectivas.

Assim, para $a > 0$ e $a \neq 1$, se $a^{x_1} = a^{x_2}$, então $x_1 = x_2$.

Esta propriedade é utilizada para resolver equações exponenciais.

Exemplo 3 **Resolução de equações exponenciais**

Resolva cada uma das seguintes equações exponenciais.

3.1 $3^{x^2} = 3^{16}$ **3.2** $\sqrt[3]{5^x} = 0{,}2\sqrt{5}$ **3.3** $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$

3.4 $2 \times 2^{2x} - 4 \times 2^x = 0$ **3.5** $2^{2x} + 7 \times 2^x - 8 = 0$

Resolução

3.1 $3^{x^2} = 3^{16} \iff x^2 = 16 \iff x = -4 \vee x = 4$

$S = \{-4, 4\}$

3.2 $\sqrt[3]{5^x} = 0{,}2\sqrt{5} \iff 5^x = 0{,}2^3\left(\sqrt{5}\right)^3 \iff$

$\iff 5^x = \left(\frac{2}{10}\right)^3 \times \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 \iff 5^x = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times 5^{\frac{3}{2}} \iff$

$\iff 5^x = 5^{-3} \times 5^{\frac{3}{2}} \iff 5^x = 5^{-\frac{3}{2}} \iff x = -\frac{3}{2}$

$S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Observação

Método alternativo para a resolução da equação exponencial ao lado:

$\sqrt[3]{5^x} = 0{,}2\sqrt{5} \iff$

$\iff 5^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{5} \times 5^{\frac{1}{2}} \iff$

$\iff 5^{\frac{x}{3}} = 5^{-1} \times 5^{\frac{1}{2}} \iff$

$\iff 5^{\frac{x}{3}} = 5^{-\frac{1}{2}} \iff$

$\iff \frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \iff$

$\iff x = -\frac{3}{2}$

3.3 $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4} \iff 2^{x^2-3x} = 2^{-2} \iff x^2 - 3x = -2 \iff x^2 - 3x + 2 = 0$

$\iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \iff x = 2 \vee x = 1$

$S = \{1, 2\}$

3.4 $2 \times 2^{2x} - 4 \times 2^x = 0 \iff 2^{2x} = 2 \times 2^x \iff 2^{2x} = 2^{x+1} \iff$

$\iff 2x = x + 1 \iff x = 1$

$S = \{1\}$

3.5 $2^{2x} + 7 \times 2^x - 8 = 0$

Seja $2^x = a$.

Substituindo na equação dada, vem: $a^2 + 7a - 8 = 0$.

$a = \frac{-7 + \sqrt{49+32}}{2} \iff a = \frac{-7+9}{2} \iff a = 1 \vee a = -8$

Como $a = 2^x$, vem:

- $2^x = 1 \iff 2^x = 2^0 \iff x = 0$
- $2^x = -8$ Equação impossível

$S = \{0\}$.

3

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

3.1 $4^x = \frac{1}{16}$

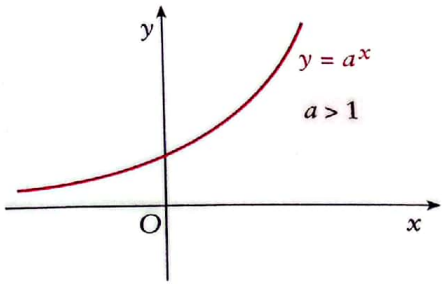
3.2 $\left(\frac{1}{10}\right)^x = 1000$

3.3 $125 = 5^{2-x}$

Digitalizada com CamScanner

1.4 Resolução de inequações exponenciais

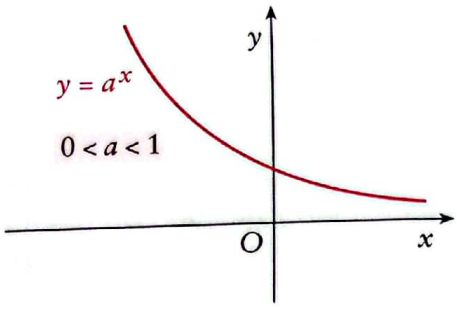
Analisando o comportamento da função $y = a^x$, quando $a > 1$:



a função é sempre crescente.

- $a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) > g(x)$
- $a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) < g(x)$

Analisando o comportamento da função $y = a^x$, quando $0 < a < 1$:



a função é sempre decrescente.

- $a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) < g(x)$
- $a^{f(x)} < a^{g(x)} \iff f(x) > g(x)$

Exemplo 4 **Resolução de inequações exponenciais**

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações exponenciais.

4.1 $3^x > \frac{1}{27}$ **4.2** $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$ **4.3** $\left(\frac{3}{2}\right)^x \geqslant 1$

4.4 $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant 4^x$ **4.5** $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 3^{x-2}$

Resolução

4.1 $3^x > \frac{1}{27} \iff 3^x > 3^{-3} \iff x > -3$

$S =]-3, +\infty[$

4.2 $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 9 \iff \left(\frac{1}{3}\right)^x < 3^2 \iff 3^{-x} < 3^2 \iff -x < 2 \iff x > -2$

$S =]-2, +\infty[$

4.3 $\left(\frac{3}{2}\right)^x \geqslant 1 \iff \left(\frac{3}{2}\right)^x \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^0 \iff x \geqslant 0$

$S = [0, +\infty[$

4.4 $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant 4^x \iff \left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{-x} \iff x \leqslant -x \iff 2x \leqslant 0 \iff x \leqslant 0$

$S =]-\infty, 0]$

4.5 $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 3^{x-2} \iff 3^{-x} \leqslant 3^{x-2} \iff -x \leqslant x-2 \iff -2x \leqslant -2 \iff$

$\iff 2x \geqslant 2 \iff x \geqslant 1$

$S = [1, +\infty[$

4

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações.

4.1 $3^x > \frac{1}{81}$

4.2 $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 27$

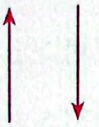
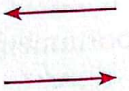
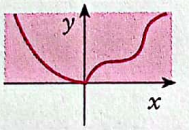
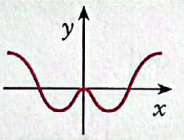
4.3 $\left(\frac{7}{2}\right)^x \leqslant 1$

4.4 $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2^{x-3}$

Digitalizada com CamScanner

1.5 Transformações do gráfico de uma função exponencial

Recordemos as transformações do gráfico de uma função.

$y = f(x) + a$		Translação de a na direcção do eixo Oy
$y = f(x + a)$		Translação de $-a$ na direcção do eixo Ox
$y = af(x)$		Expansão ou contracção segundo o factor a na direcção do eixo Oy
$y = f(ax)$		Expansão ou contracção segundo o factor $\frac{1}{a}$ na direcção do eixo Ox
$y = -f(x)$		Simetria em relação ao eixo Ox
$y = f(-x)$		Simetria em relação ao eixo Oy
$y = \lvert f(x) \rvert$		Mantêm-se os pontos de ordenada positiva ou nula e para os pontos de ordenada negativa faz-se uma simetria relativamente ao eixo Ox
$y = f(\lvert x \rvert)$		Mantêm-se os pontos de abcissa positiva e o gráfico fica simétrico relativamente ao eixo Oy

5

Partindo do gráfico da função $y = 3^x$, descreva como pode obter o gráfico das funções seguintes e confirme com a calculadora gráfica.

5.1 $y_1 = 3^{x-2}$

5.2 $y_2 = -3^{x-2}$

5.3 $y_3 = 4 - 3^{x-2}$

5.4 $y_4 = 3^{|x|}$

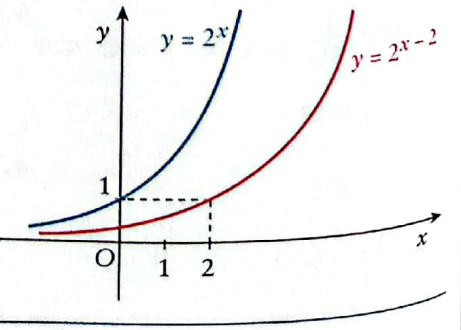
5.5 $y_5 = -|3^x|$

Exemplo 5 **Transformação do gráfico de uma função**

Considere a função $f(x) = 2^x$. Explique como pode obter o gráfico de $g(x) = 2^{x-2}$ a partir do gráfico de f.

Resolução

Adicionando-se -2 à variável independente, o gráfico desloca-se duas unidades para a direita.



Digitalizada com CamScanner

1.6 Aplicação das funções exponenciais na modelação de situações reais

Exemplo 6 O modelo do físico

No estudo de um fenómeno, um físico registou os seguintes dados:

x	2	4	6	8
$y = f(x)$	4	36	324	2916

Qual será o modelo matemático que melhor se ajusta aos valores da tabela?

Resolução

1.° processo

Ao observar os valores da tabela, apercebemo-nos de um crescimento rápido, o que faz lembrar uma função exponencial.

Será uma função do tipo $y = ba^x$?

Seja $b \neq 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

$$\begin{cases} f(2) = 4 \\ f(4) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ba^2 = 4 \\ ba^4 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} \times a^4 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{a^2} \\ a^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{9} \\ a = 3 (a > 0) \end{cases}$$

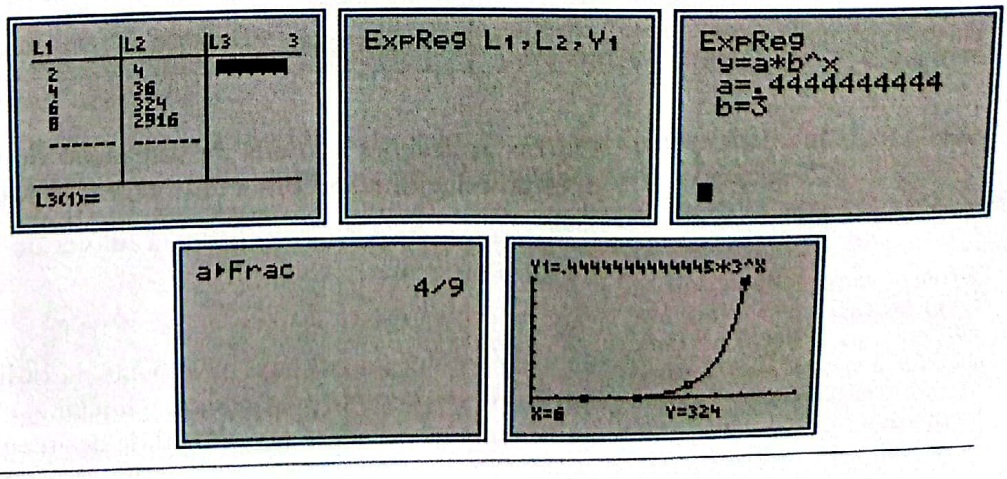
Logo, $f(x) = \frac{4}{9} 3^x$.

Verificação para os restantes valores

$f(6) = \frac{4}{9} \times 3^6 = 324$; $f(8) = \frac{4}{9} \times 3^8 = 2916$.

2.° processo

Utilizando a calculadora na função *ExpReg*.



6

Observe as tabelas e para cada uma construa uma expressão matemática que lhe corresponda.

6.1

x	$y = f(x)$
0	1
1	3
2	9
3	27

6.2

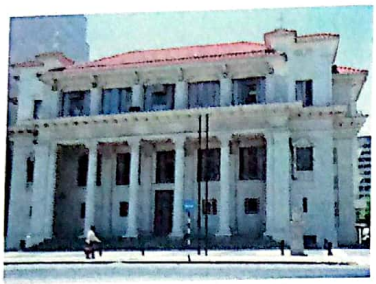
x	$y = f(x)$
0	64
2	16
4	4
6	1

Verifique usando a *ExpReg* da calculadora gráfica.

Digitalizada com CamScanner

1.7 Função exponencial de base e

Têm particular interesse, na vida real, as funções exponenciais de base e.



Edifício de um banco em Maputo.

- O capital acumulado M obtido pelo investimento de um capital C, durante t anos a uma taxa anual nominal r, com capitalizações n vezes por ano, é dado pela fórmula:

$$M = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

À medida que n aumenta, M aumenta, mas tem um limite.

Prova-se que se a capitalização fosse calculada continuamente, a fórmula $M = C\,e^{rt}$ permitiria calcular o capital acumulado.

Observação

Recorde que **e** é o número de Neper.

$\mathbf{e} \approx 2{,}718\,281\,828$

O número **e** como o número π são números irracionais.

Exemplo 7 **Capital acumulado**

Colocam-se 10 000 meticais num banco à taxa anual nominal de 4%. Calcule o capital acumulado num ano se as capitalizações forem: anuais, trimestrais, mensais, diárias, hora a hora e contínuas.

Resolução

Capitalização	Valor acumulado
Anual	$10\,000\left(1 + \frac{0{,}04}{1}\right)^{1} = 10\,400$
Trimestral	$10\,000\left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{4} \approx 10\,406{,}040\,01$
Mensal	$10\,000\left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{12} \approx 10\,407{,}415\,43$
Diária	$10\,000\left(1 + \frac{0{,}04}{365}\right)^{365} \approx 10\,408{,}084\,93$
Hora a hora	$10\,000\left(1 + \frac{0{,}04}{8760}\right)^{8760} \approx 10\,408{,}106\,79$
Continuamente	$10\,000\,e^{0{,}04\times 1} \approx 10\,408{,}107\,741$

Outras aplicações comuns da utilização de funções exponenciais de base e estão relacionadas com a desintegração radioactiva.

A fórmula que permite calcular a massa de uma substância radioactiva é da família:

$$A = A_0\,e^{rt}$$

em que A é a quantidade de substância radioactiva existente depois de t anos, A_0 representa a quantidade inicial e r é uma característica de cada substância associada à taxa anual de desintegração.

7

Calcule o capital acumulado ao fim de 4 anos e 3 meses por um capital de 20 000 meticais, colocado a uma taxa anual nominal de 3% com capitalizações contínuas.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 8 Radioactividade

A massa de substância radioactiva em certa amostra calcula-se por $A(t) = 500 \times e^{-0,09t}$ com t em anos e $A(t)$ em gramas.

Quantos gramas havia no início da contagem do tempo?
E 10 anos depois?

Resolução

$A(0) = 500 \times 1 = 500$; $A(10) = 500 \times e^{-0,09 \times 10} \approx 203,3$ g

No início havia 500 g e 10 anos depois havia 203,3 g.

8

A radioactividade de uma substância decresce de acordo com a fórmula:

$A(t) = A_0 e^{-0,3t}$,

onde A_0 é a quantidade da substância inicial, em gramas, e t o número de anos decorridos desde a observação inicial.

Se inicialmente havia 10 gramas de substância, quantos gramas havia 12 anos depois?

Exemplo 9 Crescimento exponencial

Um biólogo estudou o crescimento de uma colónia de bactérias e registou os dados observados na seguinte tabela:

t (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N (número de bactérias)	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Tratando-se de uma situação de crescimento exponencial e que este tem como modelo matemático uma função do tipo $y = b \times a^{kt}$, $b > 0$ e $a > 1$, encontre uma expressão analítica para a função representada na tabela.

Resolução

Seja $N(t) = y = b \times a^{kt}$.

$N(0) = 8$; $N(1) = 16$; $N(2) = 32$

$N(0) = 8 \iff b \times a^0 = 8 \iff b = 8$.

Logo, $b = 8$, pelo que, $N(t) = 8 \times a^{kt}$.

Determine-se a e k.

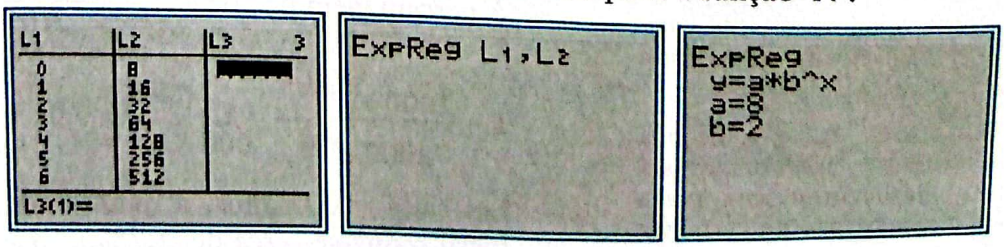
$N(1) = 16 \iff 8 \times a^{k \times 1} = 8 \times 2$

$N(2) = 32 \iff 8 \times a^{k \times 2} = 8 \times 2^2$

Parece que $k = 1$ e $a = 2$.

Com a calculadora, calculámos N para outros valores de t e verificámos que: $N = 8 \times 2^t$.

Em alternativa, usando a função de regressão exponencial da calculadora gráfica, obtivemos a mesma expressão para a função N.



A expressão analítica é $y = 8 \times 2^x$.

9

9.1 Para modelar o crescimento de uma cultura de bactérias, um biólogo encontrou a seguinte função:

$P(t) = 510\ (1,8)^t$

onde t representa o tempo, em horas, a contar desde o início da observação, no momento em que havia 510 bactérias.

Escreva $P(t)$ na forma:

$P(t) = 510\ e^{kt}$,

com k aproximado às milésimas.

9.2 Durante um período de 10 horas, um biólogo observou uma cultura de bactérias e efectuou os seguintes registos:

t (horas)	N.º de bactérias (P)
0	1 113
1	2 153
2	4 166
3	8 061
4	15 196
5	30 176

t (horas)	N.º de bactérias (P)
6	58 385
7	112 963
8	218 559
9	433 868
10	816 161

Sabendo que o comportamento do crescimento das bactérias pode ser modelado por uma expressão do tipo:

$P(t) = ke^{bt}$

determine $P(t)$.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 10 Decrescimento exponencial

Com frequência ouvimos informações do tipo "o fóssil do animal encontrado numa exploração arqueológica tem 1 milhão de anos". Informações como esta deixam-nos intrigados. Como é possível efectuarem-se tais cálculos?

Para descobrir a idade de um fóssil determina-se a quantidade de carbono-14 que contém, no momento da descoberta, e usa-se a fórmula:

$$N(t) = A_0\, e^{\frac{-t}{5760}}$$

em que t representa o tempo decorrido desde a morte do animal e A_0 é a quantidade de carbono-14 na data da morte.

Para o problema seguinte considere $A_0 = 2000$ g.

10.1 Determine a redução de carbono-14 em dez mil anos.

10.2 Determine a percentagem de redução de carbono-14 em cada 100 anos.

Resolução

10.1 $t = 10\,000$; $N(t) = A_0\, e^{\frac{-t}{5760}}$

$A_0 = 2000$

Então:

$N(10\,000) = 2000\, e^{\frac{-10\,000}{5760}} \approx 352$ g

A redução de carbono em 10 000 anos foi, aproximadamente, de $2000 - 352 = 1648$ g.

10.2 O quociente $\dfrac{N(t+100)}{N(t)}$ dá-nos a percentagem da quantidade de carbono-14 a que ficou reduzida a quantidade existente 100 anos antes.

A percentagem pedida é $1 - \dfrac{N(t+100)}{N(t)}$, ou seja,

$$1 - \frac{2000\, e^{\frac{-(t+100)}{5760}}}{2000\, e^{\frac{-t}{5760}}} = 1 - e^{\frac{-100}{5760}} \approx 0{,}017$$

Em cada 100 anos, a quantidade de carbono-14 existente no fóssil reduz-se cerca de 1,7%.

10

A radioactividade de um composto decresce de acordo com a fórmula:

$$A(t) = A_0\, e^{-0{,}2\,t}$$

onde A_0 é a quantidade de composto inicialmente presente e t o tempo em segundos após a observação inicial.

Sabe-se que inicialmente havia 20 g de composto.

10.1 Quantos gramas de composto haverá 10 s depois da observação inicial?

10.2 Calcule, com erro inferior a 0,01, quanto tempo terá de decorrer para que a quantidade do composto se reduza a metade.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 11 A desvalorização da moto

A função $P(x) = 25\,000\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$, $x \geqslant 0$ é usada para determinar o valor, em meticais, de uma moto x anos depois da sua compra.

11.1 Qual é o custo inicial da moto?

11.2 Determine o valor da moto $1{,}5$ anos depois da compra.

11.3 Quanto desvaloriza a moto ao ano?

Resolução

11.1 $P(x) = 25\,000\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$, $x \geqslant 0$; $P(0) = 25\,000$.

O valor inicial da moto é: $25\,000$ meticais.

11.2 $P(1{,}5) = 25\,000\left(\frac{4}{3}\right)^{-1{,}5} = 16\,237{,}98$ (2 c. d.)

Logo, um ano e meio depois da compra, a moto vale aproximadamente $16\,238$ meticais.

11.3 $P(x) = 25\,000\left(\frac{3}{4}\right)^{x}$, $x \geqslant 0$;

$$\frac{P(x+1)}{P(x)} = \frac{25\,000 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}}{25\,000 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{x}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{P(x+1)}{P(x)} = 0{,}75 \iff P(x+1) = 0{,}75 \times P(x)$$

O valor da moto diminui cada ano 25%, pois decorrido um ano a moto vale 75% do que valia no ano anterior.

11

O valor de um automóvel é dado pela função

$$P(t) = 100\,e^{-0{,}12\,t}$$

onde P é em milhares de meticais e t o tempo, em anos, decorrido após a compra.

11.1 Qual é o valor do automóvel três anos após a compra?

11.2 Determine x tal que, para qualquer t,

$$P(t+x) = \frac{1}{2}P(t).$$

Apresente o resultado arredondado às centésimas. Interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

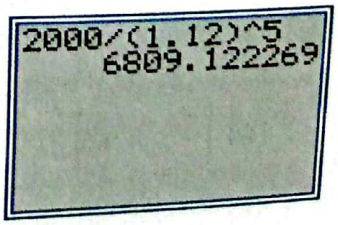
11.3 t anos após a compra, o automóvel foi vendido por $35\,000$ meticais. Quantos anos tinha o automóvel quando foi vendido?

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Exemplo 12 O ordenado do funcionário

Um funcionário do sector financeiro foi aumentado nos últimos 5 anos 12% ao ano. Hoje ganha $12\,000$ meticais. Quanto ganhava há 5 anos?

Resolução



$f(t) = ab^t$

$f(t) = a \times (1{,}12)^t$

$f(5) = 12\,000$

$a(1{,}12)^5 = 12\,000$

$a \approx 6809{,}12$

Há cinco anos ganhava, aproximadamente, 6809 meticais.

12

Um jardineiro foi aumentado, nos últimos 10 anos, 5% ao ano. Hoje ganha 4000 meticais. Quanto ganhava há 3 anos?

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A função $f(x) = x^{-3}$ é uma função exponencial.

(B) Se $3^x = -\frac{1}{27}$, então $x = -3$.

(C) Se $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$, então $x = -2$.

(D) Se $2^x = 0$, então $x = 0$.

10 pontos

2 A solução, em $\mathbb{R}$, da equação

$$5^{-x+1} = 5^{-3x+6}$$

é:

(A) 5; **(B)** $\frac{2}{5}$;

(C) 2; **(D)** $\frac{5}{2}$.

10 pontos

3 Considere, em $\mathbb{R}$, a equação $6^x = -1$.

Pode afirmar-se que:

(A) a equação é impossível.

(B) a solução da equação é 0.

(C) a equação é indeterminada.

(D) a equação tem duas soluções.

10 pontos

4 Considere a inequação $0{,}01 \leqslant 10^x$.

A solução da inequação é:

(A) $]-2, +\infty[$; **(B)** $[-2, +\infty[$;

(C) $]-\infty, 2]$; **(D)** $]-\infty, -2]$.

10 pontos

5 Considere a inequação $xe^x \geqslant e^{x-1}$.

A solução da inequação é:

(A) $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$; **(B)** $]e, +\infty[$;

(C) $]-\infty, e]$; **(D)** $\left[-\infty, \frac{1}{e}\right[$.

10 pontos

6 Considere a função real da variável real:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{10^x}}$$

O domínio de f é:

(A) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; **(B)** $\mathbb{R}$;

(C) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; **(D)** $\mathbb{R}^+$.

10 pontos

7 Considere a função real de variável real:

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x}$$

O domínio de f é:

(A) $[0, +\infty[$; **(B)** $]-\infty, 0]$;

(C) $]0, e^2]$; **(D)** $[0, e]$.

10 pontos

8 O número de árvores de uma certa espécie aumenta no tempo t de acordo com a lei:

$$N(t) = \frac{2800}{1 + 6(0{,}88)^t}, \quad t \geqslant 0$$

t em anos e $N(t)$ o número de árvores.

Quantas árvores tinha inicialmente a população?

(A) 40 **(B)** 400

(C) 2800 **(D)** 4000

10 pontos

9 Considere a função:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow -e^x - 1$$

O contradomínio da função é:

(A) $[-1, +\infty[$; **(B)** $]-\infty, -1]$;

(C) $]-\infty, -1[$; **(D)** $]-1, 1[$.

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

10 A cólera é uma doença infecto-contagiosa causada pela bactéria *Vibrio cholera*. Esta doença transmite-se principalmente pela ingestão de água ou alimentos contaminados e provoca uma infecção intestinal aguda no ser humano.

O problema que se segue envolve também uma doença infecto-contagiosa provocada por uma bactéria, a qual foi detectada numa determinada cidade.

Admita que:

- o contágio ocorre durante os primeiros 12 dias da doença;
- num dia, cada pessoa contaminada transmite a doença a três, ficando assim, decorrido um dia, quatro pessoas afectadas pela doença;
- o 1.º caso foi detectado em 1 de Julho do ano passado.

10.1 Quantas pessoas estão doentes no dia 5 de Julho, ou seja, quatro dias depois da doença ser detectada?

10.2 Complete a tabela.

Número de dias decorridos após 1 de Julho	Número de novos doentes	Total de doentes afectados
1	3	4
2	12	16
3	48	64
4	...	...
5	...	...

10.3 Indique uma expressão que traduza o número N de doentes em função do número t de dias decorridos após o dia 1 de Julho.

10.4 Se nenhuma medida de combate à doença for tomada, quantas pessoas estarão afectadas ao fim de 12 dias?

10.5 Sabendo que a cidade tem 1 000 000 de habitantes, determine ao fim de quanto tempo toda a cidade ficará contagiada se não se tomarem medidas para combater a propagação da doença.

50 pontos

11 A função:

$$C(x) = 1\,300\,000 \left(\frac{8}{7}\right)^x, \quad x \geqslant 0$$

é usada como modelo para calcular o valor, em meticais, de um andar num prédio de Maputo, x anos após a sua construção.

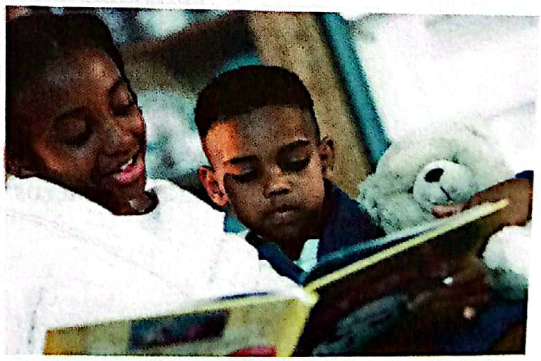
11.1 Determine o valor inicial do andar.

11.2 Qual é a percentagem de valorização do andar ao ano?

11.3 Qual é o valor do andar 10 anos depois da compra?

30 pontos

12 Um psicólogo desenvolveu uma fórmula que relaciona o número n de símbolos que uma pessoa pode memorizar com o tempo t, em minutos.



A fórmula é: $f(t) = 30\left(1 - e^{-\frac{t}{3}}\right)$.

12.1 Calcule, de acordo com a função f e com aproximação às unidades, quantos símbolos uma pessoa pode memorizar em 4 minutos.

12.2 Uma pessoa memorizou 26 símbolos. Quanto tempo precisou, aproximadamente, para realizar tal tarefa?

30 pontos

Digitalizada com CamScanner

Um olhar sobre a História

Durante o século XVI viveu-se um período de grande desenvolvimento e inovação no campo da Astronomia. Muitos astrónomos utilizaram grande parte do seu tempo a fazer cálculos intermináveis, longos e complexos, para concluir e provar as suas descobertas. Por exemplo, o famoso astrónomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) foi obrigado a escrever cerca de 1000 páginas com cálculos complicados e extensos até estabelecer as leis dos movimentos planetários.

O conceito de logaritmo veio simplificar muito os cálculos que até então eram excessivamente trabalhosos. Foi o matemático escocês John Napier ou Neper (1550-1617) quem descobriu o conceito de logaritmo, que desenvolveu na sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, publicada em 1614. Como Laplace (1749-1827) disse, diminuindo o trabalho dos cálculos, duplicou a vida dos astrónomos.

Ossos de Napier

Através dos logaritmos podem, por exemplo, transformar-se as operações de multiplicação em soma e as de divisão em subtracção.

A designação "logaritmo" parte de um conceito muito simples que poderá apreender-se como uma nova designação para expoente.

Tomemos como exemplo a expressão $3^2 = 9$, onde 3 é a base, 2 o expoente e 9 a potência. Na linguagem logarítmica, dizemos que 2 é o logaritmo de 9 na base 3.

O conceito inicial de logaritmo descoberto por Napier foi aperfeiçoado pelo professor da Universidade de Oxford, Henry Briggs (1561-1630) que, em colaboração com Napier, construiu as primeiras tabelas de logaritmos de base 10. Foi também Napier quem construiu um auxiliar de cálculo para efectuar multiplicações – conhecido por "Ossos de Napier" – e também quem iniciou de modo sistemático a escrita de números sob a forma de numeral decimal.

John Napier
(1550-1617)

Henry Briggs
(1561-1630)

Digitalizada com CamScanner

4 Equações e inequações logarítmicas

1 Equações e inequações logarítmicas

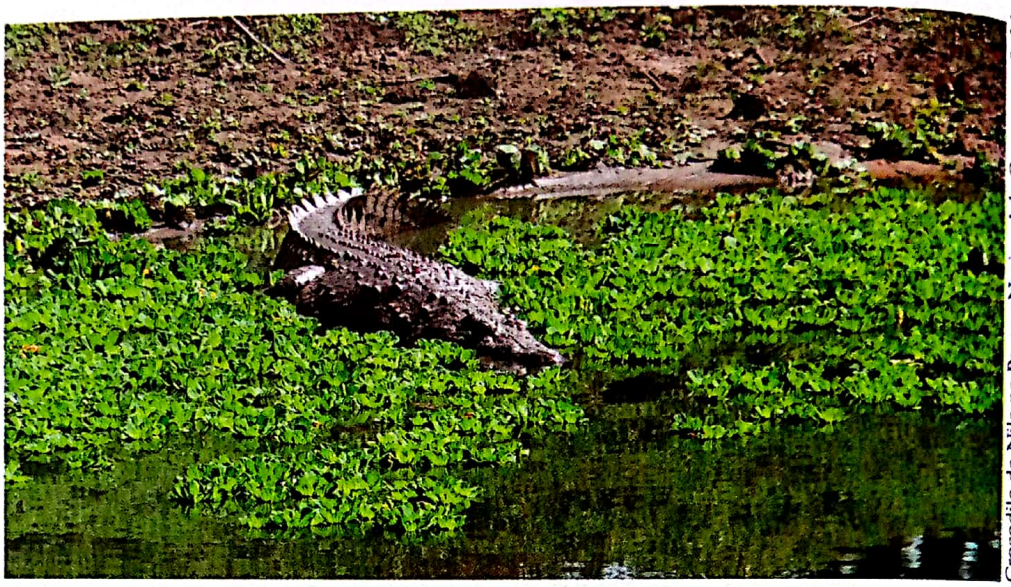
Material:
Lápis, papel e calculadora

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Identificar equações e inequações logarítmicas.
2. Resolver gráfica e analiticamente equações e inequações logarítmicas.
3. Resolver problemas da vida real que envolvam equações e inequações logarítmicas.

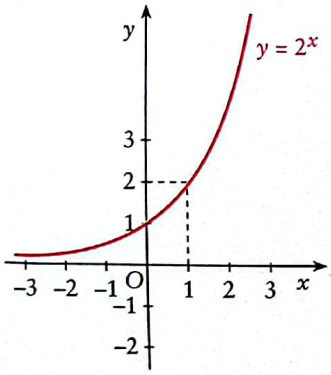
1. Equações e inequações logarítmicas



Crocodilo do Nilo no Parque Nacional da Gorongosa, Sofala

As funções logarítmicas permitem estudar o desenvolvimento de populações como, por exemplo, uma população de peixes.

1.1 Definição de função logarítmica



Consideremos a função exponencial representada graficamente ao lado.

Esta função, como todas as funções exponenciais, é injectiva e como tal tem inversa.

No caso da função exponencial, a função inversa tem um nome especial – chama-se **função logarítmica.**

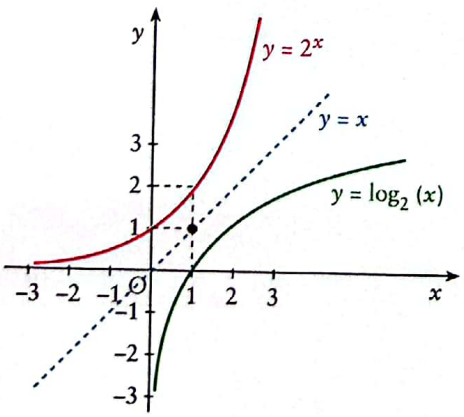
Para qualquer função f, a inversa designa-se por f^{-1}.

$f(x) = a^x$

$f^{-1}(x) = \log_a(x)$ (lê-se *logaritmo de x na base a*)

$f(x) = 2^x$; $f^{-1}(x) = \log_2(x)$

Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à recta de equação $y = x$.



Calculemos a imagem de alguns objectos por f e por f^{-1}.

x	0,1	0	1	2	3	4	5	$y = \log_2(x)$
$y = 2^x$	$2^{0,1}$	1	2	4	8	16	32	x

(f liga a 1ª linha à 2ª; f^{-1} liga a 2ª linha à 1ª)

Assim:

$\log_2(1) = 0$; $\log_2(2) = 1$; $\log_2(4) = 2$; $\log_2(8) = 3$;

$\log_2(16) = 4$; $\log_2(32) = 5$; ...

$$\log_2(x) = y \iff 2^y = x$$

Digitalizada com CamScanner

Observação

É importante ter presente que $\frac{1}{f(x)}$ é diferente de $f^{-1}(x)$.

Se $f(x) = 3^x$, $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3^x}$ e $f^{-1}(x) = \log_3(x)$.

Função logarítmica

Para $a > 0$ e $a \neq 1$, a função logarítmica com base a representa-se por:

$$f: x \mapsto y = \log_a(x),$$

sendo

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x.$$

Consequências da definição:

- **O logaritmo de 1 em qualquer base é 0.**

$\log_a(1) = y \iff a^y = 1$

Como $a > 0$ e $a \neq 1$, vem $y = 0$.

- **Só é possível calcular o logaritmo de um número positivo.**

Admita que se pretendia calcular $\log_a(-3) \iff a^y = -3$.

Como $a > 0$, não existe nenhum valor de y que satisfaça a condição, pois o contradomínio de uma função exponencial é $\mathbb{R}^+$.

Exemplo 1 Cálculo de logaritmos

Calcule:

1.1 $\log_3(27)$;

1.2 $\log_{\frac{1}{2}} 8$;

1.3 $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$;

1.4 $\log_3(1) + \log_3\left(\frac{1}{3}\right)$.

Resolução

1.1 $\log_3(27) = y \iff 3^y = 27 \iff 3^y = 3^3 \iff y = 3$

Logo, $\log_3(27) = 3$.

1.2 $\log_{\frac{1}{2}}(8) = y \iff \left(\frac{1}{2}\right)^y = 8 \iff 2^{-y} = 2^3 \iff -y = 3 \iff y = -3$

Logo, $\log_{\frac{1}{2}}(8) = -3$.

1.3 $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = y \iff 2^y = \frac{1}{16} \iff 2^y = 2^{-4} \iff y = -4$

Logo, $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$.

1.4 $\log_3(1) + \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = 0 + (-1) = -1$.

1

Calcule.

1.1 $\log_2(64)$

1.2 $\log_{16}(16)$

1.3 $\log_5(5)$

1.4 $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$

1.5 $\log_2\left(\frac{1}{64}\right)$

1.6 $\log_4(1)$

1.7 $\log_{\frac{1}{4}}(2)$

1.8 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{125}\right)$

1.9 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right)$

1.10 $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) + \log_{\frac{1}{32}}(2)$

Digitalizada com CamScanner

1.2 Logaritmos com bases especiais

No cálculo com logaritmos há duas bases que são usadas mais frequentemente: a base 10 (também designada como **base decimal**) e a base e (também chamada **base neperiana**).

Estas bases são quase sempre suprimidas e a escrita normal é modificada:

$$\log_{10}(x) \longrightarrow \log(x)$$

$$\log_e(x) \longrightarrow \ln(x)$$

Observação

Os logaritmos decimais (base 10) normalmente são números decimais onde a parte inteira é denominada **característica** e a parte decimal **mantissa.**

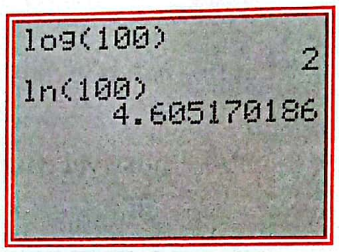
Assim, por exemplo,
log 20 = 1,3010 , onde 1 é a característica e 0,3010 é a mantissa.

As **mantissas** dos logaritmos decimais são tabeladas.

As tábuas dos logaritmos decimais foram desenvolvidas por Henry Briggs, matemático inglês do século XVI.

Hoje em dia as tábuas dos logaritmos não são utilizadas porque se usam as calculadoras.

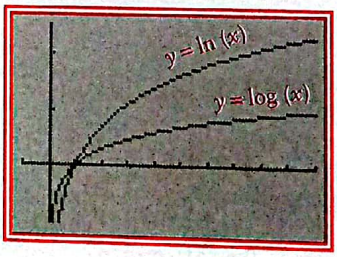
Na calculadora pode encontrar as teclas **LOG** e **LN**.



Note que:

$10^2 = 100$ e $e^{4,6} \approx 100$.

Também com a calculadora é possível obter directamente a representação gráfica destas funções:



2

Calcule, sem utilizar a calculadora.

2.1 log (1000)

2.2 log (0,01)

2.3 ln (e^3)

2.4 ln $\left(e^{\frac{1}{3}}\right)$

2.5 ln $\left(\sqrt[5]{e}\right)$

2.6 log (0,1)

2.7 ln (e)

2.8 log (10)

2.9 ln (e^2) + ln (e^{-10}) + log (1)

Exemplo 2 **Logaritmos de bases 10 e na base e (Número de Neper)**

Calcule, sem usar a calculadora:

2.1 log (100) ;

2.2 ln (e^5) .

Resolução

2.1 $\log(100) = \log_{10}(100) = 2 \quad (10^2 = 100)$

2.2 $\ln(e^5) = \log_e(e^5) = 5$

Digitalizada com CamScanner

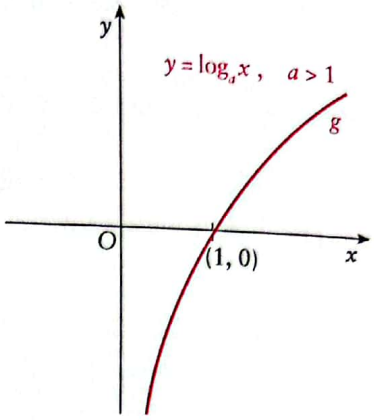
1.3 Propriedades das funções logarítmicas

$a > 1$

$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \curvearrowright y = \log_a x \ , \ a > 1$

- Domínio: $\mathbb{R}^+$
- Contradomínio: $\mathbb{R}$
- g é injectiva $(x_1 \neq x_2 \implies g(x_1) \neq g(x_2))$
- g é estritamente crescente
- $g(x) = 0 \iff x = 1$
- g é contínua (pode desenhar o gráfico sem levantar o lápis da folha de papel)

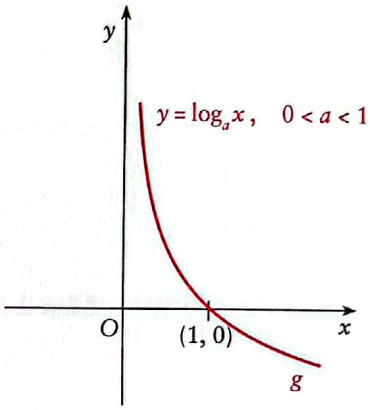


$0 < a < 1$

$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \curvearrowright y = \log_a x$

- Domínio: $\mathbb{R}^+$
- Contradomínio: $\mathbb{R}$
- g é injectiva $(x_1 \neq x_2 \implies g(x_1) \neq g(x_2))$
- g é estritamente decrescente
- g é contínua (pode desenhar o gráfico sem levantar o lápis da folha de papel)



Por definição, $a^{\log_a x} = x \ , \ \forall\, x > 0$.

Exemplo 3 **Determinação do domínio de uma função**

Determine o domínio e represente graficamente cada uma das funções:

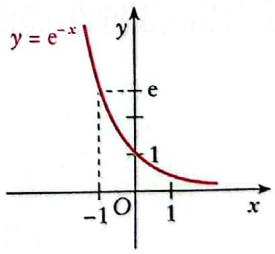
$y_1 = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ e $y_2 = \ln(x^2 - 3)$.

Resolução

- $y_1 = \left(\frac{1}{e}\right)^x \iff y_1 = e^{-x}$

  $D = \mathbb{R}$

Representação gráfica:



- $y_2 = \ln(x^2 - 3)$

  $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 > 0\}$

  Decompondo em factores $x^2 - 3$, vem:

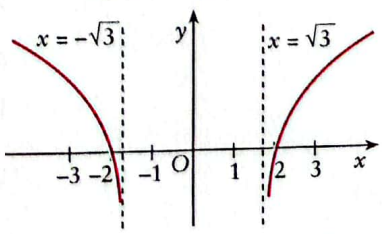
  $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ o

  $x^2 - 3 > 0 \iff x < -\sqrt{3} \ \vee \ x > \sqrt{3}$.

  Logo,

  $D = \left]-\infty \ , -\sqrt{3}\right[\ \cup \ \left]\sqrt{3} \ , +\infty\right[$

Representação gráfica:



3 Represente graficamente e determine o domínio de cada uma das seguintes funções.

3.1 $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.2 $y_2 = \ln x$

3.3 $y_3 = \log(2 - x^2)$

3.4 $y_4 = \ln(x^3)$

Digitalizada com CamScanner

1.4 Propriedades operatórias dos logaritmos

As propriedades dos logaritmos estão relacionadas com as propriedades das potências.

Considere que x e y são dois números positivos quaisquer e que a é um número positivo diferente de 1.

Logaritmo do produto

$$\log_2(8) = 3 \; ; \; \log_2(4) = 2 \; ; \; \log_2(8 \times 4) = 5 = \log_2(8) + \log_2(4)$$

O logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos factores.

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Demonstração

Pela definição de logaritmo, tem-se:

$x = a^{\log_a(x)} \; ; \; y = a^{\log_a(y)}$ Definição de logaritmo de um número.

Calculando xy, vem:

$xy = a^{\log_a(x)} \times a^{\log_a(y)}$ $a^b \times a^c = a^{b+c}$

$xy = a^{\log_a(x) + \log_a(y)}$

Pela definição de logaritmo vem:

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, c. q. m. Definição de logaritmo de um número.

Assim, por exemplo,

$$\log_3(27 \times 9) = \log_3(27) + \log_3(9) = 3 + 2 = 5 \; .$$

Logaritmo de um quociente

Repare que: $\log_2(8) = 3 \; ; \; \log_2(4) = 2 \; ; \; \log_2(8 : 4) = 1 = \log_2(8) - \log_2(4)$

O logaritmo do quociente é igual à diferença entre os logaritmos dos termos.

$$\log_a(x : y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

Demonstração

$x = a^{\log_a(x)} \; ; \; y = a^{\log_a(y)}$ Definição de logaritmo de um número.

$x : y = a^{\log_a(x)} : a^{\log_a(y)}$

$x : y = a^{\log_a(x) - \log_a(y)}$ $a^b : a^c = a^{b-c}$

$\log(x : y) = \log_a(x) - \log_a(y)$, c. q. m. Definição de logaritmo de um número.

Assim, por exemplo,

$$\log_2(16 : 2) = \log_2(16) - \log_2(2) = 4 - 1 = 3 \; .$$

Digitalizada com CamScanner

Logaritmo de uma potência

Repare que: $\log_2 (8) = 3$; $\log_2 (8^2) = 6$; $\log_2 (8^2) = 2 \log_2 8 = 2 \times 3 = 6$

O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base.

$$\log_a (x^p) = p \log_a (x)$$

Demonstração

$x = a^{\log_a (x)}$

$x^p = \left(a^{\log_a (x)}\right)^p$

$x^p = a^{p \log_a (x)}$

Aplicando logaritmos vem:

$\log_a (x^p) = p \log_a (x)$, c. q. m.

Assim, por exemplo:

$$\log_2 (8^5) = 5 \log_2 (8) = 5 \times 3 = 15 .$$

Mudança de base

Repare que é possível calcular, por exemplo, $\log_3 5$, usando logaritmos na base **e** .

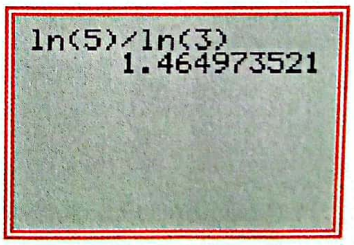
Seja:

$y = \log_3 5 \iff 3^y = 5$

$\iff \ln 3^y = \ln 5$

$\iff y \ln 3 = \ln 5$

$\iff y = \dfrac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1{,}46$



De um modo geral, tem-se:

$\log_a (x) = y \iff a^y = x$

$\iff \log_b (a^y) = \log_b (x)$

$\iff y \log_b (a) = \log_b (x)$

$\iff \log_a (x) \times \log_b (a) = \log_b (x)$ $\qquad y = \log_a (x)$

ou

$$\log_a (x) = \frac{\log_b (x)}{\log_b (a)}$$

Digitalizada com CamScanner

4

4.1 Calcule sem calculadora.

a) $\log_2(64 \times 16)$

b) $\log_3(81 \times 27)$

c) $\log_2(64 : 16)$

d) $\log_3(81 : 27)$

e) $\log_2(32)^8$

f) $\log_3\left(\frac{\sqrt[4]{27}}{81^8}\right)$

4.2 Mostre que:

a) $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$;

b) $\log\left(\sqrt{\frac{a}{\sqrt[5]{b^3}}}\right) = \frac{1}{2}\log(a) - \frac{3}{10}\log(b)$.

4.3 Escreva, usando o símbolo **ln** apenas uma vez.

a) $\ln(x^2) + \ln(x) - \ln\left(\sqrt{x}\right)$

b) $2\ln(a^2) - 3\ln(b)$

Exemplo 4 Usar as propriedades dos logaritmos

Use apenas uma vez o símbolo ln para escrever a expressão:

4.1 $\ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x)$;

4.2 $\ln(x^6) - \ln(y^2) + 2\ln(x)$.

Resolução

4.1 $\ln(3) + \ln(x^2) + \ln(x) =$

$= \ln(3 \times x^2 \times x) =$

$= \ln(3x^3)$

4.2 $\ln(x^6) - \ln(y^2) + 2\ln(x) =$

$= \ln\left(\frac{x^6}{y^2}\right) + 2\ln(x) =$

$= \ln\left(\frac{x^6}{y^2}\right) + \ln(x^2) =$

$= \ln\left(\frac{x^6}{y^2} \times x^2\right) =$

$= \ln\left(\frac{x^8}{y^2}\right)$

1.5 Equações logarítmicas

Algumas equações envolvendo logaritmos podem ser resolvidas através de uma equação exponencial equivalente e algumas equações com a incógnita em expoente podem ser resolvidas usando logaritmos.

Tal equivalência é possível atendendo a que:

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x$$
$$a^x = y \iff x = \log_a(y)$$

Na resolução de uma equação logarítmica é necessário atender ao domínio da expressão.

Se assim não for, podemos apresentar como solução um valor ou valores que nem sequer dão sentido à expressão.

Para a função $y = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, tem-se em consideração que o seu domínio é $\mathbb{R}^+$.

Quanto à função $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, tem-se em consideração que o seu domínio é $\mathbb{R}$.

Digitalizada com CamScanner

Também é importante atender a que as funções logarítmicas e as exponenciais são injectivas.

Para $a > 0$ e $a \neq 1$,

$$a^x = a^y \iff x = y$$
$$\log_a(x_1) = \log_a(x_2) \iff x_1 = x_2$$

Exemplo 5 Resolução de equações

Resolva, por processos analíticos, cada uma das seguintes equações.

5.1 $\log(x^2) = \log(2x)$ **5.2** $4e^{2x} + 3 = 403$

Resolução

5.1 $\log(x^2) = \log(2x)$

- Domínio da equação:
  $x^2 > 0 \wedge 2x > 0 \iff x > 0$
  $D =]0, +\infty[$
- $\log(x^2) = \log(2x) \iff$
  $\iff x^2 = 2x \wedge x \in D$
  $\iff x^2 - 2x = 0 \wedge x \in D$
  $\iff x(x-2) = 0 \wedge x \in D$
  $\iff (x = 0 \vee x = 2) \wedge x \in D$
  $\iff x = 2$ $0 \notin D$

$S = \{2\}$

5.2 $4e^{2x} + 3 = 403$

Esta equação tem a incógnita em expoente. O domínio da condição é $\mathbb{R}$.

$4e^{2x} + 3 = 403 \iff 4e^{2x} = 400$
$\iff e^{2x} = 100$ $a^x = y \iff x = \log_a y$
$\iff 2x = \ln(100)$
$\iff 2x = \ln 10^2$
$\iff 2x = 2 \ln 10$
$\iff x = \ln 10$

A solução da equação é $\ln 10$. $S = \{\ln 10\}$.

Um valor aproximado para a solução pode ser encontrado com a ajuda da calculadora.

$\ln 10 \approx 2{,}3$

5

Resolva, em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos, cada uma das seguintes equações.

5.1 $\log_3(x) = 5$

5.2 $\log_x(3) = 2$

5.3 $2^x = 80$

5.4 $\log(3x^2) = \log(x^3)$

5.5 $3^{2x-1} = \sqrt{3}$

5.6 $x = \log_{36} 6$

5.7 $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 8$

5.8 $\log_x \sqrt{5} = -\frac{1}{2}$

5.9 $x \log(1{,}25) + 3x \log(20) = 1$

Digitalizada com CamScanner

Há ainda equações que, para serem resolvidas por processos analíticos, conduzem à aplicação das propriedades estudadas, quer dos logaritmos quer das potências.

Exemplo 6 **Equações logarítmicas e exponenciais**

Resolva cada uma das seguintes equações.

6.1 $\log(x-3)+\log x^2=\log|2x|$ **6.2** $2e^x+e^{-x}-3=0$

Resolução

6.1 $\log(x-3)+\log x^2=\log|2x|$

- Domínio da condição:

$D=\{x\in\mathbb{R}: x-3>0 \wedge x^2>0 \wedge |2x|>0\}$

$x-3>0 \wedge x^2>0 \wedge |2x|>0 \Leftrightarrow x>3 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\,]3\,,\,+\infty[$

$D=\,]3\,,\,+\infty[$

- $\log(x-3)+\log x^2=\log|2x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log\left[(x-3)\times x^2\right]=\log(2x) \wedge x\in D \Leftrightarrow$) como $x>3$, $|2x|=2x$.

$\Leftrightarrow (x-3)x^2=2x \wedge x\in D \Leftrightarrow x^3-3x^2-2x=0 \wedge x\in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x^2-3x-2)=0 \wedge x\in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=0 \vee x=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2}\right) \wedge x\in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=0 \vee x=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \wedge x\in D$

Como $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ e 0 não pertencem ao domínio, vem:

$S=\left\{\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

6.2 $2e^x+e^{-x}-3=0$. O domínio da equação é $\mathbb{R}$.

Seja $e^x=t$; $e^{-x}=\frac{1}{t}$.

Substituindo na equação, vem:

$2t+\frac{1}{t}-3=0 \Leftrightarrow 2t^2+1-3t=0 \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow t=1 \vee t=\frac{1}{2}$

Substituindo de novo a variável, vem:

$e^x=1 \vee e^x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=0 \vee x=\ln\frac{1}{2}$

Logo, $S=\left\{0\,,\,\ln\frac{1}{2}\right\}$.

6

6.1 Resolva, em $\mathbb{R}$ e por processos analíticos, cada uma das seguintes equações.

a) $3-\ln e^{3x}=0$

b) $\frac{1}{e^x}-3e^x+2=0$

c) $e^{2x}-3e^x+2=0$

6.2 Considere a função:

$f(x)=e^{3+2\ln x}-(x-3)e^3$.

a) Determine o domínio da função.

b) Determine os zeros da função.

Digitalizada com CamScanner

1.6 Inequações logarítmicas

Exemplo 7 Resolução de inequações

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações.

7.1 $\ln(x+1) + \ln(x-3) \geqslant \ln x - \ln 2$

7.2 $\log_2\left[\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 1) < 0\right]$

Resolução

7.1 $\ln(x+1) + \ln(x-3) \geqslant \ln x - \ln 2$

Determinação do domínio:

$D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge x-3 > 0 \wedge x > 0\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x > 3 \wedge x > 0\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$

Aplicando as propriedades dos logaritmos, vem:

$\ln(x+1) + \ln(x-3) \geqslant \ln x - \ln 2 \iff$

$\iff \ln[(x+1)(x-3)] \geqslant \ln\left(\frac{x}{2}\right) \iff$

$\iff (x+1)(x-3) \geqslant \frac{x}{2} \iff$ $\quad \ln x = \ln_e x$, $e > 1$

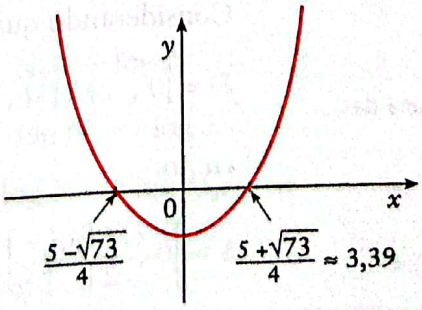
$\iff x^2 - 3x + x - 3 \geqslant \frac{x}{2} \iff$

$\iff 2x^2 - 6x + 2x - 6 \geqslant x \iff$

$\iff 2x^2 - 5x - 6 \geqslant 0$ $\quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25+48}}{4}$

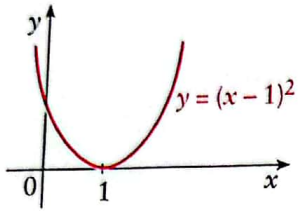
Como $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$, então $\quad x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{4}$

$S = \left[\frac{5+\sqrt{73}}{4}, +\infty\right[$. $\quad x = \frac{5-\sqrt{73}}{4} \vee x = \frac{5+\sqrt{73}}{4}$



Digitalizada com CamScanner

7.2 $\log_2\left[\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+1)<0\right]$



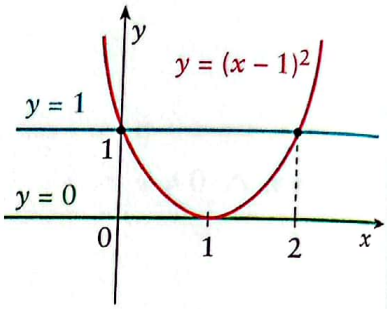
Determinação do domínio

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-2x+1>0\ \wedge\ \log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+1)>0\right\}$$

$x^2-2x+1>0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)^2>0$

$\Leftrightarrow\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$



$\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+1)>0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 0<x^2-2x+1<1$

$\Leftrightarrow\ 0<(x-1)^2<1$

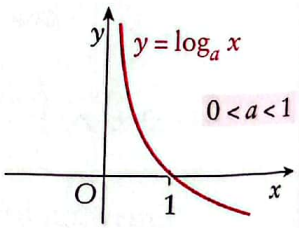
$D=]0,\ 2[\setminus\{1\}$

Aplicando as propriedades dos logaritmos, vem:

$\log_2\left[\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+1)\right]<0\ \Leftrightarrow$

$0=\log_2 1$

$\Leftrightarrow\ \log_2\left[\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+1)\right]<\log_2 1$



$\Leftrightarrow\ \log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+1)<1$

$\Leftrightarrow\ \log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+1)<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}$

$1=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\ x^2-2x+1>\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\ 4x^2-8x+4>1$

$x=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{8}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 4x^2-8x+3>0$

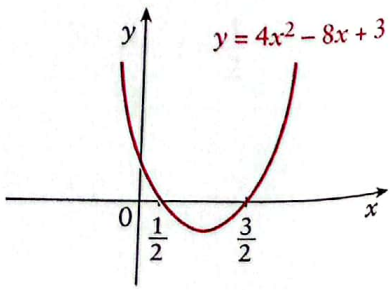
$\Leftrightarrow\ x=\frac{8\pm4}{8}\ \Leftrightarrow\ x=\frac{3}{2}\ \vee\ x=\frac{1}{2}$

Considerando que

$D=]0,\ 2[\setminus\{1\}$,

então,

$S=\left]0,\ \frac{1}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{3}{2},\ 2\right[$.



7 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações.

7.1 $\ln(x-2)+\ln(x+1)\geqslant\ln(x+2)-\ln 3$

7.2 $\log\left[\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x+1)<0\right]$

Digitalizada com CamScanner

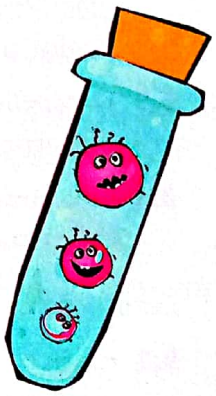
1.7 Resolução de problemas da vida real utilizando logaritmos

Exemplo 8 **Cultura de bacilos**

O número de bacilos, N, existente numa determinada cultura, no instante t, é dado por:

$$N = N_0\, 2^{\frac{t}{k}}, \text{ onde } N_0 \text{ e } k \text{ são constantes,}$$

t em horas e N em milhões de unidades.



8.1 Interprete o significado das constantes N_0 e k.

8.2 Qual a função que exprime o número de horas que esta função leva a passar de N_0 para N?

Resolução

8.1 Se $t = 0$,

$N = N_0 \times 2^{\frac{0}{k}} \iff N = N_0 \times 2^0 \iff$

$\iff N = N_0$.

Portanto:

- N_0 é o número de bacilos existentes quando $t = 0$, ou seja, no instante em que o estudo do número de bacilos se inicia;
- k é uma constante positiva característica de cada cultura.

8.2 $N = N_0\, 2^{\frac{t}{k}} \iff$

$\iff \log N = \log N_0 + \frac{t}{k} \log 2$

$\iff k \log N = k \log N_0 + t \log 2$

$\iff t \log 2 = k \log N - k \log N_0$

$\iff t = \frac{k\,(\log N - \log N_0)}{\log 2}$

8

8.1 Segundo Richter (*Sismologia Elementar*, 1958), a magnitude M de um tremor de terra, que ocorra a 100 km de certo sismógrafo, é dada por $M = \log_{10} A + 3$, onde A é a amplitude máxima em mm do registo feito pelo aparelho.

a) Qual é o significado da constante 3?

b) Certo tremor de terra de magnitude M_1 produz um registo de amplitude A_1. Exprima, em função de M_1, a magnitude M de outro sismo cujo registo tem de amplitude $100\, A_1$ nas mesmas condições.

8.2 O pH de uma solução salina é definida pela fórmula $pH = -\log [H^+]$, onde $[H^+]$ é a concentração, em moles por litro, do ião de hidrogénio.

a) Qual o pH da água pura, sabendo-se que a sua concentração de $[H^+]$ é igual a $1{,}00 \times 10^{-7}$?

b) Uma solução é dita **ácida** se a sua concentração de $[H^+]$ é menor que a da água e dita **básica** (alcalina) se a sua concentração de $[H^+]$ é maior do que a água. Quais os valores de pH que caracterizam as soluções ácidas? E as básicas?

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 9 A planta no lago

No centro de um lago circular de 10 m de raio, observou-se uma área circular coberta por uma espécie de plantas.
Os biólogos estimam que a área A, em m^2, coberta pelas plantas t meses após a primeira observação, é dada por: $A(t) = 2{,}3\,e^{0{,}4t}$.
(Se necessário, use uma casa decimal nas suas respostas.)

9.1 Determine A para $t = 0$.
Interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

9.2 Verifique que, para qualquer valor de t, $\dfrac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante.
Determine um valor aproximado dessa constante e interprete esse valor no contexto da situação descrita.

9.3 Determine x tal que: $A(t+x) = 3\,A(t)$.
Interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

9.4 Determine o valor numérico de t de modo que todo o lago esteja coberto com as referidas plantas.

Resolução

9.1 $t = 0$

$A(0) = 2{,}3e^0 = 2{,}3$

Interpretação: No início da observação $(t = 0)$ o círculo das plantas tinha $2{,}3\ m^2$ de área.

9.2 $\dfrac{A(t+1)}{A(t)} = \dfrac{2{,}3\,e^{0{,}4(t+1)}}{2{,}3\,e^{0{,}4t}} = e^{0{,}4(t+1)-0{,}4t} = e^{0{,}4} \approx 1{,}5$

$\dfrac{A(t+1)}{A(t)} = 1{,}5 \iff A(t+1) = 1{,}5 \times A(t) \iff$

$\iff A(t+1) = A(t) + 0{,}5\,A(t)$

Interpretação: A área ocupada pelas plantas aumenta 50% em cada mês.

9.3 $A(t+x) = 3\,A(t) \iff 2{,}3\,e^{0{,}4(t+x)} = 3 \times 2{,}3\,e^{0{,}4t} \iff$

$\iff e^{0{,}4t} \times e^{0{,}4x} = 3 \times e^{0{,}4t} \iff e^{0{,}4x} = 3 \iff$

$\iff 0{,}4\,x = \ln 3 \iff x = \dfrac{\ln 3}{0{,}4} \approx 2{,}7$

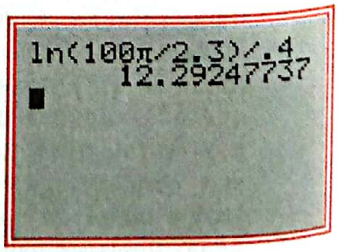
Interpretação: A área ocupada pelas plantas triplica em cada 2,7 meses.

9.4 A área do lago é $\pi \times 10^2\ m^2$.
Então:

$A(t) = 100\pi \iff 2{,}3\,e^{0{,}4t} = 100\pi \iff$

$\iff e^{0{,}4t} = \dfrac{100\pi}{2{,}3} \iff 0{,}4\,t = \ln \dfrac{100\pi}{2{,}3} \iff$

$\iff t \approx 12{,}3$



Logo, 12,3 meses após o início da observação, o lago estará completamente coberto com as plantas.

9

Um barco teve uma avaria no mar e começou a derramar crude. O barco ficou ancorado até que 10 horas depois da avaria foi reparado.

Admita que a mancha de crude é circular e a área A, em km^2, t horas depois do início do derrame, é dada por:

$A(t) = 10\,e^{0{,}2t}$, $t \in [0\ ,\ 10]$.

Responda às questões seguintes com duas casas decimais.

9.1 Qual era o raio da mancha quando se iniciou a observação?

9.2 Verifique que $\dfrac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante para qualquer valor de t.
Interprete o valor obtido no contexto do problema.

9.3 O barco esteve ancorado a 2 km da praia. Será que o crude chegou à praia antes do barco estar reparado? Justifique a sua resposta.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 10 A tomada do antibiótico

Após a tomada de um antibiótico inicia-se o declínio da substância activa M segundo uma lei idêntica à desintegração radioactiva.

Considere que para um certo antibiótico a quantidade da substância activa M não eliminada ao fim de t horas é dada por:

$$M = M_0\, e^{-kt}$$

em que k é uma constante positiva.

10.1 Qual é o significado de M_0 ?

10.2 Considerando $M_0 = 1000$ mg e sabendo que a quantidade activa do medicamento se reduz a metade ao fim de uma hora, determine o valor de k .

10.3 Qual é, para o medicamento referido em **10.2** , a quantidade de substância activa que ainda não foi eliminada ao fim de 12 horas?

Resolução

10.1 $M = M_0\, e^{-kt}$

Para $t = 0$, vem $M = M_0$.

M_0 representa a quantidade activa no momento da tomada do medicamento.

10.2 $M(t) = 1000\, e^{-kt}$

$$M(1) = \frac{1}{2} \times 1000$$

$$\Leftrightarrow 1000\, e^{-k \times 1} = 500$$

$$\Leftrightarrow e^{-k} = \frac{500}{1000}$$

$$\Leftrightarrow -k = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -k = \ln 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow -k = -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow k = \ln 2$$

10.3 $M(t) = 1000\, e^{(-\ln 2)\, t}$

$M(12) = 1000 \times e^{(-\ln 2) \times 12} \approx 0{,}244$

Ao fim de 12 horas, a quantidade activa do medicamento que ainda não tinha sido eliminada era de 0,244 mg .

10

Considere que um medicamento é eliminado segundo a lei:

$M = M_0\, e^{-0{,}5t}$, $0 \leqslant t \leqslant 8$.

10.1 Determine t de modo que a substância activa M se reduza a metade.

10.2 Para $M_0 = 1000$ mg , represente graficamente M .

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 11 A população de coelhos

Admita que numa dada população de coelhos numa zona protegida, é dada por:

$$p(t) = 1{,}3 + \frac{2{,}5}{1 + 3{,}8\, e^{-0{,}2t}},$$

onde p é em milhares de coelhos e t em anos.

O instante $t = 0$ corresponde a Janeiro de 2004.

11.1 De acordo com este modelo, estime o número de coelhos no início de 2010.

11.2 Sem recorrer à calculadora (a não ser para efectuar cálculos numéricos), determine em que ano a população será de 3300 coelhos.

Resolução

11.1 $2010 - 2004 = 6$

$$p(6) = 1{,}3 + \frac{2{,}5}{1 + 3{,}8\, e^{-0{,}2 \times 6}}$$

$$p(6) \approx 2{,}465\,75$$

No início de 2010, o número de coelhos será aproximadamente de 2466.

11.2

$$p(t) = 3{,}3 \iff 1{,}3 + \frac{2{,}5}{1 + 3{,}8\, e^{-0{,}2t}} = 3{,}3$$

$$\iff 2 + 7{,}6\, e^{-0{,}2t} = 2{,}5$$

$$\iff 7{,}6\, e^{-0{,}2t} = 0{,}5$$

$$\iff e^{-0{,}2t} = \frac{0{,}5}{7{,}6}$$

$$\iff -0{,}2t = \ln\frac{0{,}5}{7{,}6}$$

$$\iff t = \frac{\ln\frac{0{,}5}{7{,}6}}{-0{,}2} \approx 13{,}606$$

$2004 + 13 = 2017$

Logo, durante o ano 2017 a população será aproximadamente de 3300 coelhos.

11

Num certo dia surgiu uma notícia que teve como base uma observação de um fenómeno por um certo número de pessoas.

Admita que, t horas depois da observação do fenómeno, o número, em milhares, de pessoas que tinham conhecimento do facto era, aproximadamente:

$$p(t) = \frac{100}{1 + 9\, e^{-0{,}2t}},\ t \geqslant 0.$$

11.1 Quantas pessoas observaram o fenómeno?

11.2 Calcule $p(10)$ e interprete o resultado.

11.3 Sem recorrer à calculadora (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva a equação $p(t) = 60$.

Interprete a solução encontrada.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 12 Intensidade sonora

Para medir o nível de intensidade sonora cuja unidade de medida é o decibel, dB, utiliza-se uma fórmula onde se aplicam logaritmos.

O nível N de intensidade de um som depende da sua intensidade I, medida em watt por metro quadrado (W/m^2), de acordo com a fórmula:

$$N = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right),\ I > 0,$$

onde I_0 representa a intensidade do limiar de audibilidade.

a) Complete a tabela seguinte.

	I (W/m²)	N (dB)
Limiar de audibilidade	10^{-12}	
Diálogo		30

b) Considerando a intensidade de referência I_0 correspondente ao limiar de audibilidade, mostre que:

$$N = 120 + 10 \log I$$

c) Um som com intensidade superior a 100 dB pode prejudicar o tímpano. Determine, em W/m^2, a intensidade a partir da qual não se deve expor ao som sem protecção.

d) Mostre que quando a intensidade do som duplica o número da intensidade sofre um acréscimo aproximado de 3 dB.

Resolução

a) $N = 10 \times \log\left(\frac{10^{-12}}{10^{-12}}\right) = 10 \times \log 1 = 0$

$$10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 30 \iff \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 3 \iff 10^3 = \frac{I}{10^{-12}} \iff I = 10^{-9}$$

10^{-12}	0
10^{-9}	30

b) $N = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \iff N = 10(\log I - \log 10^{-12}) \iff$

$\iff N = 10(\log I + 12\log 10) \iff$

$\iff N = 10\log I + 120 \iff N = 120 + 10\log I$ (c. q. m.)

c) $100 = 120 + 10\log I \iff -20 = 10\log I \iff -2 = \log I \iff I = 10^{-2}$

A partir de uma intensidade de som de 10^{-2} W/m² não devemos expor o ouvido ao som sem protecção.

d) $N = 120 + 10\log(2I) \iff N = 120 + 10(\log 2 + \log I) \iff$

$\iff N = 120 + 10\log 2 + 10\log I$, donde $10 \times \log 2 \approx 3$

$N \approx 120 + 10\log I + 3$ (c. q. m.)

12

Para obter cloreto de sódio (sal de cozinha), colocou-se num recipiente uma certa quantidade de água, Q, do mar e expôs-se a uma fonte de calor.

Após t horas do início da experiência, a quantidade de água, em litros, existente no recipiente é dada pela fórmula:

$$Q(t) = 10 \times \log\left(\frac{10}{t+1}\right)$$

12.1 Qual a quantidade de água que foi utilizada na experiência?

12.2 Qual a quantidade de água existente no recipiente quatro horas após o início da experiência?

12.3 Mostre que a quantidade de água, G, em litros, que passou ao estado gasoso, t horas após o início da experiência, é dada por:

$$G(t) = 10 \log(t+1)$$

12.4 Quantas horas têm de decorrer até obtermos o sal de cozinha?

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Consideremos as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 2^{x+1} \quad \text{e} \quad g(x) = 2^{-x+1}.$$

Qual é o conjunto-solução da inequação:

$$f(x) - g(x) > 0\ ?$$

(A) $\mathbb{R}$ **(B)** $\mathbb{R}^+$ **(C)** $\mathbb{R}^-$ **(D)** $\mathbb{R}_0^+$

10 pontos

2 Admita que a quantidade Q, em mg, de uma substância que não é absorvida pela toma de um comprimido do medicamento X, t horas após a tomada, é dada por:

$$Q(t) = 500^{1-0,2t}$$

A quantidade de substância Q de cada comprimido é:

(A) 5 mg ; **(B)** 10 mg ;

(C) 150 mg ; **(D)** 500 mg .

10 pontos

3 $\log_a(ax^2) - \log_a x$ é igual a:

(A) $a \log_a x$; **(B)** $1 + \log_a x$;

(C) $\log_a x^3$; **(D)** $2 \log_a x$.

10 pontos

4 Um medicamento elimina-se segundo a lei $M = M_0\, e^{-0,5t}$, sendo M a quantidade activa do medicamento no organismo t horas após a sua administração.

A quantidade de substância activa ingerida reduz-se a metade para t igual a:

(A) $\frac{\ln 2}{0,5}$; **(B)** $0,5 \ln 2$;

(C) $\frac{\ln 2}{0,25}$; **(D)** $\frac{\ln 2}{-0,5}$.

10 pontos

5 Seja f uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = b^{5+\log_b 2}, \quad b > 1$$

Pode afirmar-se que:

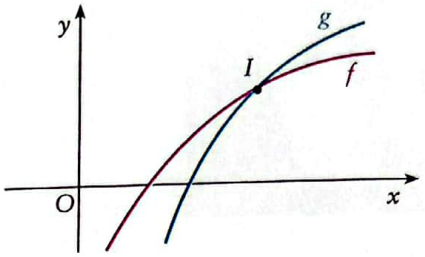
(A) $f(x) = 2\, b^5$; **(B)** $f(x) = 5 + \log_b 2$;

(C) $f(x) = \log_b 2^5$; **(D)** $f(x) = \log_b 10$.

10 pontos

6 Na figura estão representadas graficamente duas funções f e g, definidas em $\mathbb{R}^+$ por:

$$f(x) = \log_2(x) \quad \text{e} \quad g(x) = -5 + \log_2(x^2).$$



Os gráficos de f e de g intersectam-se no ponto I.

As coordenadas de I são:

(A) (8 , 32) ; **(B)** (32 , 5) ;

(C) (32 , 8) ; **(D)** (5 , 32) .

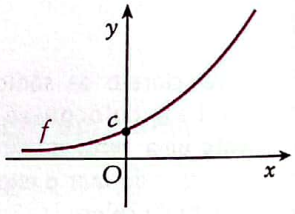
10 pontos

7 Na figura está representada graficamente a função f, definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = e^{x+2b}$$

O gráfico da função intersecta o eixo Oy num ponto $(0 , c)$.

Indique o valor de b .



(A) $\frac{\ln c}{3}$ **(B)** $\frac{\ln c}{2}$

(C) $\frac{\ln c}{b}$ **(D)** $\frac{\ln b}{c}$

10 pontos

8 Considere a função g definida por $g(x) = e^{x-3}$.

Indique qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico da função g .

(A) (2 ; 0,3) **(B)** (5 ; 7,4)

(C) (ln 2 , 1) **(D)** $\left(\ln 3 , \frac{3}{e^3}\right)$

10 pontos

9 $\ln(5e) + \ln e^3$ é igual a:

(A) $3 \ln 5$; **(B)** $\ln 9$;

(C) $3 + \ln 5$; **(D)** $4 + \ln 5$.

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

10 Admita que um determinado tipo de plantas se desenvolve de acordo com a lei:

$$N(t) = N_0 \, e^{0,02\,t}$$

sendo N o número de plantas t dias após a contagem inicial.

10.1 Determine o número de plantas existente no início da contagem, sabendo que 20 dias depois existiam 3000 plantas.

10.2 Determine x tal que para, qualquer t,

$$N(t + x) = 2N(t)$$

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

20 pontos

11 Um grupo de 40 cabritos é colocado numa ilha onde até então não existia qualquer cabrito.

Admita que a população de cabritos, na ilha, cresce de acordo com a seguinte lei:

$$N(t) = \frac{200}{1 + 4e^{-0,12t}}$$

onde N é o número de cabritos existentes t anos após a chegada dos 40 cabritos à ilha.

11.1 Quantos cabritos haverá na ilha 5 anos depois da sua chegada à ilha?

11.2 Quantos anos terão de decorrer até que na ilha o número de cabritos seja igual a 100 ?

11.3 Parece-lhe haver alguma hipótese de se ter na ilha um número de cabritos superior a 200 ? Explique porquê.

30 pontos

12 Admita que a altura h, em metros, de uma espécie de plantas é dada em função do tempo t, em meses, por:

$$h(t) = 0,32 + 0,89 \ln(t)$$

(ln designa logaritmo de base **e**)

Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, responda às seguintes questões.

(Apresente os resultados com duas casas decimais.)

12.1 Uma planta tem 50 cm de altura. Quantos meses tem a planta?

12.2 Mostre que para qualquer valor de t, $h(3t) - h(t)$ é constante.

Determine o valor dessa constante e interprete esse valor no contexto da situação apresentada.

30 pontos

13 A lei de arrefecimento de Newton estabelece que a razão a que um objecto arrefece é proporcional à diferença entre a temperatura a que se encontra o objecto e o meio que o rodeia.
A temperatura T de um objecto t horas depois é dada por:

$$T = T_m + (T_0 - T_m) \, e^{-kt}$$

onde T_m é a temperatura ambiente e T_0 a temperatura a que se encontra o objecto para $t = 0$.

No restaurante do António, a temperatura da adega é de 70 °F e a temperatura do frigorífico é de 37 °F.

Uma garrafa de vinho é colocada no frigorífico para ser servida ao jantar.

Passada uma hora, a temperatura do vinho era de 62 °F.

13.1 Determine a constante k para o tipo de vinho em questão.

13.2 Quanto tempo é necessário para arrefecer uma garrafa de vinho, do mesmo tipo, de 70 °F para 40 °F ?

30 pontos

Digitalizada com CamScanner

Um olhar sobre a História

Um dos mais proeminentes vultos da história da Matemática do século XVII foi o francês René Descartes, a quem fica ligada a criação da Geometria Analítica.

Oriundo de uma família burguesa, Descartes frequentou o colégio jesuíta de La Flèche e mais tarde licenciou-se em Direito na Universidade de Poitiers em França.

Durante cerca de cinco anos, a partir de 1617, o jovem Descartes participou em várias campanhas militares na Holanda, na Baviera e esteve, ainda, no exército francês, no cerco de La Rochelle.

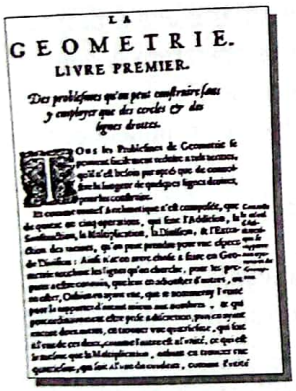
É a partir de 1622, então com 26 anos, que Descartes se deixa atrair pela actividade de matemático e filósofo.

Viaja pela Europa, intensifica contactos com cientistas em vários países com quem discute a filosofia aristotélica e, finalmente, decide fixar-se na Holanda onde vem a desenvolver trabalho científico que o tornaria famoso.

Depois de em 1633 ter apresentado uma teoria sobre o movimento dos planetas, Descartes publicou em 1637 a sua célebre obra *O discurso do método para bem conduzir o raciocínio e pesquisar a verdade científica*, onde estabelecia o seu pensamento programático de pesquisa científica com o qual, através da dúvida sistemática, procurava atingir ideias firmes, claras e bem definidas, a partir das quais seria possível encontrar novas conclusões.

A sua influência nos meios matemático e científico foi enorme e duradoira.

No campo da Matemática, Descartes publicou a obra *A Geometria*, apresentada não como um trabalho isolado, mas antes como um dos três apêndices do *Discurso do Método*.


LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.
Des problêmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

A Geometria, da obra *Discurso do Método*

Nesta obra, que marca a origem da geometria analítica, Descartes combinava a geometria e a álgebra de modo a formarem um conhecimento superior a qualquer outro que até então era conhecido. A ideia de Descartes era a de usar a geometria e a álgebra combinadas, tornando possível interpretar geometricamente resultados algébricos, o que facilitou novas descobertas. Os métodos da geometria analítica – também designada por geometria cartesiana – podem ser usados para provar alguns dos teoremas da geometria plana.

A geometria analítica criada por Descartes constituiu um marco decisivo na enorme evolução científica que ocorreu no século XVII, tornando-o uma referência decisiva nas gerações posteriores de cientistas e filósofos. A genialidade deste eminente matemático foi reconhecida pelo Estado francês que o elegeu como herói nacional e o trasladou, em 1667, da Suécia, onde faleceu em 1650, para Paris.

René Descartes
(1596-1650)

Digitalizada com CamScanner

5 Geometria analítica no plano

1 Vectores no plano. Operações com vectores

2 Rectas no plano. Circunferência, elipse e hipérbole

3 Produto escalar de dois vectores no plano

Material:
Lápis, papel e calculadora

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Aplicar vectores na resolução de problemas.
2. Escrever as coordenadas e componentes de um vector no plano.
3. Determinar a soma de um ponto com um vector e a soma de dois vectores.
4. Determinar o produto de um número real por um vector.
5. Escrever um vector como a diferença de dois pontos.
6. Determinar a norma de um vector no plano.
7. Determinar um vector colinear com outro.
8. Resolver problemas envolvendo os conceitos de norma e de colinearidade entre vectores.

1. Vectores no plano. Operações com vectores

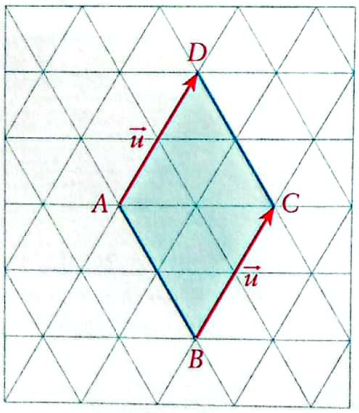
Barcos à vela

Os barcos à vela movem-se com a força do vento. As forças também se representam por vectores.

1.1 Vector ou vector livre

Segmento orientado

Um segmento orientado é caracterizado por uma direcção, um sentido, um comprimento e uma origem (ou ponto de aplicação).



$\vec{u} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Na figura ao lado, $[ABCD]$ é um losango.

$[A\ ,\ D]$ e $[B\ ,\ C]$ são dois segmentos orientados distintos, mas têm algo em comum: o comprimento, a direcção e o sentido.

Diz-se que estes dois segmentos orientados são **equipolentes**, ou seja, representam o mesmo vector, e escreve-se:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (lê-se *o vector AD é igual ao vector BC*)

ou

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\ .$$

Na prática, identifica-se muitas vezes um vector com segmentos orientados que o representam.

Vector

Um vector (ou vector livre) é um ente matemático caracterizado por:

- **uma direcção;**
- **um sentido;**
- **um comprimento.**

Digitalizada com CamScanner

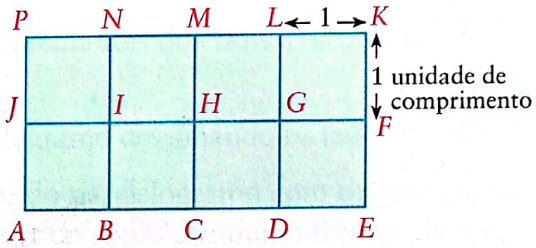
1.2 Norma de um vector. Vector nulo. Vector simétrico de um vector. Soma de um ponto com um vector

Observação

- Repare que a norma de qualquer vector é um número real não negativo.
- Alguns autores designam $||\vec{u}||$ por módulo de vector $\vec{u}$.

Norma de um vector

Chama-se norma de um vector $\vec{u}$ e representa-se por $||\vec{u}||$ à medida do comprimento do vector $\vec{u}$ numa determinada unidade.



A figura seguinte representa um rectângulo dividido em oito quadrados geometricamente iguais.

Tem-se:

$$||\overrightarrow{MK}||=2\,,\ ||\overrightarrow{NB}||=2\,,\ ||\overrightarrow{FJ}||=4 \text{ e } ||\overrightarrow{FL}||=\sqrt{2}\,.$$

Vector nulo

O comprimento do segmento de recta $[PP]$ é zero. O vector $\overrightarrow{PP}$ tem norma igual a zero e diz-se que o vector $\overrightarrow{PP}$ é um vector nulo.

Vector nulo

Chama-se vector nulo ao vector de norma 0 e representa-se por $\vec{0}$ (zero com uma seta por cima). O vector nulo tem direcção e sentido indeterminados.

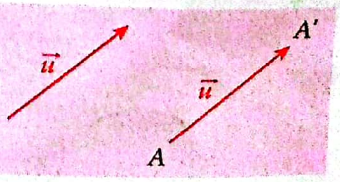
Vector simétrico

Ao vector que tem a mesma direcção, o mesmo comprimento e sentido contrário ao de $\vec{u}$ chama-se vector simétrico de $\vec{u}$ e representa-se por $-\vec{u}$.

Na figura: $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{IH}=-\overrightarrow{LM}$ e $\overrightarrow{NB}=-\overrightarrow{DL}$.

Soma de um ponto com um vector

Dados um ponto A e um vector $\vec{u}$, chama-se soma do ponto A com o vector $\vec{u}$ ao ponto A' tal que: $\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$.

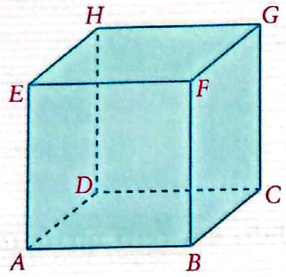


Na figura: $A+\overrightarrow{HG}=B$, $B+\overrightarrow{DL}=N$ e $I+\overrightarrow{FG}=J$.

Digitalizada com CamScanner

1

A figura representa um cubo $[ABCDEFGH]$ de volume $27\ cm^3$.



Indique:

1.1 $||\overrightarrow{AB}||$;

1.2 $||\overrightarrow{AC}||$;

1.3 $||\overrightarrow{AG}||$;

1.4 duas representações do vector simétrico do vector $\overrightarrow{BC}$;

1.5 $A + \overrightarrow{FG}$;

1.6 $E + \overrightarrow{AC}$;

1.7 $A + \overrightarrow{AB}$;

1.8 $D + \overrightarrow{CG}$;

1.9 $B + \overrightarrow{CD}$;

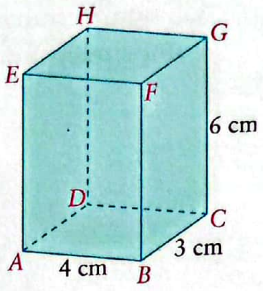
1.10 $F + \overrightarrow{HD}$;

1.11 $B + \overrightarrow{CC}$.

Exemplo 1 **Norma de um vector. Soma de um ponto com um vector**

A figura representa um paralelepípedo rectângulo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:



$\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm e $\overline{CG} = 6$ cm.

1.1 Indique:

a) $||\overrightarrow{AB}||$; b) $||\overrightarrow{AC}||$.

1.2 Indique o ponto correspondente a cada uma das seguintes somas:

a) $A + \overrightarrow{EG}$; b) $E + \overrightarrow{GG}$; c) $D + \overrightarrow{HF}$.

Resolução

1.1 a) $||\overrightarrow{AB}|| = 4$

b) $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

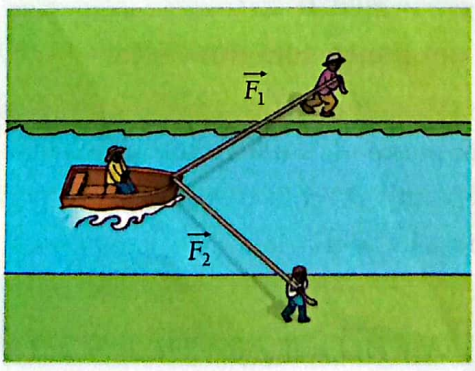
1.2 a) $A + \overrightarrow{EG} = C$

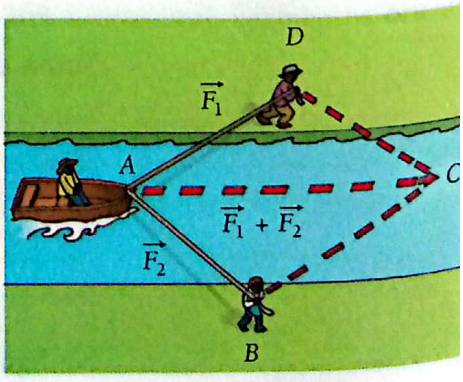
b) $E + \overrightarrow{GG} = E$

c) $D + \overrightarrow{HF} = B$

1.3 Adição e subtracção de vectores

Observe as figuras.





Digitalizada com CamScanner

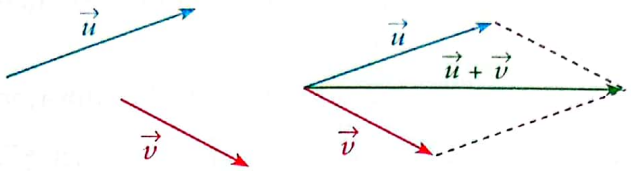
Observação

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vectores do plano.
A adição de dois vectores tem as seguintes propriedades:

1. **comutativa**
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
2. **associativa**
$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
3. **existência de elemento neutro**
$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
4. **existência de simétrico**
$\vec{u}+(-\vec{u})=-\vec{u}+\vec{u}=\vec{0}$

Regra do paralelogramo

Uma forma de obter a soma de dois vectores é a seguinte:

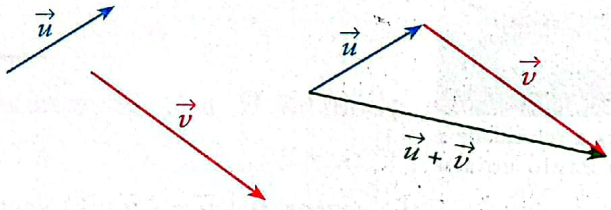


- desenhar os representantes dos dois vectores dados com uma origem em comum;
- traçar um paralelogramo desenhando os lados paralelos aos dois vectores;
- o vector diagonal do paralelogramo com origem comum aos dois vectores é um representante da soma dos dois vectores dados.

Regra do triângulo

Outra forma de obter a soma de dois vectores consiste em aplicar as fórmulas do triângulo.

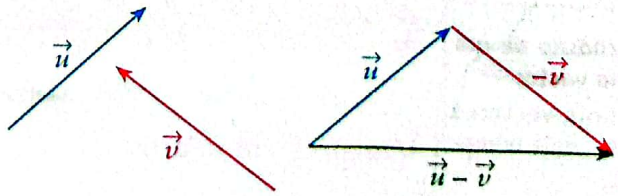
Dados dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, chama-se soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, e representa-se por $\vec{u}+\vec{v}$, ao vector que se obtém do seguinte modo:



- consideramos um representante do vector $\vec{u}$ e outro do vector $\vec{v}$ de modo que a extremidade do representante de $\vec{u}$ coincida com a origem do representante de $\vec{v}$;
- traçamos o vector cuja origem é a origem do representante de $\vec{u}$ e a extremidade é a extremidade do representante de $\vec{v}$.

O vector obtido é o vector $\vec{u}+\vec{v}$.

Subtracção de dois vectores



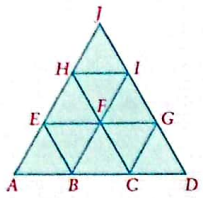
Para calcular a diferença entre os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ calcula-se a soma de $\vec{u}$ com o simétrico de $\vec{v}$.

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

Digitalizada com CamScanner

2

2.1 A figura seguinte é formada por triângulos equiláteros.



Copie e complete.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \ldots$

b) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{JI} = \ldots$

c) $\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{HC} = \ldots$

d) $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{CI} = \ldots$

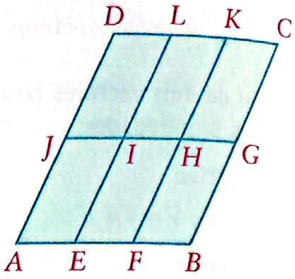
e) $\ldots + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{EC}$

f) $\overrightarrow{AH} + \ldots = \overrightarrow{AI}$

g) $\overrightarrow{AB} + \ldots = \vec{0}$

Exemplo 2 **Soma e diferença de dois vectores**

O paralelogramo $[ABCD]$ está dividido em seis paralelogramos geometricamente iguais.



Usando as letras da figura, indique:

2.1 $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GH}$; **2.2** $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{LK}$;

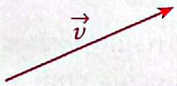
2.3 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GI}$; **2.4** $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{DL}$.

Resolução

2.1 $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AE}$ **2.2** $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AH}$

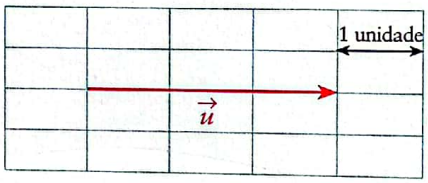
2.3 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AE}$ **2.4** $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{AI}$

O vector $\vec{v}$ representa a velocidade a que se deslocava o Paulo no seu barco.



Sabendo que, de repente, o Paulo começou a remar mais rápido e a velocidade do barco duplicou, o vector que representa a velocidade a que o barco passou a deslocar-se tem a mesma direcção e o mesmo sentido, mas o dobro do comprimento.

1.4 Multiplicação de um número real por um vector. Colinearidade de dois vectores



O vector $\vec{u} + \vec{u} = 2\vec{u}$. O vector $-2\vec{u} = -\vec{u} + (-\vec{u})$.

Dado um número real $k \neq 0$ e um vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, o produto de k por $\vec{u}$ é o vector $k\vec{u}$ que tem:

- **a direcção de $\vec{u}$;**
- **norma $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$;**
- **caso $k = 0$, $k\vec{u} = \vec{0}$;**
- **sentido** $\begin{cases} \text{de } \vec{u} & \text{se } k > 0 \\ \text{de } -\vec{u} & \text{se } k < 0 . \end{cases}$

Observação

Propriedades do produto de um número real por um vector

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vectores quaisquer e k e k' dois números reais quaisquer.

1. $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
2. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
3. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
4. $1 \times \vec{u} = \vec{u} \times 1 = \vec{u}$

Vectores colineares

Dois vectores, não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se existe um número real $k \neq 0$ tal que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Vectores colineares têm a mesma direcção.

Digitalizada com CamScanner

3

3.1 Relativamente ao paralelepípedo do Exemplo 3.1, indique:

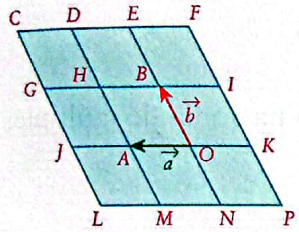
a) $\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{QR}$;

b) $\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{DJ}$;

c) $\overrightarrow{NR} + 2\overrightarrow{KJ}$;

d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{HR} + \overrightarrow{KE}$.

3.2 Observe o paralelogramo dividido em nove partes geometricamente iguais.



Indique um vector representante de:

a) $3\vec{a} - \vec{b}$;

b) $2(\vec{a} + \vec{b})$;

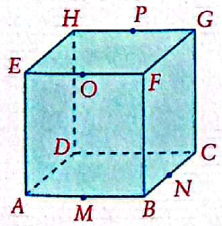
c) $3(\vec{b} - \vec{a})$;

d) $-3(\vec{a} + \vec{b})$;

e) $2\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{b} - 3\vec{a}$;

f) $-3(\vec{a} - \vec{b}) + 2(2\vec{a} - \vec{b})$.

3.3 Na figura $[ABCDEFGH]$ é um cubo.



M, N, O e P são os pontos médios das arestas a que pertencem.

a) Copie e complete.

$a_1)$ $-2\overrightarrow{BM} = \ldots$

$a_2)$ $\frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \ldots$

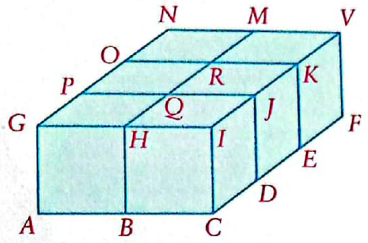
$a_3)$ $\frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = \ldots$

$a_4)$ $2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BE} = \ldots$

b) Indique três vectores colineares com $\overrightarrow{AM}$.

Exemplo 3 Produto de um número real por um vector

3.1 O paralelepípedo da figura seguinte é formado por seis cubos geometricamente iguais.



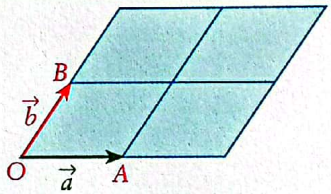
Usando as letras da figura indique:

a) $\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CD}$;

b) $\overrightarrow{CI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$.

3.2 Indique três vectores colineares com $\overrightarrow{AC}$.

3.3 Copie o paralelogramo da figura seguinte que está dividido em quatro partes iguais.



Coloque as letras de C a H de modo que:

- $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$;
- $\overrightarrow{OD} = 2\vec{a}$;
- $\overrightarrow{OE} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$;
- $\overrightarrow{OF} = \vec{a} + 2\vec{b}$;
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG}$;
- $\overrightarrow{EH} = -\vec{b}$.

Resolução

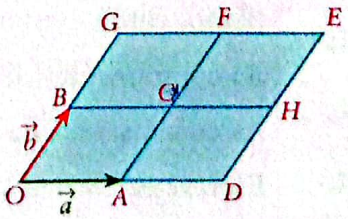
3.1 a) $\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BF}$

b) $\overrightarrow{CI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CJ}$

3.2 Por exemplo:

- $\overrightarrow{AB}$ porque $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{PQ}$ porque $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{NV}$ porque $\overrightarrow{NV} = 1\overrightarrow{AC}$.

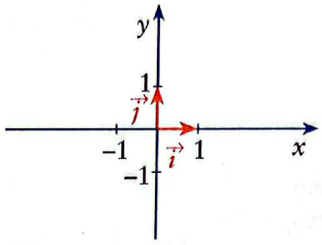
3.3



Digitalizada com CamScanner

1.5 Referencial ortonormado no plano

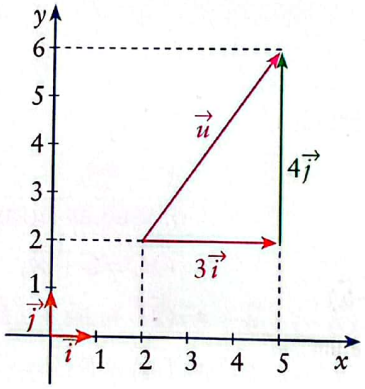
Na origem de um referencial ortogonal e monométrico consideram-se vectores unitários com direcção e sentido dos semieixos positivos. Este referencial passa a chamar-se referencial **ortonormado** (o. n.).



Referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Qualquer vector do plano pode ser decomposto na soma de múltiplos dos vectores unitários referidos.

Por exemplo:



$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

As **componentes** do vector $\vec{u}$ são $3\vec{i}$ e $4\vec{j}$.

As **coordenadas** do vector $\vec{u}$ são $(3, 4)$ e escreve-se $\vec{u} = (3, 4)$ ou $\vec{u}(3, 4)$.

De um modo geral, tem-se:

Componentes e coordenadas de um vector

Se $\vec{u}$ é um vector representado num referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ do plano, então existem números reais a e b tais que $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

As componentes de $\vec{u}$ são $a\vec{i}$ e $b\vec{j}$.

As coordenadas de $\vec{u}$ são (a, b).

Escreve-se: $\vec{u} = (a, b)$ ou $\vec{u}(a, b)$.

Digitalizada com CamScanner

1.6 Igualdade de vectores. Vector como diferença de dois pontos

Igualdade de dois vectores

Dados dois vectores do plano $\vec{u} = (u_1 , u_2)$ e $\vec{v} = (v_1 , v_2)$,

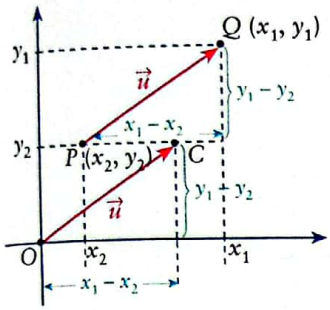
$$\vec{u} = \vec{v} \iff u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 .$$

Vector como diferença entre dois pontos

Um vector $\overrightarrow{PQ}$ pode ser designado pela diferença entre o ponto extremidade e o ponto de origem de qualquer um dos seus representantes.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_1 - x_2 , y_1 - y_2) = (x_1 , y_1) - (x_2 , y_2) = Q - P$$



$\overrightarrow{PQ} = Q - P$; $\overrightarrow{OC} = C - O$

Se $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, então $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ ou $Q = P + \vec{u}$.

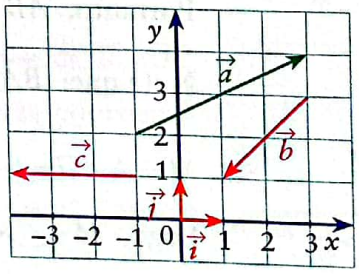
Assim, como já foi dito, dado um ponto P e um vector $\vec{u}$ chama-se soma do ponto P com o vector $\vec{u}$ ao ponto Q, sendo Q a extremidade do representante do vector $\vec{u}$ com origem em P.

Observação

Para obter as coordenadas de um vector, muitas das vezes é útil dispor do seu representante com origem na origem do referencial. As coordenadas do vector são as coordenadas da extremidade desse representante.

Exemplo 4 **Componentes e coordenadas de um vector**

Considere os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ representados num referencial o. n. $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

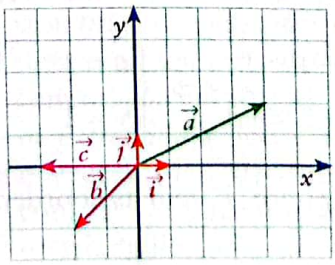


4.1 Represente os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ com origem na origem do referencial.

4.2 Indique as componentes e as coordenadas dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

Resolução

4.1

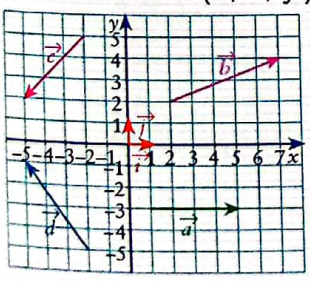


4.2

Vector	Componentes	Coordenadas
$\vec{a}$	$4\vec{i}$ e $2\vec{j}$	$\vec{a} = (4 , 2)$
$\vec{b}$	$-2\vec{i}$ e $-2\vec{j}$	$\vec{b} = (-2 , -2)$
$\vec{c}$	$-3\vec{i}$ e $0\vec{j}$	$\vec{c} = (-3 , 0)$

4

Na figura seguinte estão representados os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$, num referencial o. n. $(O , \vec{i} , \vec{j})$.



4.1 Represente os vectores dados com origem na origem do referencial.

4.2 Indique as componentes e as coordenadas dos vectores dados.

4.3 Desenhe um representante do vector:

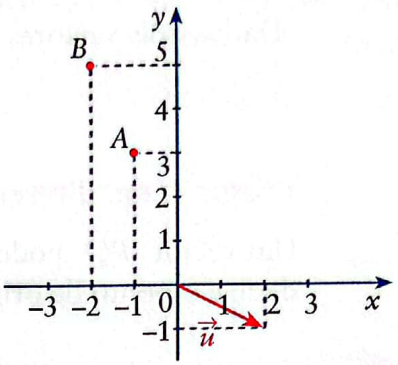
a) $\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$;

b) $\vec{w} = -\vec{i} - 2\vec{j}$.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 5 **Vector como diferença de dois pontos**

Sendo $A \curvearrowright (-1, 3)$, $B \curvearrowright (-2, 5)$ e $\vec{u} = (2, -1)$:



5.1 determine as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$.

5.2 determine as coordenadas do ponto $M = A + \vec{u}$.

5.3 determine as coordenadas do ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \vec{u}$.

Resolução

5.1 $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 5) - (-1, 3) = (-2 - (-1), 5 - 3) = (-1, 2)$

$\overrightarrow{BA} = A - B = (-1, 3) - (-2, 5) = (-1 - (-2), 3 - 5) = (1, -2)$

Portanto, $\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$ e $\overrightarrow{BA} = (1, -2)$.

Note que: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (1, -2)$.

5.2 $M = A + \vec{u} = (-1, 3) + (2, -1) = (-1 + 2, 3 + (-1)) = (1, 2)$

Logo, $M \curvearrowright (1, 2)$.

5.3 Seja $P \curvearrowright (x, y)$ o ponto pedido.

$\overrightarrow{AP} = \vec{u} \iff P - A = \vec{u} \iff$

$\iff (x, y) - (-1, 3) = (2, -1) \iff$

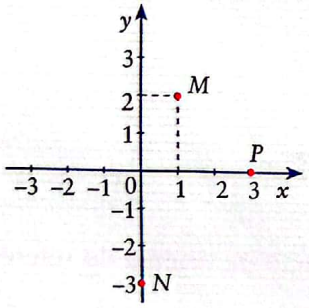
$\iff (x - (-1), y - 3) = (2, -1) \iff$ Igualdade de vectores.

$\iff \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Assim, o ponto P tem as coordenadas $(1, 2)$.

5

Num referencial o. n. do plano, considere os pontos:
$M \curvearrowright (1, 2)$, $N \curvearrowright (0, -3)$ e $P \curvearrowright (3, 0)$.



5.1 Escreva as coordenadas dos vectores:

a) $\overrightarrow{MN}$;

b) $\overrightarrow{NM}$;

c) $\overrightarrow{NP}$.

5.2 Escreva as coordenadas dos pontos:

a) $M + \overrightarrow{NM}$;

b) $N + \overrightarrow{MN}$;

c) $N + \overrightarrow{MP}$.

Digitalizada com CamScanner

1.7 Adição de dois vectores conhecidas as suas coordenadas

A soma de dois vectores é um vector.

A soma do vector $\vec{u} = (x_1 , y_1)$ com o vector $\vec{v} = (x_2 , y_2)$ é o vector $\vec{w} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$.

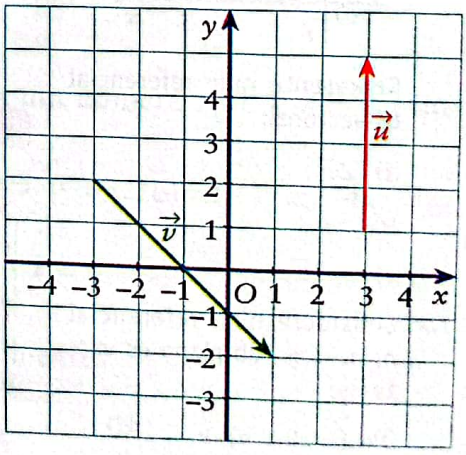
Propriedades da adição de dois vectores

Quaisquer que sejam os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, são válidas as seguintes propriedades:

1. **Comutativa**
   $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. **Associativa**
   $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. **Existência de elemento neutro**
   $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. **Existência de simétrico**
   $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$

Exemplo 6 **Adição de dois vectores**

Num referencial o. n. estão representados os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



6.1 Escreva as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

6.2 Represente pelas suas coordenadas $\vec{u} + \vec{v}$.

6.3 Desenhe uma representação do vector $\vec{u} + \vec{v}$.

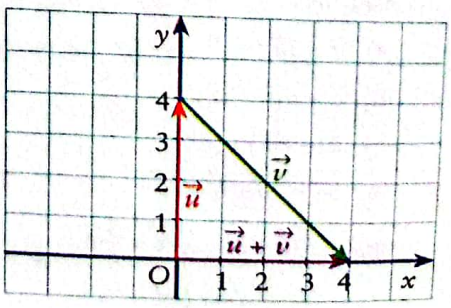
Resolução

6.1 $\vec{u} = (0 , 4)$; $\vec{v} = (4 , -4)$

6.2 $\vec{u} + \vec{v} = (0 , 4) + (4 , -4) = (4 , 0)$

6.3 Desenhou-se:

- uma representação do vector $\vec{u}$ com origem em $(0 , 0)$;
- uma representação do vector $\vec{v}$ com origem em $(0 , 4)$, ou seja, na extremidade do vector $\vec{u}$;
- o vector $(4 , 0)$, soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, aplicando-se a regra do triângulo.



6

Sendo:

$\vec{a} = (1 , -1)$; $\vec{b} = (-2 , 3)$ e $\vec{c} = (-10 , 5)$, escreva as coordenadas dos vectores:

a) $\vec{a} + \vec{b}$;

b) $\vec{b} + \vec{c}$;

c) $(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$;

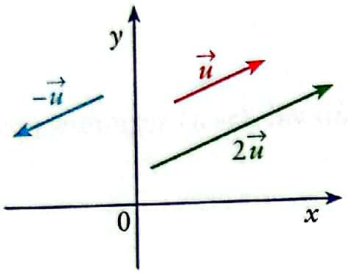
d) $(\vec{a} + \vec{0}) + \vec{b}$;

e) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{c}$.

Digitalizada com CamScanner

1.8 Produto de um número real por um vector. Diferença de dois vectores

Seja $\vec{u} = (x_1 , y_1)$ um vector e k um número real. O produto de k pelo vector $\vec{u}$ representa-se por $k\vec{u}$ e tem coordenadas (kx_1 , ky_1).



Se $k = 0$ ou $\vec{u} = 0$, o produto $k\vec{u}$ é o vector nulo.

Se $k > 0$ e $\vec{u} \neq 0$, $k\vec{u}$ terá o mesmo sentido de $\vec{u}$.

Se $k < 0$ e $\vec{u} \neq 0$, $k\vec{u}$ terá o sentido oposto ao de $\vec{u}$.

O comprimento do vector $k\vec{u}$ é igual ao produto do valor absoluto de k pelo comprimento de $\vec{u}$.

Propriedades da multiplicação de um número real por um vector

Quaisquer que sejam os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e os números reais a e b, são válidas as seguintes propriedades:

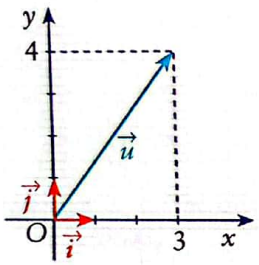
- $(a + b)\,\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- $(a \times b)\,\vec{u} = a\,(b \times \vec{u})$
- $a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- $1 \times \vec{u} = \vec{u}$

Diferença de vectores

No plano tem-se:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-1) \times \vec{b} .$$

7.1 Num referencial o. n. (O , x , y) considere o vector $\vec{u} = (3 , 4)$.



Represente num referencial os vectores:

a) $2\vec{u}$;

b) $-\vec{u}$;

c) $-2\vec{u}$.

7.2 Considere num referencial o. n. Oxy do plano os vectores:

$\vec{a} = (-10 , 5)$ e

$\vec{b} = (-8 , 0)$.

Calcule:

a) $\vec{a} - 3\vec{a}$;

b) $\vec{a} - 3\vec{a} + 5\vec{a}$;

c) $2(-3\vec{a})$;

d) $6\vec{a} - 7\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{b}$;

e) $-\frac{1}{2}\vec{a} + 8\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{b}$;

f) $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + 2(-\vec{b} + 3\vec{a})$.

Exemplo 7

Sejam $\vec{a} = (1 , 3)$ e $\vec{b} = (2 , 5)$.

Determine:

7.1 $\vec{a} - \vec{b}$; **7.2** $\vec{a} - 3\vec{b}$; **7.3** $\vec{a} - 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{b}$.

Resolução

7.1 $\vec{a} - \vec{b} = (1 , 3) - (2 , 5)$

$= (1 - 2 , 3 - 5) = = (-1 , -2)$

ou $(1 , 3) - (2 , 5) =$
$= (1 , 3) + (-2 , -5) =$
$= (-1 , -2)$

7.2 $\vec{a} - 3\vec{b} = (1 , 3) - 3\,(2 , 5) =$

$= (1 , 3) - (6 , 15) =$

$= (1 - 6 , 3 - 15) = (-5 , -12)$

ou $(1 , 3) - 3\,(2 , 5) =$
$= (1 , 3) + 3\,(-2 , -5) =$
$= (1 , 3) + (-6 , -15) =$
$= (-5 , -12)$

7.3 $\vec{a} - 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{b} = -2\vec{a} - 5\vec{b}$

Substituindo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pelas suas coordenadas, vem:

$-2\,(1 , 3) - 5\,(2 , 5) = (-2 , -6) - (10 , 25) = (-12 , -31)$.

Digitalizada com CamScanner

1.9 Norma de um vector. Vectores colineares

Norma de um vector

Norma de um vector $\vec{u}$ é a medida do seu comprimento e representa-se por $||\vec{u}||$.

Norma de um vector

Se $\vec{u} = (x_1 , y_1)$, então $||\vec{u}|| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Vectores colineares

Recorde que:

Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos são colineares se e só se têm a mesma direcção.

Vectores colineares

Dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se existe um número real $k \neq 0$ tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Por exemplo, os vectores $\vec{a} = (2 , 3)$ e $\vec{b} = (10 , 15)$ são colineares porque $(10 , 15) = 5\,(2 , 3)$, ou seja, $\vec{b} = 5\vec{a}$.

Observação

Repare que:

para $\vec{u} = (x_1 , y_1)$ e $\vec{v} = (x_2 , y_2)$, com $x_2 \times y_2 \neq 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \iff x_1 \times y_2 = x_2 \times y_1$.

Exemplo 8 **Determinação de um vector conhecida a sua norma**

8.1 Averigúe se são colineares os vectores $\vec{u} = (-1{,}5 ; 4)$ e $\vec{v} = (-6 , 16)$

8.2 Considere o vector $\vec{u} = (-3 , 0 , 4)$.
Determine um vector $\vec{v}$, colinear com $\vec{u}$, tal que $||\vec{v}|| = 10$

Resolução

8.1 $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se existir um número real $k \neq 0$ tal que $\vec{v} = k\vec{u}$.

$\vec{v} = k\vec{u} \iff (-6 , 16) = k\,(-1{,}5 ; 4) \iff (-6 , 16) = (-1{,}5k ; 4k) \iff$

$\iff \begin{cases} -6 = -1{,}5k \\ 16 = 4k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 4 \\ k = 4 \end{cases} \iff \{k = 4$

Como $\vec{v} = 4\vec{u}$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

8.2 $\vec{v} = k\vec{u} \iff \vec{v} = k\,(-3 , 0) \iff \vec{v} = (-3k , 0k)$ $\vec{v}$ é colinear com $\vec{u}$.

Por outro lado, temos:

$||\vec{v}|| = 10 \iff \sqrt{(-3k)^2 + 0^2} = 10 \iff$ Norma pedida.

$\iff \left(\sqrt{(-3k)^2}\right)^2 = 10^2 \iff 9k^2 = 100 \iff$

$\iff k^2 = \frac{100}{9} \iff k = \pm\frac{10}{3}$

Como $\vec{v} = k\vec{u}$ e $k = \pm\frac{10}{3}$, tem-se:

$\vec{v} = \frac{10}{3}\vec{u}$ ou $\vec{v} = -\frac{10}{3}\vec{u}$, assim temos que:

$\vec{v} = (10 , 0)$ ou $\vec{v} = (-10 , 0)$.

8

8.1 Para cada um dos seguintes vectores do plano determine a sua norma.

a) $\vec{u} = (-10 , 5)$;

b) $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2} , 3\right)$;

c) $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$, sendo
$A \curvearrowright (-1 , 5)$ e
$B \curvearrowright (-2 , -3)$;

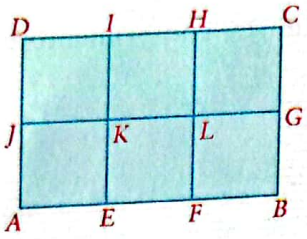
8.2 Verifique se são colineares os seguintes pares de vectores:

$\vec{a}\,(2 , 3)$; $\vec{b}\,(-1 , -1{,}5)$.

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 $[ABCD]$ é um rectângulo dividido em seis rectângulos iguais.



1.1 $A - \overrightarrow{HL}$ é igual a:

(A) E; (B) F;

(C) J; (C) $\overrightarrow{AJ}$.

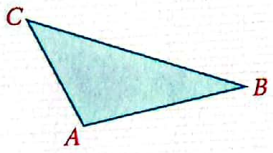
1.2 $\overrightarrow{AK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$ é igual a:

(A) J; (B) $\overrightarrow{AC}$;

(C) $\overrightarrow{AL}$; (D) $\overrightarrow{AD}$.

20 pontos

2 Observe o triângulo $[ABC]$.



Pode afirmar-se que $\overrightarrow{BC}$ representa:

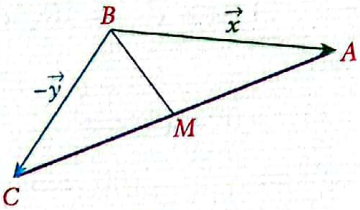
(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; (B) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$;

(C) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$.

10 pontos

3 O diagrama mostra os vectores

$\overrightarrow{BA} = \vec{x}$ e $\overrightarrow{BC} = -\vec{y}$.



M é o ponto médio de $[AC]$. $\overrightarrow{CM}$ é igual a:

(A) $\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$; (B) $\vec{y} + \vec{x}$;

(C) $2(\vec{y} - \vec{x})$; (D) $-\frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y}$.

10 pontos

4 Sendo $\vec{u} = (-1, 2)$, as coordenadas de um vector, $\vec{v}$, colinear com $\vec{u}$ e de norma $\frac{5}{4}$ são:

(A) $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$;

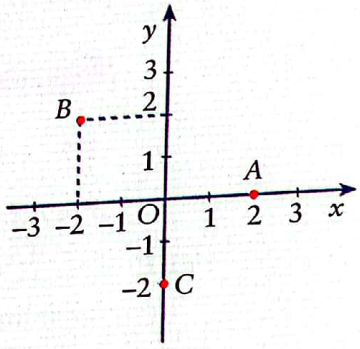
(B) $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$;

(C) $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$;

(D) $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

10 pontos

5 Considere os pontos assinalados no referencial o. n. da figura.



5.1 A norma do vector $\vec{w} = 2(A - C)$ é:

(A) $8\sqrt{2}$; (B) $\sqrt{2}$;

(C) $2\sqrt{2}$; (D) $4\sqrt{2}$.

5.2 As coordenadas do vector $\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ são:

(A) $(2, -1)$; (B) $(3, -2)$;

(C) $(1, 2)$; (D) $(-2, 3)$.

20 pontos

6 Sendo $\vec{u} = (\sqrt{3}, -1)$, então o valor de $\|\vec{u}\|^2$ é igual a:

(A) 4; (B) 3;

(C) $2\sqrt{3}$; (D) $2\sqrt{3} + 1$;

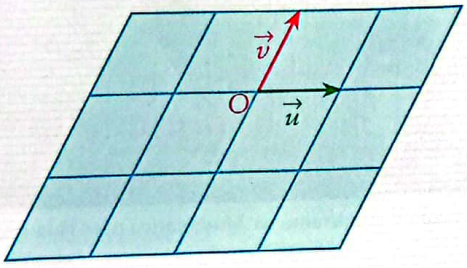
10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

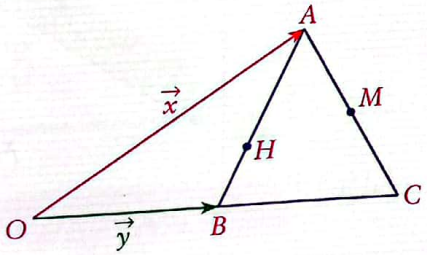
7 Copie para o seu caderno a seguinte figura e assinale os pontos de C a P tais que:

- $\overrightarrow{OE} = \vec{u} - 2\vec{v}$; $\overrightarrow{OD} = 2\vec{u} + \vec{v}$;
- $\overrightarrow{OC} = 2\vec{u} - \vec{v}$; $\overrightarrow{OH} = -\vec{u} - 2\vec{v}$;
- $\overrightarrow{OG} = -\vec{u}$; $\overrightarrow{OF} = -2\vec{u} + \vec{v}$;
- $\overrightarrow{OI} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$; $\overrightarrow{OY} = -\vec{u} + \vec{v}$;
- $\overrightarrow{OK} = -\vec{u} - \vec{v}$; $\overrightarrow{OM} = -\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$;
- $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$; $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}(\vec{u} - \vec{v})$.



20 pontos

8 Observe o desenho seguinte que não está feito à escala.



$\overrightarrow{OA} = \vec{x}$ e $\overrightarrow{OB} = \vec{y}$.

M é o ponto médio de $[AC]$ e B é o ponto médio de $[OC]$.

8.1 Usando $\vec{x}$ e $\vec{y}$, escreva de uma forma simplificada:

a) $\overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{BA}$; c) $\overrightarrow{OM}$.

8.2 Sabe-se que $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

Escreva $\overrightarrow{BH}$ usando $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

8.3 Os pontos O, H e M são colineares? Justifique a resposta.

30 pontos

9 Considere os vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

9.1 Mostre que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se $u_1 \times v_2 = u_2 \times v_1$.

9.2 Atendendo à propriedade referida em **9.1**, verifique se os seguintes pares de vectores são colineares.

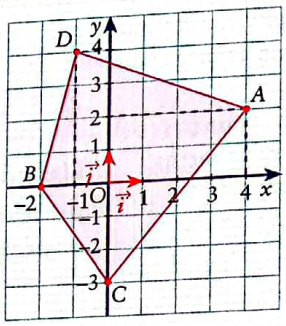
a) $\vec{a} = (-1, 5)$; $\vec{b} = \left(\frac{1}{5}, 1\right)$;

b) $\vec{c} = \left(\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right)$; $\vec{d} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\right)$;

c) $\vec{e} = \left(-\pi, \frac{\pi}{3}\right)$; $\vec{f} = \left(2\pi, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

30 pontos

10 No referencial o. n. (O, i, j) da figura, considere o quadrilátero $[ADBC]$.



10.1 Escreva as coordenadas dos vectores:

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; b) $-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}\right)$;

c) $3(A - D) + 2(D - A)$.

10.2 Considerando como unidade de medida o centímetro, determine o perímetro do quadrilátero $[ADBC]$. Apresente o resultado com aproximação às décimas.

10.3 Determine $\left\|\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right\|$.

10.4 Determine as coordenadas do ponto E que pertence ao eixo das ordenadas e tal que:

$$\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = \sqrt{17}.$$

10.5 Considerando como unidade de medida o centímetro, calcule a área do quadrilátero $[ADBC]$.

Sugestão: Construa um rectângulo que contenha o quadrilátero.

40 pontos

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Calcular a distância entre dois pontos.
2. Escrever a equação da circunferência conhecidos o centro e o raio.
3. • Resolver problemas envolvendo circunferências.
   • Identificar o centro da circunferência e o raio dada a respectiva expressão analítica.
4. Determinar o ponto médio de um segmento de recta através da fórmula.
5. Identificar a equação da recta.
6. Determinar o declive de uma recta.
7. Interpretar a condição de paralelismo e de perpendicularidade de duas rectas em função dos seus respectivos declives.
8. Determinar os pontos de intersecção de duas rectas.
9. Calcular a distância de um ponto a uma recta.
10. Definir elipse e identificar os seus elementos.
11. Escrever a equação de uma elipse com centro na origem dos eixos coordenados.
12. Aplicar a equação da elipse na resolução de problemas.
13. Definir hipérbole e identificar os seus elementos.
14. Escrever a equação de uma hipérbole com centro na origem dos eixos coordenados.
15. Aplicar a equação da hipérbole na resolução de problemas.

2. Rectas no plano. Circunferência, elipse e hipérbole

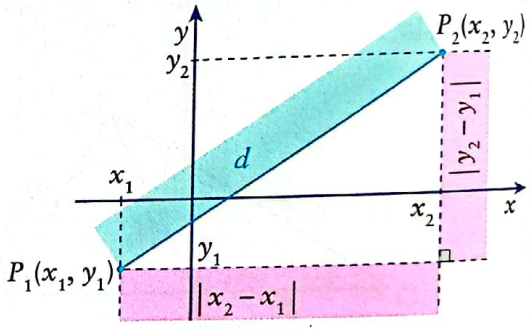
Saber determinar a distância entre pontos no plano é importante na Matemática e na vida real.

2.1 Distância entre dois pontos no plano

Usando o Teorema de Pitágoras num referencial o. n., calcula-se a distância entre dois pontos:

$P_1 \curvearrowright (x_1, y_1)$ e

$P_2 \curvearrowright (x_2, y_2)$.



A distância pretendida está representada na figura por d.

Usando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$\overline{P_1P_2}^2 = d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Aplica-se o Teorema de Pitágoras.

$$\overline{P_1P_2} = d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

Como

$|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$ e $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$,

vem:

O quadrado de um número é sempre um número não negativo.

Fórmula da distância entre dois pontos no plano

A distância, d, entre os pontos $P_1 \curvearrowright (x_1, y_1)$ e $P_2 \curvearrowright (x_2, y_2)$ num referencial o. n. é:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Observação

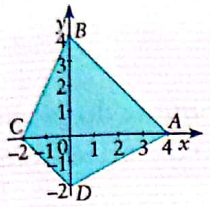
A distância entre P_1 e P_2 pode escrever-se:

$d = \overline{P_1P_2}$ ou $d = d(P_1, P_2)$.

Digitalizada com CamScanner

1

1.1 No referencial o. n. Oxy está representado um quadrilátero $[ABCD]$.



Sabe-se que as coordenadas dos seus vértices são:
$A \rightsquigarrow (4, 0)$ $B \rightsquigarrow (0, 4)$
$C \rightsquigarrow (-2, 0)$ $D \rightsquigarrow (0, -2)$
Calcule o valor exacto do perímetro:
a) do triângulo $[ABD]$;
b) do quadrilátero $[ABCD]$.

1.2 Classifique, quanto ao comprimento dos lados, o triângulo $[MAR]$, sendo:
$M \rightsquigarrow (-2, 1)$ $A \rightsquigarrow (5, 1)$
$R \rightsquigarrow (5, 4)$

Exemplo 1 **Distância entre dois pontos no plano**

Calcule a distância entre os pontos A e B, sendo:
$A \rightsquigarrow (-3, 2)$ e $B \rightsquigarrow (-1, 5)$.

Resolução

$A \rightsquigarrow (-3, 2)$; $B \rightsquigarrow (-1, 5)$ — Pontos dados.

$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — Fórmula da distância entre dois pontos no plano.

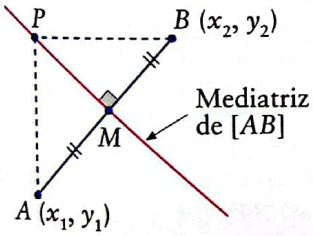
$A \rightsquigarrow (\underset{\downarrow x_1}{-3}, \underset{\downarrow y_1}{2})$; $B \rightsquigarrow (\underset{\downarrow x_2}{-1}, \underset{\downarrow y_2}{5})$ — A cada número atribui-se a letra correspondente.

$\overline{AB} = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (5 - 2)^2}$ — Substituem-se, na fórmula, as letras pelos números correspondentes.

$\overline{AB} = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{13}$ — Efectuam-se os cálculos.

A distância entre A e B é $\sqrt{13}$, ou seja, $\overline{AB} = \sqrt{13}$.

2.2 Mediatriz de um segmento de recta



A mediatriz de um segmento de recta de extremos $A \rightsquigarrow (x_1, y_1)$ e $B \rightsquigarrow (x_2, y_2)$ é o lugar geométrico dos pontos $P \rightsquigarrow (x, y)$ que distam igualmente de A e B.

A equação da mediatriz é dada pela expressão:

$$\overline{AP} = \overline{BP}$$
$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

Equação da mediatriz de $[AB]$ sendo $A \rightsquigarrow (x_1, y_1)$ e $B \rightsquigarrow (x_2, y_2)$:
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

Exemplo 2 **Mediatriz de um segmento de recta**

Escreva uma equação da mediatriz do segmento de recta $[AB]$, sendo:
$A \rightsquigarrow (1, 0)$ e $B \rightsquigarrow (-3, 2)$.

Resolução

$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = (x + 3)^2 + (y - 2)^2 \iff$ — Aplica-se a definição.

$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 \iff$ — Efectuam-se os cálculos.

$\iff -8x + 4y - 12 = 0 \iff$

$\iff 2x - y + 3 = 0 \iff$

$\iff y = 2x + 3$

A mediatriz é a recta de equação $y = 2x + 3$.

2

Sendo $A \rightsquigarrow (-2, 5)$ e $B \rightsquigarrow (-1, 3)$, escreva uma equação da mediatriz de $[AB]$.

Digitalizada com CamScanner

2.3 Circunferência e círculo

Fórmula da circunferência e do círculo

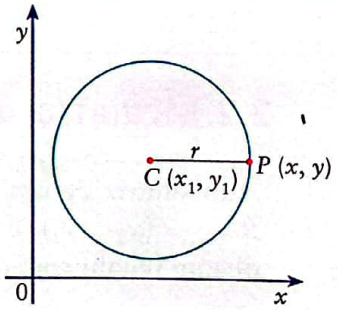
Circunferência

Chama-se circunferência ao conjunto de todos os pontos do plano que distam igualmente de um ponto fixo chamado centro da circunferência.

A distância de qualquer ponto da circunferência ao centro chama-se raio da circunferência e representa-se por r. Note que r não pode ser menor que zero e que $r = 0$ reduz a circunferência num ponto.

Num referencial o. n., a circunferência de centro $C(x_1, y_1)$ e raio r é definida pela fórmula:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

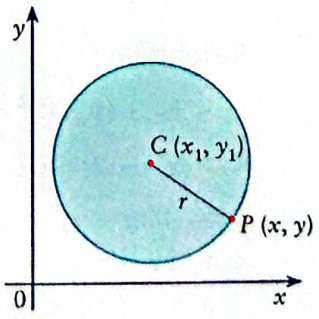


Círculo

Chama-se círculo ao conjunto de todos os pontos do plano que pertencem a uma circunferência ou são interiores a esta.

Num referencial o. n., o círculo de centro $C \curvearrowright (x_1, y_1)$ e raio r é definido pela fórmula:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leqslant r^2$$

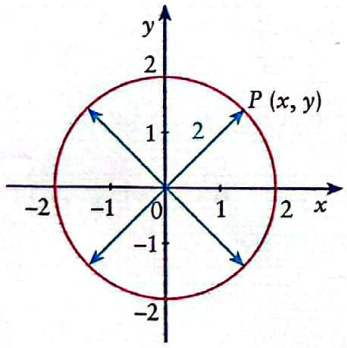


3

3.1 Como se chama o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixo é igual a uma constante?

3.2 Qual é a diferença entre círculo e circunferência? Explique fazendo um desenho e indicando pontos que pertencem ao círculo e não pertencem à circunferência.

3.3 Na figura seguinte está representado um referencial o. n., Oxy.



$P \curvearrowright (x, y)$ é um ponto qualquer da circunferência de centro O e raio 2.

a) O que representa a equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$?

b) O que representa a equação $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$?

c) O que representa a inequação $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 \leqslant 2^2$?

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 3 Circunferência e círculo

3.1 Escreva uma equação para a circunferência e para o círculo de centro $C \curvearrowright (-1, 3)$ e raio 4.

3.2 Verifique se cada um dos pontos $A \curvearrowright (-1, 7)$ e $B \curvearrowright (2, 4)$ pertence, é interior ou exterior à circunferência definida na alínea anterior.

3.3 Desenhe o círculo definido por: $(x+3)^2 + (y-4)^2 \leqslant 5$.

Resolução

3.1 $C \curvearrowright (-1, 3)$; raio $= 4$

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$ — Fórmula da equação da circunferência de centro $C \curvearrowright (x_1, y_1)$ e raio r.

$(x - (-1))^2 + (y - 3)^2 = 4^2$ — Aplica-se a fórmula substituindo $(x_1, y_1) = (-1, 3)$ e $r = 4$.

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$ — Simplificam-se as expressões.

A circunferência é definida pela equação

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

e o círculo por $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 16$.

3.2 Ponto $A \curvearrowright (-1, 7)$

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

$(-1 + 1)^2 + (7 - 3)^2 = 16$ — Substitui-se $x = -1$ e $y = 7$, que são as coordenadas de A.

$0^2 + 4^2 = 16$

$16 = 16$ — A igualdade é verdadeira.

Logo, o ponto A pertence à circunferência.

Ponto $B \curvearrowright (2, 4)$

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

$(2 + 1)^2 + (4 - 3)^2 = 16$ — Substitui-se $x = 2$ e $y = 4$, coordenadas de B.

$9 + 1 = 16$

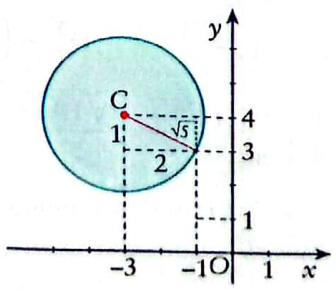
$10 = 16$ — A igualdade é falsa.

Como $10 < 16$, o ponto B é interior à circunferência.

3.3 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 \leqslant 5$

$(x - (-3))^2 + (y - 4)^2 \leqslant (\sqrt{5})^2$ — Escreve-se a equação dada na forma $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leqslant r^2$.

$C \curvearrowright (-3, 4)$ e $r = \sqrt{5}$ — Identifica-se o centro e o raio.



Desenha-se a circunferência e, utilizando uma cor, assinala-se o círculo.

3.4 Escreva uma equação para as circunferências e para os círculos de centro C e raio r, sendo:

a) $C \curvearrowright (-1, 4)$ e $r = 2$;

b) $C \curvearrowright (-2, -3)$ e $r = \sqrt{3}$;

c) $C \curvearrowright (-1, 0)$ e $r = \sqrt{8}$.

3.5 Indique o centro e o raio de cada uma das seguintes circunferências.

a) $(x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 3$

b) $x^2 - 2x + 1 + (y-3)^2 = 1$

c) $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 3 = 0$

3.6 Considere as circunferências C_1, C_2 e C_3 definidas por:

$C_1: (x-3)^2 + y^2 = 9$;

$C_2: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$;

$C_3: (x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$.

a) Represente no mesmo referencial o. n. Oxy cada uma das circunferências.

b) Considere os pontos

$A \curvearrowright (-3, 1)$

$B \curvearrowright (6, 0)$

$C \curvearrowright (0, -2)$

Verifique se cada um destes pontos pertence, é interior ou é exterior a cada uma das circunferências C_1, C_2 e C_3.

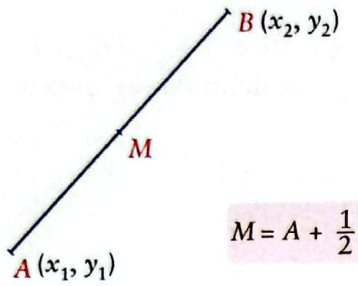
3.7 Mostre que a equação $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 3 = 0$ não pode representar uma circunferência.

Digitalizada com CamScanner

2.4 Coordenadas do ponto médio de um segmento de recta

No plano, se $A \curvearrowright (x_1, y_1)$ e $B \curvearrowright (x_2, y_2)$, tem-se:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Se M é o ponto médio de $[AB]$, então:

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$= (x_1, y_1) + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2}\right)$$

$$= \left(x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}, y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Assim:

Ponto médio de um segmento de recta

No plano, o ponto médio M de um segmento de recta $[AB]$ com $A \curvearrowright (x_1, y_1)$ e $B \curvearrowright (x_1, y_2)$ é dado por:

$$M \curvearrowright \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

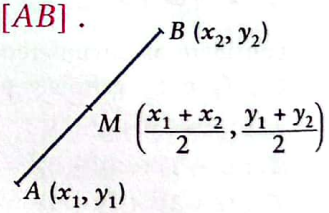
Exemplo 4 **Determinação do ponto médio de um segmento de recta**

Considere num referencial o. n. do plano os pontos $A \curvearrowright (-1, 0)$ e $B \curvearrowright (-2, 3)$. Determine:

4.1 as coordenadas do ponto médio de $[AB]$;

4.2 uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$.

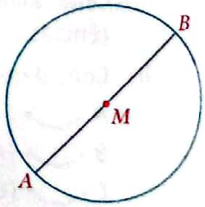
Resolução



4.1 Sendo $A \curvearrowright (-1, 0)$ e $B \curvearrowright (-2, 3)$, o ponto médio M de $[AB]$ é:

$$M \curvearrowright \left(\frac{-1 + (-2)}{2}, \frac{0 + 3}{2}\right); \quad M \curvearrowright \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

4.2 Comecemos por determinar o raio, r, da circunferência.



$$M \curvearrowright \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad A \curvearrowright (-1, 0)$$

$$r = \overline{MA} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Sendo M o centro da circunferência, uma equação da circunferência é:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

Aplica-se a fórmula: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$.

4

4.1 Determine as coordenadas do ponto médio de $[AB]$, sendo:

$A \curvearrowright (-1, 3)$

$B \curvearrowright (1{,}5\ ;\ 8)$

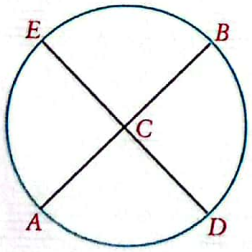
4.2 Os pontos

$A \curvearrowright (0, 4)$

$B \curvearrowright (3, 1)$

$D \curvearrowright (2\sqrt{2}, 2)$

pertencem a uma circunferência de centro C.

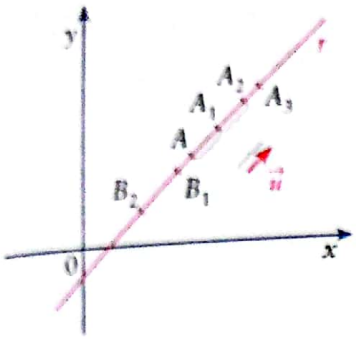


$[AB]$ e $[DE]$ são diâmetros da circunferência.

Determine as coordenadas do ponto E.

Digitalizada com CamScanner

2.5 Equação vectorial de uma recta no plano



Na figura ao lado pode observar a recta r e o vector $\vec{u}$.

Repare que:

$A_1 = A + \vec{u}$; $A_2 = A + 2\vec{u}$; $A_3 = A + 2{,}5\vec{u}$; $B_1 = A - 0{,}5\vec{u}$; $B_2 = A - 2\vec{u}$.

De um modo geral, sendo P um ponto qualquer da recta, tem-se que:

$$P = A + k\vec{u}\ ,\ k \in \mathbb{R}\ .$$

A esta condição dá-se o nome de equação vectorial da recta r.

Equação vectorial de uma recta no plano

Dados um ponto A e um vector não nulo $\vec{u}$ do plano existe uma única recta r que contém o ponto A e tem a direcção de $\vec{u}$.

Uma equação vectorial da recta r é:

$$P = A + k\vec{u},\ k \in \mathbb{R}$$

sendo P um ponto qualquer da recta.

O vector $\vec{u}$ chama-se vector director da recta.

Considerando as coordenadas de $P \curvearrowright (x\ ,\ y)$, $A \curvearrowright (x_1\ ,\ y_1)$ e $\vec{u} = (u_1\ ,\ u_2)$, a equação tem a forma:

$$(x\ ,\ y) = (x_1\ ,\ y_1) + k\,(u_1\ ,\ u_2)\ ,\ k \in \mathbb{R}\ .$$

Exemplo 5 Equação vectorial de uma recta no plano

Considere o ponto $A \curvearrowright (3\ ,\ 0)$ e o vector $\vec{v} = (1\ ,\ 3)$.

5.1 Escreva uma equação vectorial da recta r que contém o ponto A e tem a direcção de $\vec{v}$.

5.2 Escreva um equação vectorial da recta s que passa por $C \curvearrowright (0\ ,\ -2)$ e é paralela à recta r.

5.3 Determine a ordenada do ponto da recta r que tem abcissa 7.

Resolução

5.1 $P = A + kv\ ,\ k \in \mathbb{R}$

$(x\ ,\ y) = (3\ ,\ 0) + k\,(1\ ,\ 3)\ ,\ k \in \mathbb{R}$

Equação vectorial da recta que passa por A e tem a direcção de $\vec{v}$. Substituem-se P, A e $\vec{v}$ pelas respectivas coordenadas.

5.2 Equação da recta s:

$(x\ ,\ y) = (0\ ,\ -2) + k\,(1\ ,\ 3)\ ,\ k \in \mathbb{R}$

As rectas são paralelas, e portanto, têm o mesmo vector director ou vectores directores colineares.

5.3 Tem-se

$(7\ ,\ y) = (3\ ,\ 0) + k\,(1\ ,\ 3)\ ,\ k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 3 + k \\ y = 0 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ y = 12 \end{cases}$$

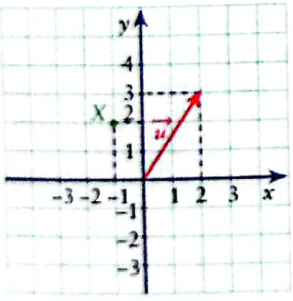
Substitui-se na equação vectorial x por 7.

A ordenada do ponto da recta com abcissa 7 é 12, ou seja, esse ponto tem coordenadas $(7\ ,\ 12)$.

5

5.1 Resolva as questões **5.1** a **5.3** do **Exemplo 5** considerando $A \curvearrowright (0\ ,\ 5)$ e $\vec{v} = (-2\ ,\ 1)$.

5.2 Considere, no referencial o. n. $(0\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$, o ponto $X \curvearrowright (-1\ ,\ 2)$ e o vector $\vec{u} = (2\ ,\ 3)$.



a) Escreva uma equação vectorial da recta r que passa por X e tem a direcção de $\vec{u}$.

b) Verifique se:

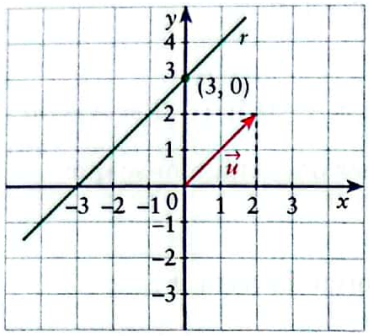
$A \curvearrowright (-1\ ,\ 4)$

é um ponto da recta r.

c) Escreva a equação reduzida da recta r que passa por X e tem a direcção de $\vec{u}$.

Digitalizada com CamScanner

2.6 Equação reduzida de uma recta no plano



Uma equação vectorial da recta r é $(x, y) = (3, 0) + k(2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$.
A partir desta é possível obter outra equação da recta.

Com efeito, tem-se $\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 0 + 2k, \ k \in \mathbb{R} \end{cases} \iff$ Forma-se um sistema de equações.

$\iff \begin{cases} k = \dfrac{x-3}{2} \\ k = \dfrac{y}{2}, \quad k \in \mathbb{R} \end{cases}$ Resolvem-se as equações em ordem a k.

Daqui resulta que:

$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{2} \iff$ Repare que apenas escrevemos $k = k$.

$\iff x - 3 = y \iff y = x - 3$ Resolve-se a equação em ordem a y.

À equação $y = x - 3$ chama-se **equação reduzida da recta.**

Observação

À equação $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{2}$ chama-se equação cartesiana da recta r.

Equação reduzida de uma recta no plano

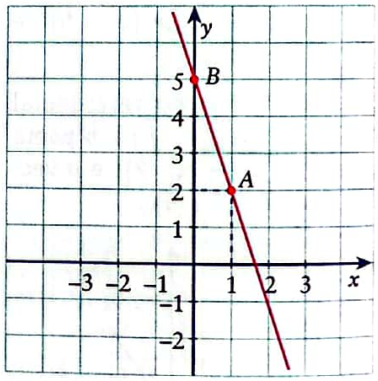
A equação reduzida de uma recta r não vertical é do tipo $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6 **Escrever a equação reduzida de uma recta**

Considere os pontos $A \curvearrowright (1, 2)$ e $B \curvearrowright (0, 5)$.

6.1 Escreva uma equação vectorial da recta AB.

6.2 Obtenha, a partir da equação vectorial, a equação reduzida da recta AB.



Vector director da recta AB.

Resolução

6.1 $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 5) - (1, 2)$
$= (-1, 3)$

Uma equação vectorial é, por exemplo:
$(x, y) = (1, 2) + k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

6.2 $(x, y) = (1, 2) + k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R} \iff$

$\iff \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + 3k, \ k \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} k = 1 - x \\ k = \dfrac{y-2}{3}, \ k \in \mathbb{R} \end{cases}$ Forma-se um sistema de equações e resolvem-se as equações em ordem a k.

De onde resulta que $1 - x = \dfrac{y-2}{3} \iff$ Igualam-se os valores de k e resolve-se a equação em ordem a y.

$\iff 3 - 3x = y - 2 \iff y = -3x + 5$.

Logo, a equação pedida é $y = -3x + 5$.

6

6.1 Escreva a equação reduzida da recta r sendo:

a) $(x, y) = (1, 2) + k(3, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ uma equação vectorial da recta;

b) $A \curvearrowright (1, 0)$ um ponto da recta e $\vec{v} = (1, 5)$ um vector director;

c) $A \curvearrowright (1, 2)$ e $B \curvearrowright (5, 6)$ dois pontos da recta.

6.2 Considere o rectângulo $[ABCD]$ num referencial o. n.

Sabe-se que:

$A \curvearrowright (3, 0)$

$B \curvearrowright (3, 4)$

$C \curvearrowright (5, 4)$

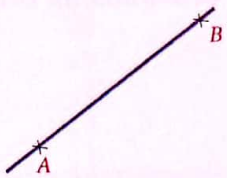
a) Determine as coordenadas de D.

b) Escreva a equação reduzida das rectas que contêm as diagonais do rectângulo.

Digitalizada com CamScanner

Semi-recta e segmentos de recta no plano

Uma semi-recta e um segmento de recta também podem ser definidos por equações vectoriais.

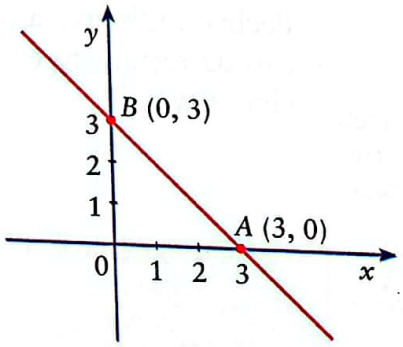


Semi-recta $\dot{A}B$: $P = A + k\overrightarrow{AB}$, $k \geqslant 0$

Segmento de recta $[AB]$: $P = A + k\overrightarrow{AB}$, $k \in [0\ ,\ 1]$

Exemplo 7 Semi-recta e segmento de recta

Considere no referencial o. n. Oxy os pontos $A \rightsquigarrow (3\ ,\ 0)$ e $B \rightsquigarrow (0\ ,\ 3)$.



7.1 Escreva uma equação vectorial da recta AB.

7.2 Escreva uma equação vectorial da semi-recta $\dot{A}B$.

7.3 Escreva uma equação vectorial do segmento de recta $[AB]$.

Resolução

7.1 $\overrightarrow{AB} = B - A = (0\ ,\ 3) - (3\ ,\ 0) = (-3\ ,\ 3)$

Assim, uma equação vectorial de recta AB é:

$$(x\ ,\ y) = (3\ ,\ 0) + k\,(-3\ ,\ 3)\ ,\ k \in \mathbb{R}\ .$$

7.2 Uma equação vectorial da semi-recta $\dot{A}B$ é:

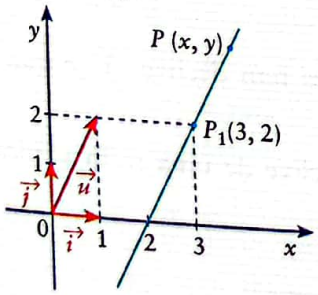
$$(x\ ,\ y) = (3\ ,\ 0) + k\,(-3\ ,\ 3)\ ,\ k \in \mathbb{R}_0^+\ .$$

7.3 Uma equação vectorial do segmento de recta $[AB]$ é:

$$(x\ ,\ y) = (3\ ,\ 0) + k\,(-3\ ,\ 3)\ ,\ k \in [0\ ,\ 1]\ .$$

7

No referencial o. n. $(0\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ está representado o vector $\vec{u} = (1\ ,\ 2)$ e uma recta paralela ao vector $\vec{u}$ que passa pelos pontos $P_1 \rightsquigarrow (3\ ,\ 2)$ e $P \rightsquigarrow (x\ ,\ y)$.



Considerando $P_2(2\ ,\ 0)$, escreva uma equação vectorial:

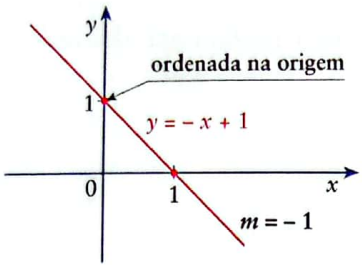
7.1 da recta P_1P_2;

7.2 da semi-recta $\dot{P}_1P_2$;

7.3 do segmento de recta $[P_1P_2]$.

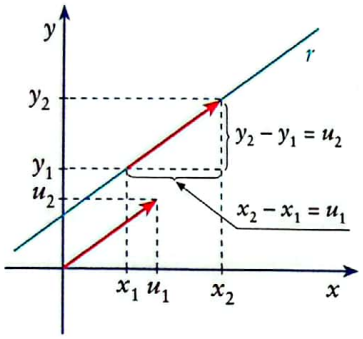
Digitalizada com CamScanner

2.7 Declive de uma recta. Interpretação do declive



Dada a equação reduzida de uma recta não vertical $y = mx + b$, o parâmetro m chama-se **declive da recta** ou **coeficiente director da recta** e b **ordenada na origem** (é o valor de y quando $x = 0$).

$$y = \underbrace{m}_{\text{Declive}}x + \underbrace{b}_{\text{Ordenada na origem}}$$



Declive de uma recta

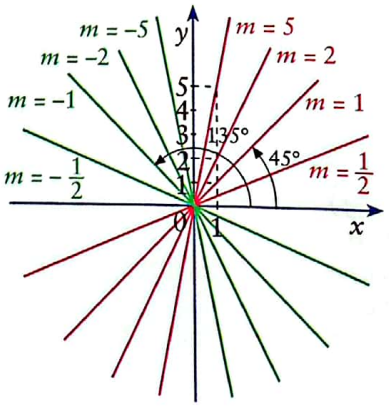
Dados dois pontos de uma recta r não vertical, $A \curvearrowright (x_1, y_1)$ e $B \curvearrowright (x_2, y_2)$, o declive m da recta AB é dado pela fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Assim, sendo $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vector director da recta, então:

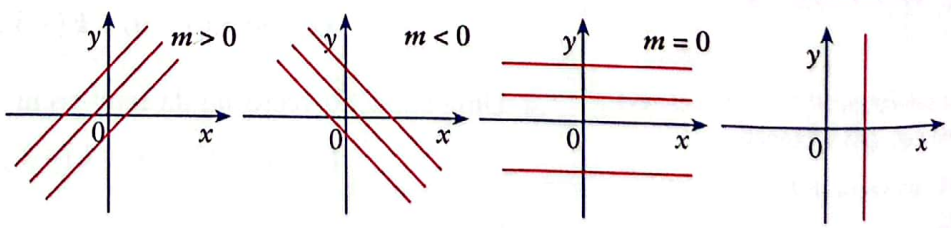
$$m = \frac{u_2}{u_1}$$

Na figura seguinte estão representadas algumas rectas e os respectivos declives. Observe a relação entre o sinal do valor do declive com a inclinação da recta, isto é, com o ângulo que a recta faz com a parte positiva do eixo Ox.



Observe que a bissectriz dos quadrantes ímpares tem declive 1 e que a bissectriz dos quadrantes pares tem declive -1.

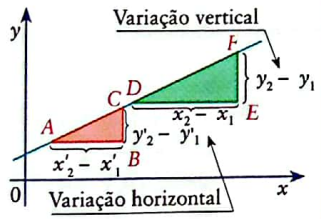
O declive de uma recta horizontal é zero e o declive de uma recta vertical não está definido.



Neste último caso não é possível determinar o declive e, assim, não existe equação reduzida. Estas rectas têm equações do tipo $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Observação

1. Note que o declive da recta não depende dos pontos considerados para o seu cálculo.



Os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes, logo:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

2. Para dar uma ideia numérica da variação de y face à variação de x, vejamos a alteração provocada por um acréscimo unitário a x: $x_2 = x_1 + 1$.
$y_2 = m(x_1 + 1) + b = mx_1 + m + b$.
Logo, $y_2 - y_1 = m$.

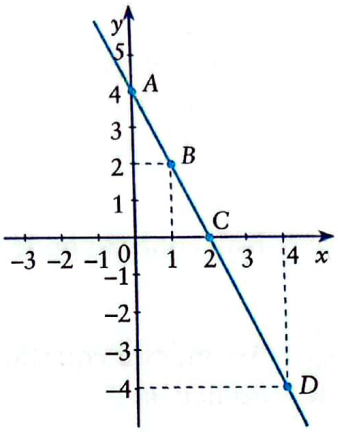
Pela observação anterior, pode tomar-se (x_2, y_2) qualquer sobre a recta e assim se obtém:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 8 Cálculo do declive de uma recta

8.1 Na figura está representada uma recta AB e quatro dos seus pontos.



Calcule o seu declive utilizando os pontos:

a) A e B; **b)** C e D; **c)** B e D.

8.2 Indique o declive e a ordenada na origem da recta de equação $2x + 3y - 2 = 0$.

Resolução

8.1 a) $A \curvearrowright (0\ ,\ 4)$; $B \curvearrowright (1\ ,\ 2)$ — Pontos dados.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ — Fórmula.

$$A \curvearrowright (\underset{\downarrow x_1}{0}\ ,\ \underset{\downarrow y_1}{4})\ ;\ B \curvearrowright (\underset{\downarrow x_2}{1}\ ,\ \underset{\downarrow y_2}{2})$$

$$m = \frac{2-4}{1-0} = -2$$

É indiferente considerar $A \curvearrowright (x_1\ ,\ y_1)$ ou $A \curvearrowright (x_2\ ,\ y_2)$ porque $\frac{2-4}{1-0} = \frac{(2-4)(-1)}{(1-0)(-1)} = \frac{4-2}{0-1} = -2$.

b) $C \curvearrowright (\underset{\downarrow x_1}{2}\ ,\ \underset{\downarrow y_1}{0})$; $D \curvearrowright (\underset{\downarrow x_2}{4}\ ,\ \underset{\downarrow y_2}{-4})$

$$m = \frac{-4-0}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Aplica-se a fórmula $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

c) $B \curvearrowright (1\ ,\ 2)$; $D \curvearrowright (4\ ,\ -4)$

$$m = \frac{-4-2}{4-1} = \frac{-6}{3} = -2$$

8.2 $2x + 3y - 2 = 0$ — Equação dada.

$3y = -2x + 2$ — Resolve-se a equação em ordem a y.

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ — O declive é o coeficiente de x.

O declive da recta é $-\frac{2}{3}$ e a ordenada na origem é $\frac{2}{3}$.

8

8.1 Calcule o declive e desenhe a recta AB sendo:

a) $A \curvearrowright (1\ ,\ 2)$ e $B \curvearrowright (-3\ ,\ 2)$.

b) $A \curvearrowright (-1\ ,\ 0)$ e $B \curvearrowright (-3\ ,\ -2)$.

c) $A \curvearrowright (-1\ ,\ 5)$ e $B \curvearrowright (-4\ ,\ 2)$.

d) $A \curvearrowright \left(-1\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ e $B \curvearrowright (0\ ;\ 3{,}5)$.

e) $A \curvearrowright (3\ ,\ -7)$ e $B \curvearrowright (-5\ ,\ 2)$.

f) $A \curvearrowright (-3\ ,\ 5)$ e $B \curvearrowright (0\ ,\ 4)$.

8.2 Indique o declive e a ordenada na origem e represente graficamente num plano coordenado as rectas de equação:

a) $x + y - 1 = 0$;

b) $-2x + 3y = 0$;

c) $-3x + 2y - 5 = 0$;

d) $-4x + 6y = 8$.

8.3 Suponha que ao longo de um ano a variação do preço de um produto é representada por um modelo matemático cujo gráfico é uma recta. Explique como variou o preço se o declive é:

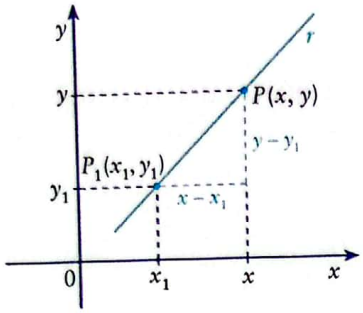
a) positivo;

b) negativo;

c) zero.

Digitalizada com CamScanner

2.8 Equação de uma recta dados um ponto e o declive



Observemos a recta r representada na figura ao lado.

Sabe-se que a recta r contém o ponto $P_1 \curvearrowright (x_1\ ,\ y_1)$ e tem declive m.

Um ponto qualquer $P \curvearrowright (x\ ,\ y)$ com $x \neq x_1$ pertence à recta r se e só se o declive da recta PP_1 for igual a m, ou seja, se:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Assim, esta equação define uma recta que contém o ponto $(x_1\ ,\ y_1)$ e tem declive m.

Logo:

Uma equação da recta r de que se conhece um ponto $P_1 \curvearrowright (x_1\ ,\ y_1)$ e o declive m é:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Observação

É importante memorizar esta fórmula pelo facto de ser uma das que mais se aplicam na resolução de problemas.

Exemplo 9 **Escrever uma equação de uma recta dados um ponto e o declive**

Escreva a equação reduzida da recta r que contém o ponto $A \curvearrowright (2\ ,\ 3)$ e tem declive -2.

Resolução

Vamos aplicar a fórmula $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ em que $(x_1\ ,\ y_1)$ são as coordenadas do ponto da recta que conhecemos, no caso o ponto A, e m é o declive da recta.

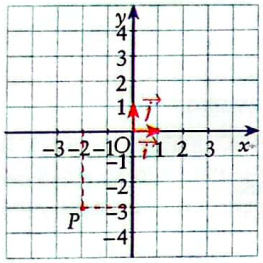
Assim:

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ Substitui-se m por -2 e $(x_1\ ,\ y_1)$ por $(2\ ,\ 3)$.

$y - 3 = -2\,(x - 2) \iff y - 3 = -2x + 4 \iff y = -2x + 7$

9

Num referencial o. n. $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ considere o ponto $P \curvearrowright (-2, -3)$.



Escreva a equação reduzida da recta que contém P e tem:

9.1 declive 2;

9.2 declive -3;

9.3 declive $-\frac{1}{2}$;

9.4 declive 0 (zero);

9.5 como vector director o vector $\vec{u} = (1\ ,\ -5)$;

9.6 como vector director $\vec{v} = \left(-\pi\ ,\ \frac{1}{2}\right)$.

2.9 Equação de uma recta dados dois dos seus pontos

Conhecendo dois pontos $P_1 \curvearrowright (x_1\ ,\ y_1)$ e $P_2 \curvearrowright (x_2\ ,\ y_2)$, determina-se o declive $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e aplica-se a fórmula anterior.

Uma equação da recta que contém os pontos $P_1 \curvearrowright (x_1\ ,\ y_1)$ e $P_2 \curvearrowright (x_2\ ,\ y_2)$ é:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

Observação

Não é necessário memorizar esta fórmula pois ela deduz-se de:

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$,

substituindo m por $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Digitalizada com CamScanner

2.10 Posição relativa de duas rectas no plano

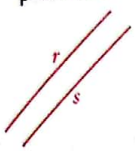
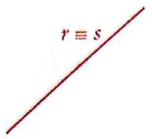
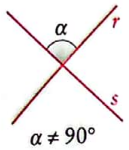
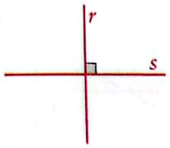
No plano, duas rectas ou são paralelas ou são concorrentes.

Duas rectas não verticais são paralelas se e só se têm o mesmo declive.

Sendo $r: y = m_1 x + b_1$ e $s: y = m_2 x + b_2$ as rectas r e s são paralelas se e só se $m_1 = m_2$.

Do mesmo modo, tem-se:

Duas rectas não verticais são oblíquas se e só se não têm o mesmo declive.

Paralelas	
Estritamente paralelas  $m_r = m_s$	Coincidentes  $m_r = m_s$
Concorrentes ou secantes	
Oblíquas  $\alpha \neq 90°$ $m_r \neq m_s$	Perpendiculares  $m_r \neq m_s$

Observação

No caso de duas rectas paralelas, se são estritamente paralelas têm ordenadas na origem diferentes, se são coincidentes, obviamente, têm a mesma ordenada na origem.

Exemplo 10 **Desenhar uma recta dados um ponto e o declive**

Acerca das rectas r e s sabe-se que:

- a recta r passa pelo ponto $A \curvearrowright (-1, 3)$ e tem declive 2;
- a recta s passa pelo ponto $B \curvearrowright (1, 1)$ e tem declive -3.

10.1 O que pode dizer acerca da posição relativa das rectas r e s?

10.2 Desenhe as rectas r e s num referencial o. n.

Resolução

10.1 As rectas são concorrentes porque têm declives diferentes, pois $2 \neq -3$.

10.2 Recta r:

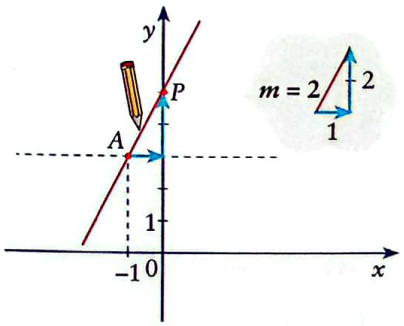
No referencial assinala-se o ponto $A \curvearrowright (-1, 3)$.

Partindo de A desloca-se o lápis 1 unidade para a direita e 2 para cima, visto que:

$$m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1}$$

Obtém-se o ponto P.

Em seguida, desenha-se a recta AP.



Recta s:

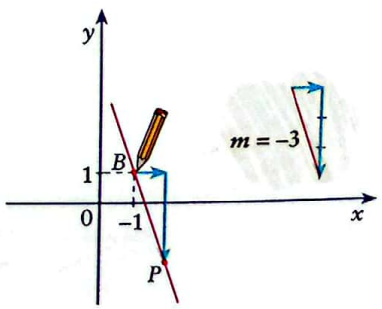
Assinala-se o ponto $B \curvearrowright (1, 1)$.

Partindo de B desloca-se o lápis 1 unidade para a direita e 3 para baixo, pois:

$$m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-3}{1}$$

Obtém-se o ponto P.

Em seguida, desenha-se a recta BP.



10

No plano, indique a posição relativa das rectas r e s sabendo que:

10.1 ambas passam pelo ponto de coordenadas $(-1, 2)$, r tem declive -2 e s tem declive 1.

Em seguida, desenhe as rectas r e s e confirme a sua resposta.

10.2 Considere o ponto:

$A \curvearrowright (2, 2)$.

a) Desenhe a recta r que tem declive -1 e contém o ponto A.

b) Desenhe a recta s que é paralela à recta r e passa pela origem.

c) Escreva a equação reduzida das rectas r e s.

Digitalizada com CamScanner

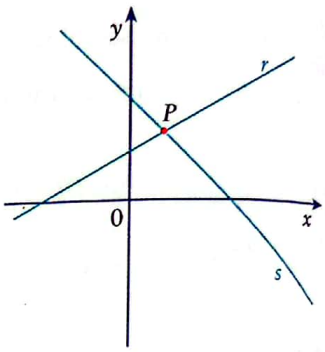
2.11 Determinação do ponto de intersecção de duas rectas conhecidas as suas equações

Sejam r e s duas rectas:

$$r:\ y = m_1 x + b_1 \quad \text{e} \quad s:\ y = m_2 x + b_2$$

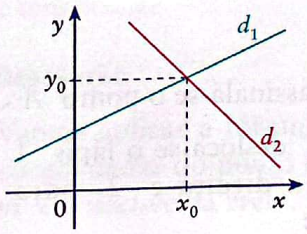
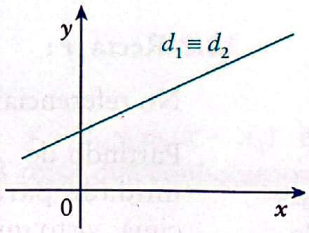
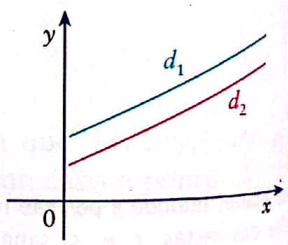
O ponto de intersecção das duas rectas, caso exista, é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases}$$



Se o sistema é impossível as rectas são estritamente paralelas.

No caso de $P \curvearrowright (x_1\ ,\ y_1)$ ser o ponto de intersecção das duas rectas, $(x_1\ ,\ y_1)$ é a solução do sistema.

Sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas		
Possível		**Impossível**
Determinado	Indeterminado	
		
As rectas d_1 e d_2 são concorrentes. O sistema tem uma única solução $(x_0\ ,\ y_0)$.	d_1 e d_2 são coincidentes. O sistema tem uma infinidade de soluções. As soluções do sistema são as soluções da equação d_1 (ou da equação d_2).	d_1 e d_2 são estritamente paralelas. O sistema não tem solução.

Exemplo 11 **Posição relativa de rectas no plano**

Para os seguintes pares de rectas, indique as que são paralelas e as coordenadas do ponto de intersecção no caso de serem concorrentes.

11.1 $r:\ y = -x + 3$ e $s:\ x + y - 2 = 0$;

11.2 $r:\ 2x + y = 0$ e $s:\ 2x = y + 3$;

11.3 $r:\ x - 2y + 1 = 0$ e $s:\ 4y - 2x - 2 = 0$.

Digitalizada com CamScanner

Resolução

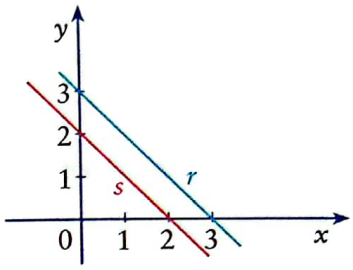
11.1 $\begin{cases} y = -x + 3 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

As rectas têm o mesmo declive ($m = -1$) e ordenadas na origem diferentes, portanto, são estritamente paralelas.

Continuando a tentar resolver o sistema verificamos que ele é impossível.

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ -x + 3 = -x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ 0x = -1 \end{cases} \leftarrow \text{equação impossível}$$

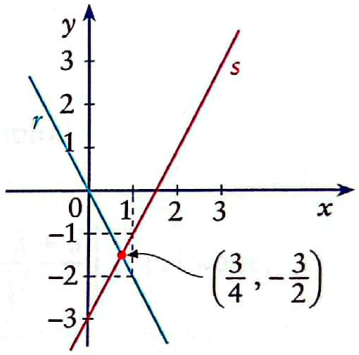


As rectas são **estritamente paralelas.**

11.2 $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -2x = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -4x = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \times \frac{3}{4} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$



As rectas são **concorrentes** e o ponto de intersecção tem coordenadas $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$.

11.3 $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 4y - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = -x - 1 \\ 4y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$

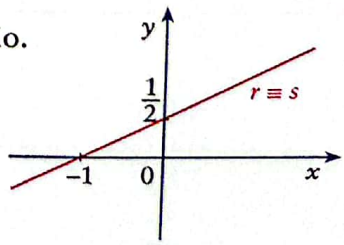
As duas equações são iguais, portanto, as rectas são **coincidentes.**

Continuando a resolver o sistema obtemos um sistema indeterminado.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ 0x = 0 \end{cases} \leftarrow \text{equação indeterminada.}$$

Qualquer valor de x satisfaz esta equação.

A equação $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ não é impossível, pois, para cada valor de x, obtém-se um valor de y. Logo, o sistema é possível e indeterminado.



11

11.1 Para os seguintes pares de rectas, indique as que são paralelas e as coordenadas do ponto de intersecção no caso de serem concorrentes.

a) $x = y$ e $x - y = 2$;

b) $y = 2$ e $\pi x + \pi y + 1 = 0$;

c) $x = \sqrt{2}y$ e $2x + y - 1 = 0$;

d) $1 - x + y = 0$ e $\frac{1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$.

11.2 Considere a família de rectas $y = mx + 1$, $m \in \mathbb{R}$.

Escreva uma equação para a recta s desta família tal que:

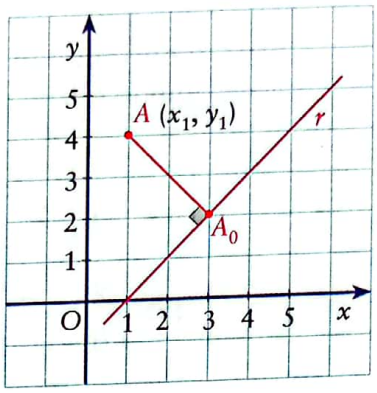
a) tenha como vector director $u = (1, -2)$;

b) seja paralela à recta de equação $2x + 3y - 1 = 0$.

Digitalizada com CamScanner

2.12 Distância de um ponto a uma recta

A distância entre o ponto $A \curvearrowright (x_1 , y_1)$ e a recta r é a distância entre A e a sua projecção ortogonal, A_0, sobre a recta r.



Assim:

$$d(A , r) = \overline{AA_0}$$

Exemplo 12 **Calcular a distância entre um ponto e uma recta**

Calcule a distância entre o ponto $A \curvearrowright (1 , 4)$ e a recta r de equação $-x + y - 1 = 0$.

Resolução

Determinemos as coordenadas do ponto A_0, de intersecção da recta s, que é perpendicular a r e contém A, com r.

Note-se que r é paralela à recta bissectriz dos quadrantes ímpares $(y = x)$, pelo que as suas perpendiculares terão o mesmo declive que a bissectriz dos quadrantes pares $(y = -x)$, isto é, -1.

A recta que passa em $A \curvearrowright (1 , 4)$ e tem declive -1 tem por equação:

$$y - 4 = -(x - 1) \iff y = -x + 5$$

As coordenadas de A_0 obtêm-se resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

logo, $A_0 \curvearrowright (2 , 3)$.

A distância pedida é $d(A , A_0) = \sqrt{(1 - 2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{2}$.

12

Calcule a distância do ponto $A \curvearrowright (1 , 2)$ à recta de equação $3x + y - 5 = 0$.

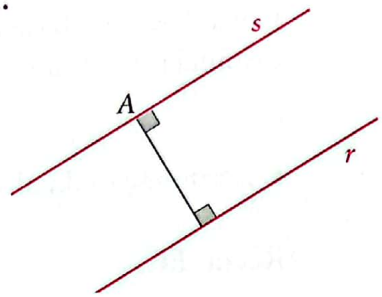
Demonstra-se mais à frente neste manual que a distância de um ponto, $P \curvearrowright (x_1 , y_1)$, a uma recta, r, de equação $Ax + By + C = 0$ é:

$$d(P , r) = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Digitalizada com CamScanner

Distância entre duas rectas paralelas

A distância entre duas rectas paralelas é igual à distância de um ponto de uma recta à outra recta.



Observação

Mostra-se que:

sendo $s: y = mx + b$ uma recta e $P \curvearrowright (x_0, y_0)$ um ponto exterior à recta s, a distância, d, de P a s é dada pela fórmula

$$d(P, s) = \frac{|y_0 - mx_0 - b|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Aplicando esta fórmula, a distância da recta $y = 2x + 5$ ao ponto $P \curvearrowright (0, -1)$ é:

$$d = \frac{|-1 - 2 \times 0 - (+5)|}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Exemplo 13 Calcula a distância entre duas rectas paralelas

Calcula a distância entre as rectas r e s, sendo:

$$r: y = 2x + 3 \quad \text{e} \quad s: y = 2x - 5.$$

Resolução

Seja A um ponto de recta r:

$$A \curvearrowright (0, 3), \text{ por exemplo.}$$

Seja $s: -2x + y + 5 = 0$.

Aplicando a fórmula, vem: $d = \left| \frac{-2 \times 0 + 1 \times 3 + 5}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} \right|$, pelo que,

$$d = \left| \frac{8}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{8\sqrt{5}}{5} \right| = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ unidades.}$$

13

Determine a distância entre as rectas r e s tais que:

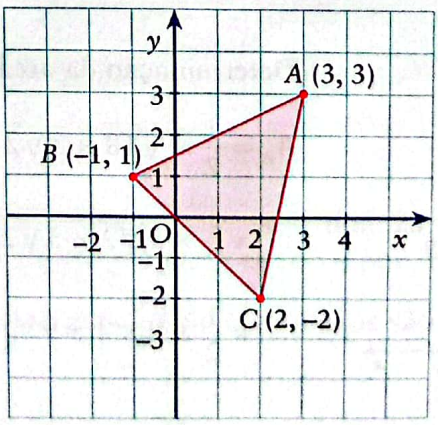
$r: y = -3x + 5$

$s: 3x + y - 8 = 0$

Exemplo 14 Área de um triângulo

Considere o triângulo de vértices:

$$A \curvearrowright (3, 3), \; B \curvearrowright (-1, 1) \text{ e } C \curvearrowright (2, -2).$$



Determine a área do triângulo.

Digitalizada com CamScanner

Resolução

A área de um triângulo é dada pelo produto de metade da base pela altura.

Considera-se a base do triângulo o lado $[BC]$ e a altura do triângulo é a distância de A à recta BC.

Determinação da altura do triângulo de base $[BC]$:

Recta BC

$$m_{BC} = \frac{-2-1}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$y - 1 = -1(x+1) \iff$$

$$\iff y = -x - 1 + 1 \iff$$

$$\iff y = -x$$

A equação da recta BC é $x + y = 0$.

Determinação da distância de $A \curvearrowright (3, 3)$ à recta de equação $x + y = 0$

$$d = \left|\frac{1\times 3 + 1\times 3 + 0}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{6}{\sqrt{2}}\right| = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Distribuição do ponto $A \curvearrowright (x_1, y_1)$ à recta $Ax + By + C = 0$:

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Determinação de $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (-2-1)^2} =$$

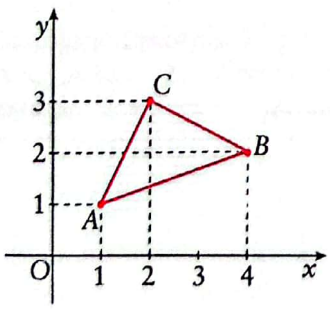
$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Distância entre $P \curvearrowright (x_1, y_1)$ e $Q \curvearrowright (x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 = (y_2 - y_2)^2}.$$

14

Observe a figura.



Determine a área do triângulo $[ABC]$.

Determinação da área do triângulo:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \times \sqrt{18} \times 3\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 2 = 9$$

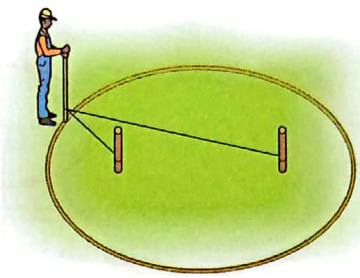
$A_\Delta = \frac{1}{2} \times$ base $\times$ altura

Resposta: A área do triângulo é 9 unidades de área.

Digitalizada com CamScanner

2.13 Estudo da elipse

Observemos como um jardineiro desenha uma elipse.



O jardineiro ata as pontas de um fio a duas estacas. A distância entre as duas estacas é menor que o comprimento do fio.

Mantendo o fio esticado, vai rodando e com a ajuda de outra estaca desenha uma **elipse** no chão.

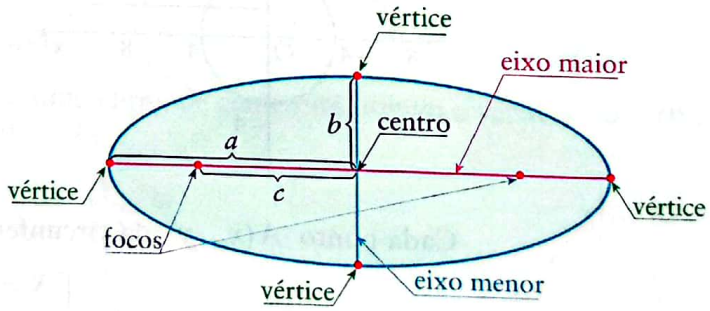
Aos dois pontos fixos chama-se **focos** (F_1 e F_2).

Note que a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos focos é sempre igual ao comprimento do fio.

Elipse

Uma elipse é o conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante e maior que a distância entre eles.

Na elipse consideram-se os seguintes elementos: o centro, o eixo maior, o eixo menor, os focos e os vértices.

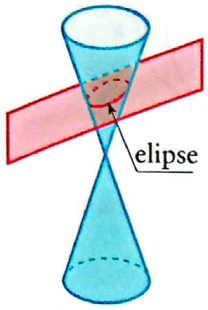


O comprimento do eixo maior representa-se por $2a$, o comprimento do eixo menor por $2b$ e a distância entre os focos por $2c$.

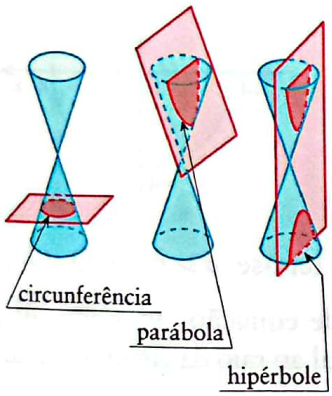
As rectas-suporte do eixo maior e do eixo menor são eixos de simetria da elipse.

Observação

Para se obter uma elipse pode-se intersectar um duplo cone por um plano.



Se o plano tiver outras inclinações obtemos outras secções cónicas.



O estudo das cónicas foi iniciado por Euclides (300 a. C.). Em seguida, Apolónio (260-190 a. C.) destacou-se no estudo das cónicas.

O trabalho destes matemáticos era puramente geométrico.

As expressões algébricas surgiram apenas no século XVII.

As cónicas têm tido um papel muito importante ao longo da história da Matemática.

Kepler (1571-1630) descobriu que as órbitas dos planetas eram elípticas.

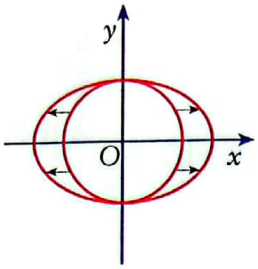
Halley (1659-1712) usou as cónicas para prever que certo cometa (que recebeu o seu nome) aparece de 75 em 75 anos.

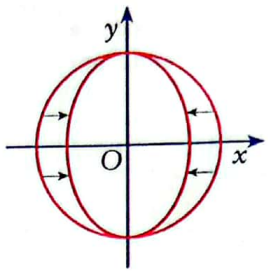
A última vez que foi possível observar, da Terra, o cometa Halley foi em 1986.

Digitalizada com CamScanner

Da equação da circunferência para a equação da elipse

Uma elipse pode ser imaginada como uma circunferência que foi "alongada" ou "achatada".





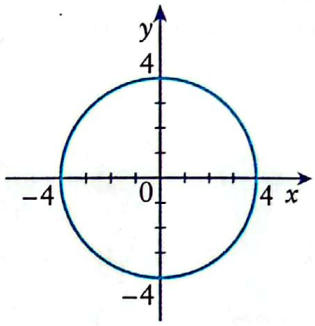
Será que a partir da equação de uma circunferência é possível obter a equação de uma elipse?

Considere-se a circunferência de centro $C \curvearrowright (0\,,\ 0)$ e raio 4.

A equação desta circunferência é $x^2 + y^2 = 4^2$

ou, dividindo ambos os membros por 4^2:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

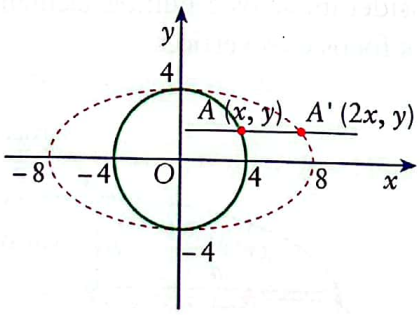


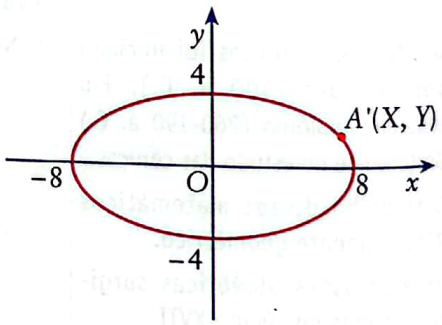
Uma equação de uma elipse surge, normalmente, com a forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Na circunferência tem-se $a = b =$ raio. Na elipse tem-se $a > b$ ou $a < b$.

Através de um alongamento da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4^2$, obtém-se uma elipse em que o semieixo menor é igual ao raio da circunferência:





Cada ponto $A\,(x\,,\ y)$ da circunferência é transformado no ponto:

$A'\,(X\,,\ Y)$ da elipse, sendo: $\begin{cases} X = 2x \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{X}{2} \\ y = Y \end{cases}$

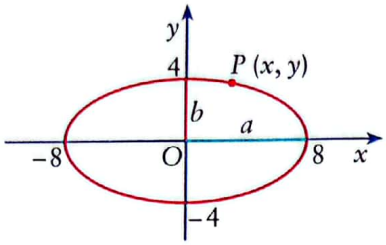
Substituindo, na equação da circunferência, x por $\dfrac{X}{2}$ e y por Y, obtém-se:

$$\left(\frac{X}{2}\right)^2 + Y^2 = 4^2 \Leftrightarrow \frac{X^2}{4} + Y^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{64} + \frac{Y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{8^2} + \frac{Y^2}{4^2} = 1\,.$$

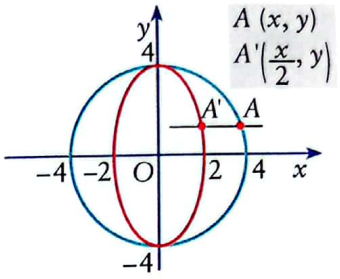
Digitalizada com CamScanner

Assim:



- Elipse de centro na origem
- Semieixo maior: $a = 8$
- Semieixo menor: $b = 4$
- Equação: $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

Se em vez de um alongamento se tivesse procedido a um achatamento da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4^2$, a elipse obtida teria o semieixo maior igual ao raio da circunferência.



Cada ponto $A(x\ ,\ y)$ da circunferência é transformado no ponto:

$A'(X\ ,\ Y)$ da elipse, sendo: $\begin{cases} X = \frac{x}{2} \\ Y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2X \\ y = Y \end{cases}$

Substituindo na equação da circunferência x por $2X$ e y por Y, obtém-se:

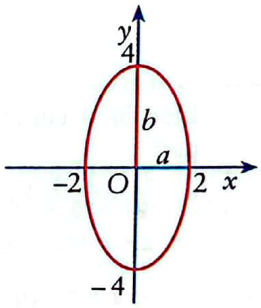
$$(2X)^2 + Y^2 = 4^2 \iff 4X^2 + Y^2 = 16 \iff$$

$$\iff \frac{4X^2}{16} + \frac{Y^2}{16} = 1 \iff \frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{4^2} = 1\ .$$

Assim, a equação $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ define uma elipse de centro na origem, sendo o:

semieixo menor: $a = 2$;

semieixo maior: $b = 4$.



Generalizando:

Considere-se uma elipse de centro na origem e vértices $(a\ ,\ 0)$; $(-a\ ,\ 0)$; $(0\ ,\ b)$ e $(0\ ,\ -b)$.

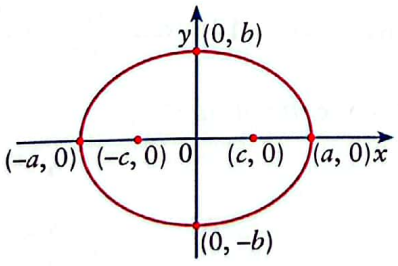


Figura 1

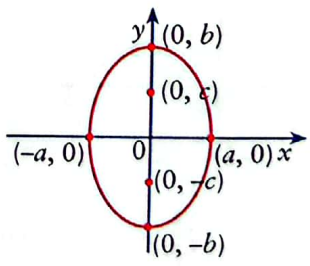


Figura 2

A equação da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

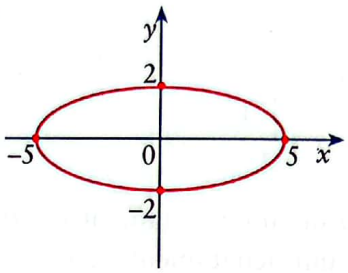
No caso da elipse da figura 1, $a > b$ e, na da figura 2, $a < b$. Repare, também, que os focos situam-se sempre sob o eixo maior.

Digitalizada com CamScanner

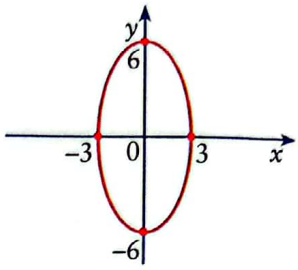
Exemplo 15 Equação da elipse

15.1 Escreva uma equação para cada uma das seguintes elipses:

a)



b)



15.2 Esboce uma representação gráfica para as seguintes elipses:

a) $x^2 + 4y^2 = 4$; **b)** $16x^2 + 9y^2 = 144$.

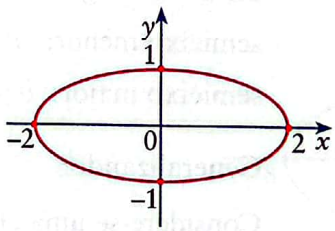
Resolução

15.1 a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \iff \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \iff \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$

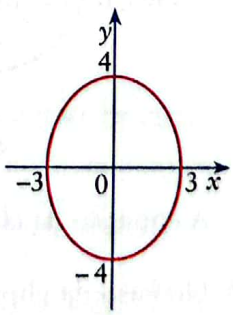
15.2 a) $x^2 + 4y^2 = 4 \iff \frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{4} = 1 \iff \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$

$a = 2$ e $b = 1$ $(a > b)$



b) $16x^2 + 9y^2 = 144 \iff \frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = 1 \iff \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

$a = 3$ e $b = 4$ $(a < b)$



15

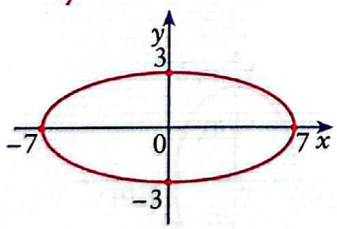
15.1 Desenhe a elipse definida por:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$;

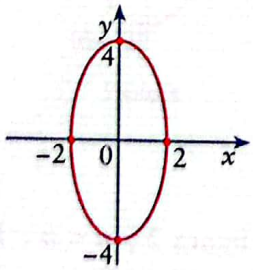
b) $4x^2 + 16y^2 = 64$.

15.2 Escreva uma equação que defina cada uma das elipses:

a)



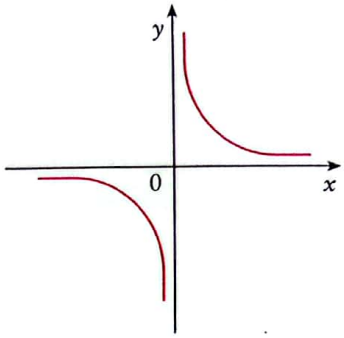
b)



Digitalizada com CamScanner

2.14 Estudo da hipérbole

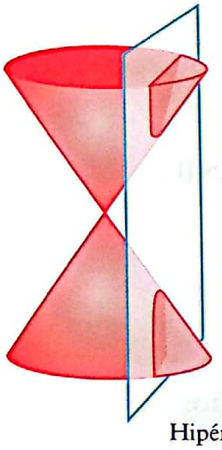
A uma curva como a que representa o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ chama-se **hipérbole.**



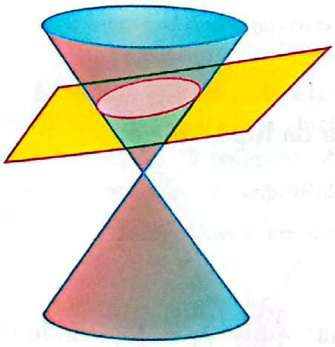
Uma curva com esta forma pode ser obtida como as outras cónicas por cortes num duplo cone.

A definição de hipérbole é muito parecida com a definição de elipse.

Na elipse a soma das distâncias entre um ponto da elipse e os focos é constante enquanto que na hipérbole a diferença entre essas distâncias é constante.



Hipérbole



Elipse

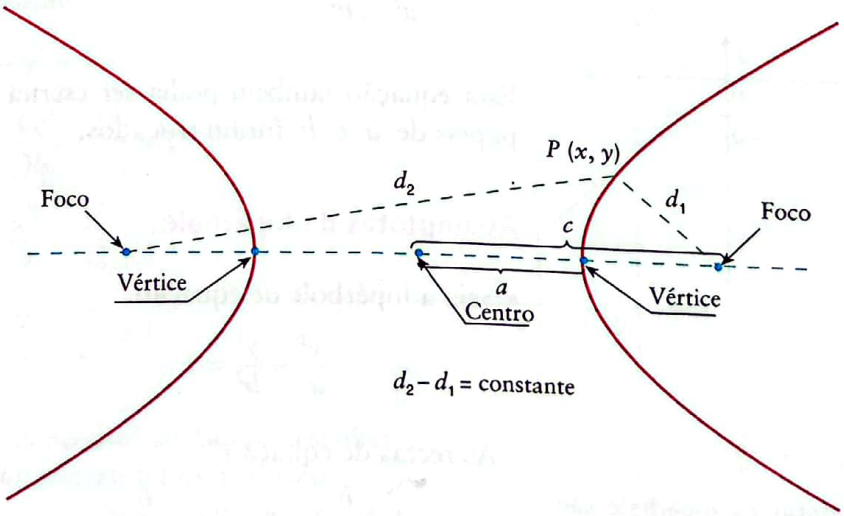
Hipérbole

Hipérbole é o conjunto dos pontos do plano tais que o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante e menor que a distância entre eles.

Aos pontos fixos, normalmente designados por F_1 e F_2, dá-se o nome de **focos** da hipérbole.

Tem dois eixos de simetria que se intersectam num ponto que é o **centro de simetria** da hipérbole.

Ao eixo que contém os focos chama-se **eixo transverso** e intersecta a hipérbole em dois pontos, os **vértices** da hipérbole.



Considere-se a hipérbole de centro na origem, de focos $F_1 \curvearrowright (c\ ,\ 0)$ e $F_2 \curvearrowright (-c\ ,\ 0)$, e sendo $2a$ a constante a que se refere a definição.

Observação

Alguns cometas descrevem uma trajectória hiperbólica sendo o Sol um dos focos.

Alguns telescópios combinam espelhos parabólicos com espelhos hiperbólicos.

Outra importante aplicação das hipérboles consiste na transmissão de sinais sonoros nos sistemas de navegação e aéreo.

Digitalizada com CamScanner

Sendo $P \curvearrowright (x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole, vem:

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

E, sucessivamente:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+x^2-2cx+c^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

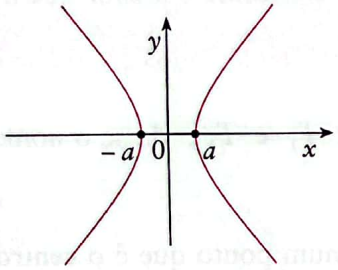
$$\Leftrightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

Pela definição, como

$2c > 2a \Leftrightarrow c > a$ e $c^2 - a^2 > 0$, porque $a > 0$ e $c > 0$.

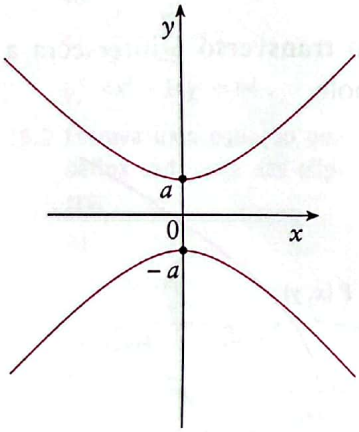


Então, fazendo $b^2 = c^2 - a^2$, vem:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e dividindo os dois membros por a^2b^2, vem a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ → Equação reduzida da hipérbole de eixo transverso horizontal



Se o eixo transverso é vertical, a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ → Equação reduzida da hipérbole de eixo transverso vertical

Esta equação também podia ser escrita na forma $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, onde os papéis de a e b foram trocados.

Assimptotas da hipérbole

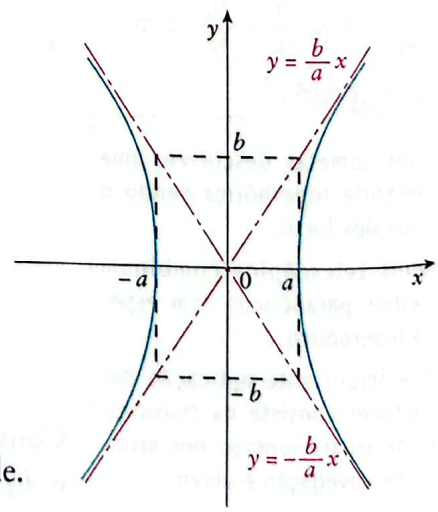
- Seja a hipérbole de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

As rectas de equação:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

são as assimptotas do gráfico da hipérbole.



Observação

Assimptotas da hipérbole são rectas que se aproximam cada vez mais da curva sem que estas e a curva se toquem.

Digitalizada com CamScanner

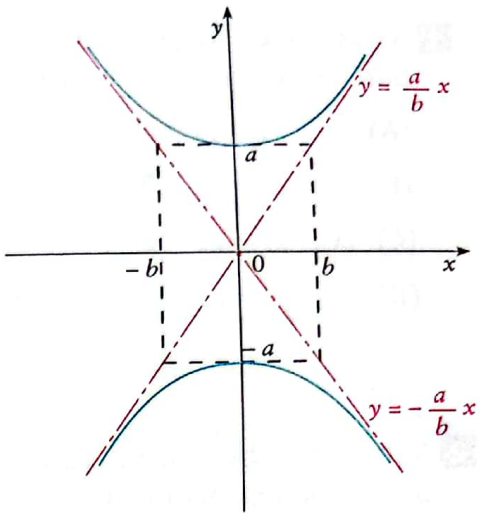
• Seja a hipérbole de equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

As rectas de equação:

$$y = \frac{a}{b}x \text{ e } y = -\frac{a}{b}x$$

são as **assimptotas** do gráfico da hipérbole.



No caso do centro da hipérbole ser o ponto $C \curvearrowright (h, k)$, as equações das assimptotas serão as rectas de equação:

$y = k + \frac{b}{a}(x-h)$ e $y = k - \frac{b}{a}(x-h)$ para o eixo transverso horizontal;

ou

$y = k + \frac{a}{b}(x-h)$ e $y = k - \frac{a}{b}(x-h)$ para o eixo transverso vertical.

Exemplo 16 **Desenhar uma hipérbole**

Faça a representação geométrica da hipérbole cuja equação é:

$$4x^2 - y^2 = 36$$

Escreva as equações das assimptotas da hipérbole.

Resolução

$4x^2 - y^2 = 36$

$\iff \frac{4x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$

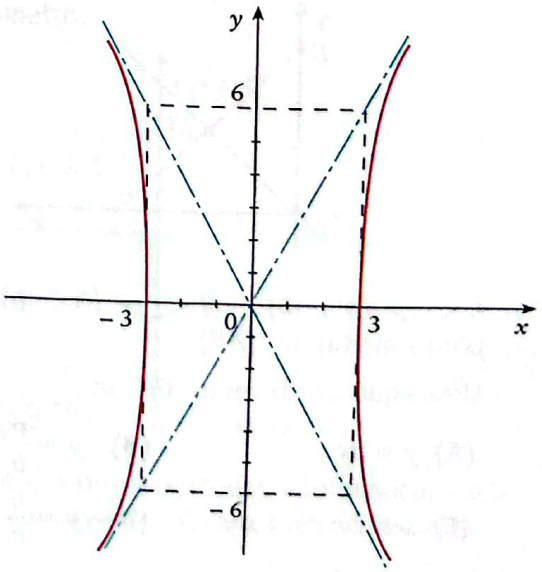
$\iff \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

$\iff \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$

As assimptotas ajudam a desenhar o gráfico com maior precisão.

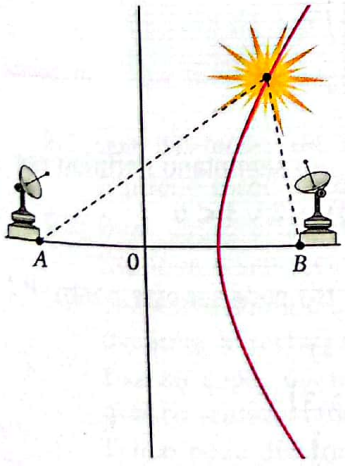
As equações das assimptotas são:

$$y = 2x \text{ e } y = -2x$$



16

Dois receptores de som distanciados de 10 km recebem o sinal de uma explosão. O receptor A recebe a informação 2 segundos depois do receptor B.



O som desloca-se a uma velocidade de 340 m/s.

Onde terá acontecido a explosão?

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Sejam $A \curvearrowright (1, 2)$ e $B \curvearrowright (3, 5)$.
Qual das seguintes é uma equação vectorial de AB?

(A) $(x, y) = (1, 2) + k(3, 5),\ k \in \mathbb{R}$

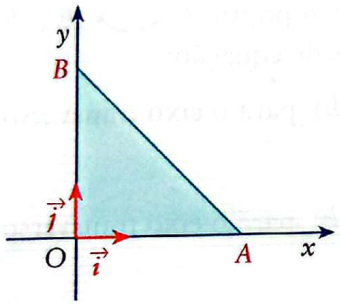
(B) $(x, y) = (3, 5) + k(1, 2),\ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y) = (1, 2) + k(-3, 7),\ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y) = (3, 5) + k(-2, -3),\ k \in \mathbb{R}$

10 pontos

2 Num referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $[OAB]$ é um triângulo rectângulo em O, isósceles e $A \curvearrowright (a, 0)$.



Uma equação da recta AB é:

(A) $y = x - a$;

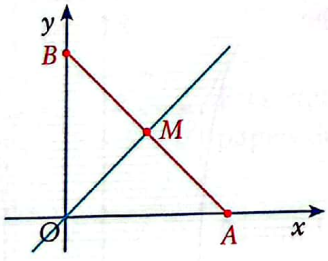
(B) $y = x + a$;

(C) $y = -x + a$;

(D) $y = -x - a$.

10 pontos

3 Num referencial o. n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $[OAB]$ é um triângulo rectângulo em O.



$A \curvearrowright (a, 0)$, $B \curvearrowright (0, b)$ e M é o ponto médio de $[AB]$.

Uma equação da recta OM é:

(A) $y = ax$;

(B) $y = \frac{a}{b}x$;

(C) $y = bx$;

(D) $y = \frac{b}{a}x$.

10 pontos

4 Num referencial o. n., d_1, d_2, d_3, d_4 e d_5 são rectas com as seguintes equações:

$d_1 : y = \frac{5}{2}x$

$d_2 : y = \frac{2x + 1}{5}$

$d_3 : y = \frac{-2 + 2x}{3}$

$d_4 : y = \frac{4x + 1}{6}$

$d_5 : -2y + 5x - \sqrt{2} = 0$

Pode afirmar-se que:

(A) d_1 é paralela a d_2;

(B) d_1 é paralela a d_4;

(C) d_1 é paralela a d_5;

(D) d_3 é concorrente a d_4.

10 pontos

5 O sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y = \frac{-5 - 6x}{3} \end{cases}$$

(A) não tem solução;

(B) tem uma infinidade de soluções;

(C) tem como solução o par ordenado $(x, y) = (0, -1)$;

(D) tem como solução o par ordenado $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

10 pontos

6 Num referencial o. n., o semiplano definido por

$$-2x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} \leqslant 0$$

contém o ponto P.
Qual dos seguintes pontos pode ser esse ponto P?

(A) $P \curvearrowright (-2, -3)$

(B) $P \curvearrowright (0, -2\sqrt{3})$

(C) $P \curvearrowright (-\sqrt{2}, 0)$

(D) $P \curvearrowright (-2, 0)$

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

7 Num referencial o. n. são dados os pontos: $M \curvearrowright (-1, 2)$, $N \curvearrowright \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e a equação vectorial da recta AB: $(x, y) = (-1, 2) + k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.
Determine:

7.1 uma equação vectorial da recta MN;

7.2 a equação reduzida da recta que passa por M e é paralela à recta AB;

7.3 o ponto da recta AB que tem ordenada nula;

7.4 uma equação vectorial de uma das semi-rectas que tem origem em N e é paralela à recta AB.

20 (4 × 5) pontos

8 Explique como, num referencial o. n., se:

8.1 desenha uma recta conhecidos um dos seus pontos e um vector director;

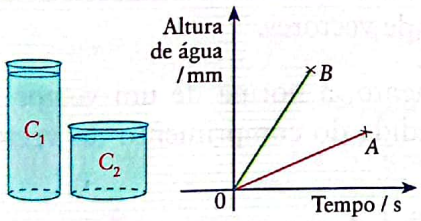
8.2 verifica se um ponto pertence à recta de equação $ax + by + c = 0$;

8.3 verifica se duas rectas são paralelas sem resolver o sistema das duas equações que as definem;

8.4 verifica se um ponto pertence ao semiplano definido pela inequação $ax + by + c \geqslant 0$.

30 (7 + 7 + 8 + 8) pontos

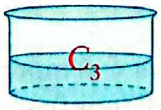
9 Observe o gráfico que mostra a altura da água nos copos C_1 e C_2 ao longo do tempo de enchimento pela mesma torneira totalmente aberta.



9.1 Qual das rectas OA ou OB tem maior declive? Explique o seu raciocínio.

9.2 Qual dos gráficos se refere ao copo C_1? Explique o seu raciocínio.

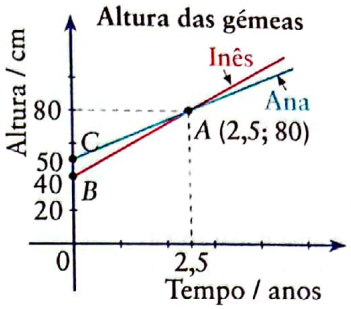
9.3 Considere agora o copo C_3. Desenhe a recta OC relativa ao copo C_3 no mesmo gráfico representado acima.



O que pode dizer acerca do declive m_3 da recta OC relativamente ao declive das rectas OA e OB?

30 (10 + 10 + 10) pontos

10 O gráfico mostra a altura de duas gémeas.



10.1 Com que idade tinham as gémeas a mesma altura?

10.2 Qual das duas nasceu com maior altura? Qual foi a diferença de altura à nascença?

10.3 Escreva uma equação para a recta AB.

10.4 Escreva uma equação para a recta AC.

10.5 Qual era a altura da Ana quando tinha 2 anos de idade?

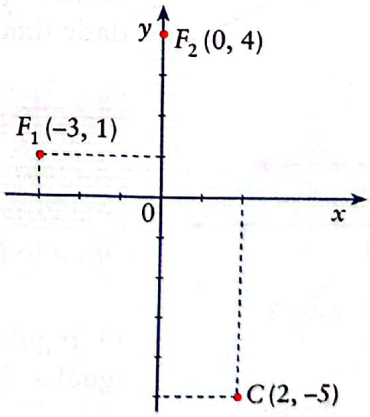
10.6 Qual era a altura da Inês com 5 anos de idade?

30 (3 + 3 + 9 + 9 + 3 + 3) pontos

11 A instalação da estação de tratamento de lixo.

Uma câmara pretende construir uma estação de tratamento de lixo situada a três quilómetros do centro da cidade C e equidistante das fábricas F_1 e F_2.

No mapa da cidade podem ler-se as coordenadas dos pontos C, F_1 e F_2. A unidade de medida é o quilómetro.



Determine o valor exacto das coordenadas do(s) ponto(s) onde deve ser colocada a referida estação.

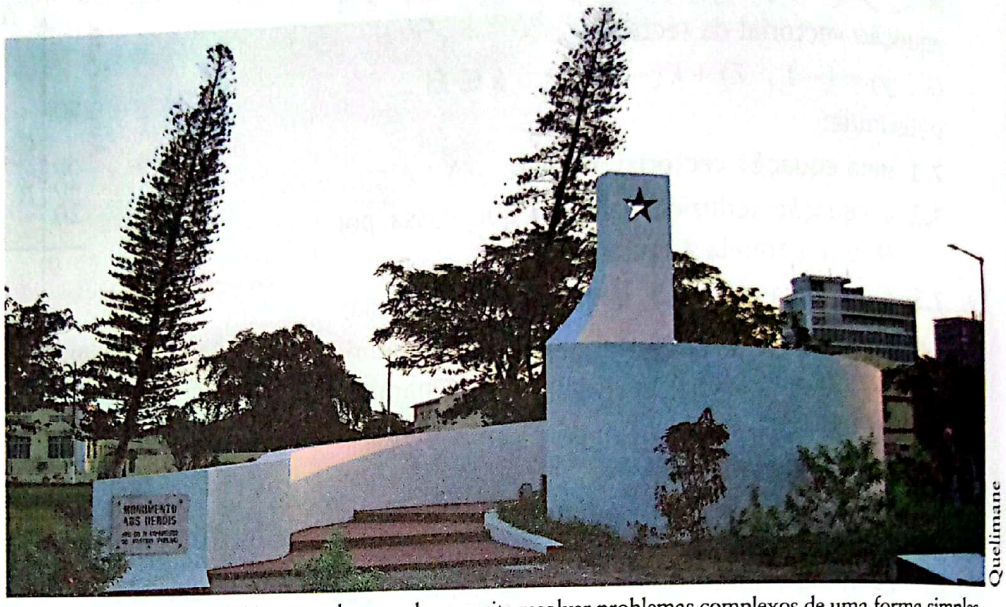
30 pontos

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Determinar o ângulo de duas rectas no plano.
2. Determinar a inclinação de uma recta no plano.
3. Relacionar o declive de duas rectas perpendiculares.
4. Determinar uma equação da mediatriz de um segmento de recta.
5. Determinar uma equação da recta tangente a uma circunferência num ponto dado.

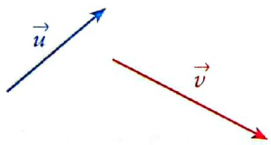
3. Produto escalar de dois vectores no plano



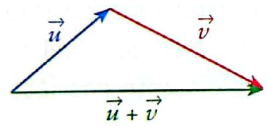
Quelimane

Na Matemática como na Física o produto escalar permite resolver problemas complexos de uma forma simples.

3.1 Produto escalar de vectores. Definição

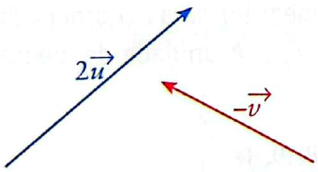


Já estudámos a adição de vectores e sabemos que a soma de dois vectores é um vector.



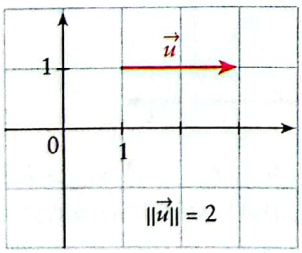
Já estudámos o produto de um número real por um vector e sabemos que esse produto é um vector.

O produto escalar de vectores é também uma operação com vectores mas o resultado dessa operação é um **número real** e não um vector.



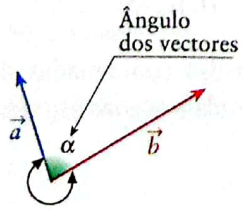
Na definição de produto escalar de vectores entram dois conceitos geométricos: norma de um vector e ângulo de vectores.

Fixada uma unidade de comprimento, a norma de um vector $\vec{u}$ representa-se por $||\vec{u}||$ e é igual à medida do comprimento do vector na unidade fixada.



Ângulo de dois vectores

Ângulo de dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não nulos, é o ângulo convexo formado por dois segmentos de recta seus representantes, com origem no mesmo ponto.

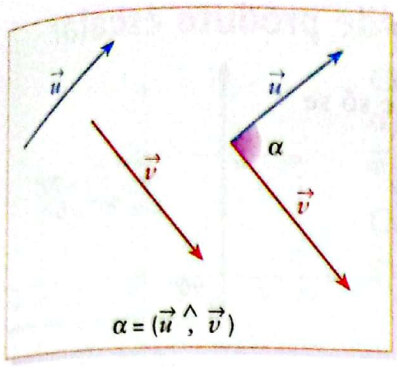


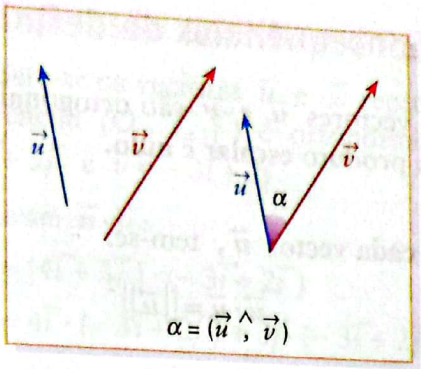
O ângulo de dois vectores é sempre superior ou igual a $0°$ e inferior ou igual a $180°$, ou, em radianos, varia entre 0 e π (inclusive).

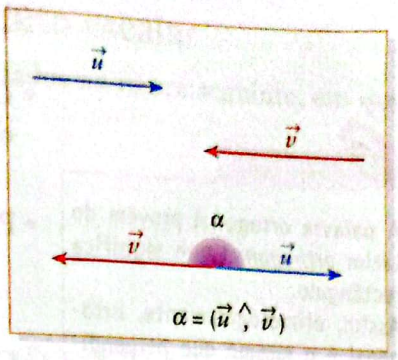
No plano é sempre possível representar dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem, deslocando um deles ou os dois.

Sendo α o ângulo de dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, α representa-se por $(\vec{u}, \hat{\ }, \vec{v})$ ou $(\vec{v}, \hat{\ }, \vec{u})$ e tem-se $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ (ou em radianos, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$).

Digitalizada com CamScanner







Observação

O produto escalar também se representa por $\vec{u}|\vec{v}$ e também se chama produto interno, mas não se trata de uma operação interna, pois o produto de dois vectores não é um vector, mas sim um número real.

Na história da Matemática foi a primeira vez que se definiu uma operação em que o produto de duas quantidades de um dado tipo não era uma quantidade desse tipo.

Produto escalar

O produto escalar de dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, do plano ou do espaço, representa-se por $\vec{u}\cdot\vec{v}$ e é dado por:

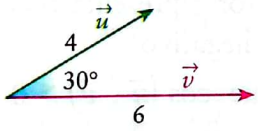
$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) \text{ se } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ e } \vec{v}\neq\vec{0} \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \text{ se } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \text{ ou } \cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = 0 \end{cases}$$

O produto escalar de dois vectores é um **número real.**

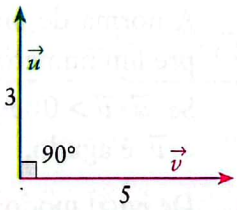
Exemplo 1 — Calcular o produto escalar de dois vectores

Calcule o produto escalar, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, em cada um dos casos seguintes.

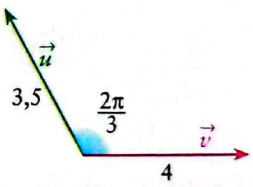
1.1



1.2



1.3



Os números associados aos vectores representam as respectivas normas.

Resolução

1.1 $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4 \times 6 \times \cos 30°$ — $\|\vec{u}\| = 4$; $\|\vec{v}\| = 6$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ — $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = 30°$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 12\sqrt{3}$ — $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1.2 $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3 \times 5 \times \cos 90°$ — $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 5$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3 \times 5 \times 0$ — $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = 90°$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ — $\cos 90° = 0$

1.3 $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3{,}5 \times 4 \times \cos\frac{2\pi}{3}$ — $\|\vec{u}\| = 3{,}5$; $\|\vec{v}\| = 4$

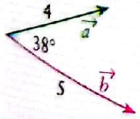
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3{,}5 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ — $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -7$ — $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

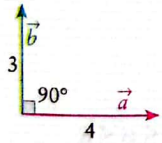
E 1

Determine $\vec{a}\cdot\vec{b}$, sendo:

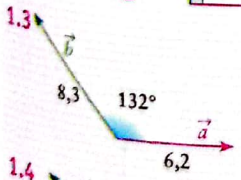
1.1



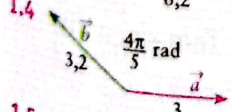
1.2



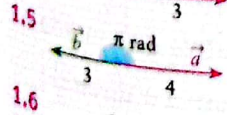
1.3



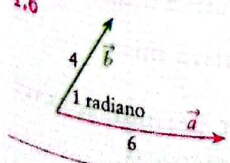
1.4



1.5



1.6



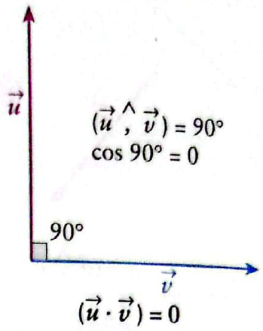
Digitalizada com CamScanner

3.2 Consequências da definição de produto escalar

Observação

A palavra ortogonal provém do latim *orthogonus* que significa rectângulo.
Assim, etimologicamente, ortogonal é o mesmo que perpendicular.
Neste caso, utiliza-se o termo ortogonal porque o vector nulo é ortogonal a qualquer outro vector, mas não se pode dizer que é perpendicular a algum. Se $\vec{a}$ é o vector nulo pode-se dizer que os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais, mas não se deve dizer que são perpendiculares.

- **Dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se e só se o seu produto escalar é nulo.**



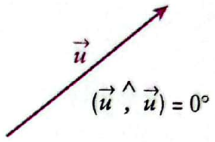
- **Para cada vector $\vec{u}$, tem-se:**

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

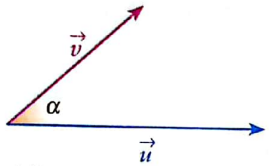
Com efeito,

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos 0°$

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ ou $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$



- **Se $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$, então o ângulo dos dois vectores é agudo.**



$0° < \alpha < 90°$ ou, em radianos, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

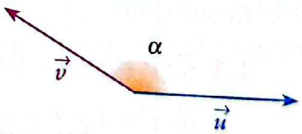
O produto escalar, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, é o produto de três números: a norma de $\vec{u}$, a norma de $\vec{v}$ e o co-seno do ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

A norma de um vector representa o comprimento deste, portanto, é sempre um número não negativo.

Se $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ é porque $\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) > 0$, ou seja, o ângulo dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo.

De igual modo:

- **Se $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$, então o ângulo dos dois vectores é obtuso.**



$90° < \alpha < 180°$ ou, em radianos, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

3.3 Propriedades do produto escalar

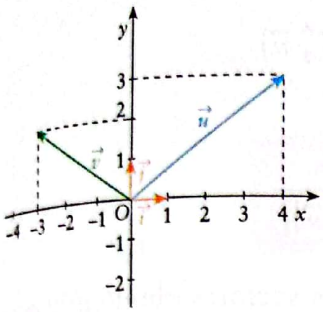
Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vectores arbitrários do plano e $t \in \mathbb{R}$. Tem-se então:

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (propriedade comutativa)
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$ (propriedade distributiva à esquerda)
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ (propriedade distributiva à direita)
- $(t\,\vec{u})\cdot\vec{v} = t\,(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(t\,\vec{v})$ (propriedade associativa mista)

O conhecimento das propriedades do produto escalar permite resolver alguns problemas de demonstração de propriedades geométricas.

Digitalizada com CamScanner

3.4 Expressão analítica do produto escalar



Considere-se os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados na figura seguinte, em que o referencial $(O, \vec{i}, \vec{j})$ é ortonormado.

$\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$

Calcule-se: $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (4\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} + 2\vec{j}) \\
&= 4\vec{i} \cdot (-3\vec{i} + 2\vec{j}) + 3\vec{j} \cdot (-3\vec{i} + 2\vec{j}) \\
&= (4\vec{i}) \cdot (-3\vec{i}) + 4\vec{i} \cdot (2\vec{j}) + (3\vec{j}) \cdot (-3\vec{i}) + (3\vec{j}) \cdot (2\vec{j}) \\
&= -12 \left\|\vec{i}\right\|^2 + 8\,(\vec{i} \cdot \vec{j}) - 9\,(\vec{j} \cdot \vec{i}) + 6 \left\|\vec{j}\right\|^2 \\
&= -12 \left\|\vec{i}\right\|^2 + 0 - 0 + 6 \left\|\vec{j}\right\|^2 \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ porque } \vec{i} \perp \vec{j} \\
&= -12 + 6 = -6\,. \qquad \left\|\vec{i}\right\|^2 = 1 \text{ e } \left\|\vec{j}\right\|^2 = 1
\end{aligned}$$

Como $\vec{u} = (4, 3)$ e $\vec{v} = (-3, 2)$, uma forma mais simples de cálculo seria

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4, 3) \cdot (-3, 2) = -12 + 6 = -6$$

Multiplicam-se as abcissas.
Multiplicam-se as ordenadas.
Adicionam-se os produtos.

De um modo geral, para $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$, temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot (c\vec{i} + d\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a\vec{i}) \cdot (c\vec{i}) + (a\vec{i}) \cdot (d\vec{j}) + (b\vec{j}) \cdot (c\vec{i}) + (b\vec{j}) \cdot (d\vec{j})$$

Logo,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac \left\|\vec{i}\right\|^2 + \underbrace{(ad)\,(\vec{i} \cdot \vec{j})}_{=0} + \underbrace{(bc)\,(\vec{j} \cdot \vec{i})}_{=0} + bd \left\|\vec{j}\right\|^2 \qquad \vec{i} \perp \vec{j}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$$

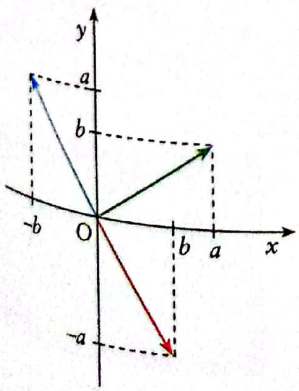
Se $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$, num referencial o.n.

Vectores ortogonais

Considere num referencial o.n. Oxy os vectores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$.

Tem-se que:

$\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$ são ortogonais se e só se $ac + bd = 0$.



Em particular, sendo $\vec{u} = (a, b)$ um vector não nulo, os vectores $(-b, a)$ ou $(b, -a)$ são ortogonais ao vector $\vec{u}$, pois:

$(a, b) \cdot (-b, a) = -ab + ab = 0$

$(a, b) \cdot (b, -a) = ab - ab = 0$

Por exemplo, $\vec{u} = (2, 3)$ é ortogonal a $\vec{v} = (-3, 2)$, mas também é ortogonal a $\vec{w} = (3, -2)$.

Digitalizada com CamScanner

Ângulo de dois vectores

Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vectores não nulos sabe-se que:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$$

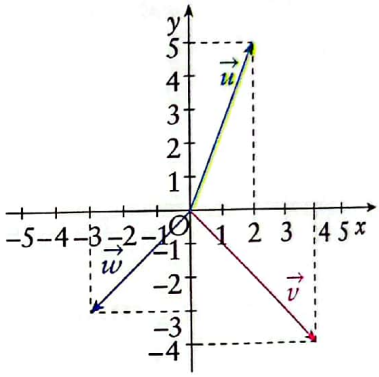
donde se conclui que:

$$\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

A partir do valor do co-seno do ângulo de dois vectores obtido pelo quociente entre o produto escalar dos dois vectores e o produto das suas normas, determina-se a amplitude desse ângulo, como a seguir se exemplifica.

Exemplo 2 **Cálculo do produto escalar de dois vectores**

No referencial o. n. Oxy da figura estão representados os vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



2.1 Escreva as coordenadas de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e, em seguida, calcule:

$\vec{u}\cdot\vec{v}$; $\vec{u}\cdot\vec{w}$ e $\vec{w}\cdot\vec{v}$.

2.2 Determine $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$.

Resolução

2.1 $\vec{u} = (2\ ,\ 5)$; $\vec{v} = (4\ ,\ -4)$ e $\vec{w} = (-3\ ,\ -3)$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\ ,\ 5)\cdot(4\ ,\ -4) = 8 - 20 = -12$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = (2\ ,\ 5)\cdot(-3,\ -3) = -6 - 15 = -21$$

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = (-3\ ,\ -3)\cdot(4\ ,\ -4) = -12 + 12 = 0 \qquad \vec{w} \perp \vec{v}$$

3.2 $\vec{u} = (2\ ,\ 5)$ e $\vec{v} = (4\ ,\ -4)$;

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -12$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$

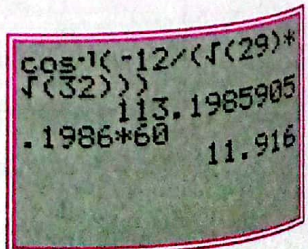
$$\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

$$\cos(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \frac{-12}{\sqrt{29} \times \sqrt{32}}$$

Com a ajuda da calculadora gráfica vem:

$(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) \approx (113{,}20)^\circ$ ou

$(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) \approx 113^\circ\ 12'$.



2

2.1 Considere, num referencial o. n. Oxy, os vectores: $\vec{u} = (-2\ ,\ 5)$; $\vec{v} = (3\ ,\ 2)$ e $\vec{w} = (2\ ,\ -5)$.

a) Represente os vectores num referencial.

b) Calcule: $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$; $\|\vec{w}\|$.

c) Calcule: $\vec{u}\cdot\vec{v}$; $\vec{v}\cdot\vec{w}$; $\vec{u}\cdot\vec{w}$.

d) Calcule:

d_1) $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v})$;

d_2) $(\vec{v}\,\hat{,}\,\vec{w})$;

d_3) $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{w})$.

2.2 Considere num referencial o. n. Oxy os pontos:

$A \curvearrowright (3\ ,\ 4)$

$B \curvearrowright (-2\ ,\ 1)$

$C \curvearrowright (-4\ ,\ -2)$

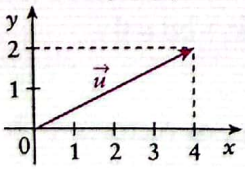
a) Calcule:

a_1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; a_2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}$.

b) Determine o ângulo dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$.

2.3 Considere num referencial o. n. Oxy o vector:

$\vec{u} = (4\ ,\ 2)$



e escreva:

a) as coordenadas de 3 vectores perpendiculares a $\vec{u}$;

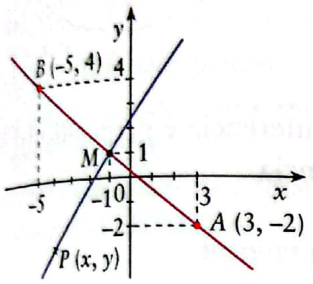
b) a expressão geral que representa todos os vectores do plano perpendiculares ao vector $\vec{u}$.

Digitalizada com CamScanner

3.5 Aplicações do produto escalar

O produto escalar tem aplicação prática na resolução de problemas que envolvem perpendicularidade, como se mostra nos exemplos seguintes.

Exemplo 3 Mediatriz de um segmento de recta



Considere num referencial o. n. Oxy os pontos A e B.
Sendo $A \curvearrowright (3\ ,\ -2)$ e $B \curvearrowright (-5\ ,\ 4)$, escreva uma equação da mediatriz do segmento de recta $[AB]$.

Resolução

Pretende-se determinar uma equação da recta PM sendo P um ponto qualquer da mediatriz e M o ponto médio de $[AB]$.

Sabe-se que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

A mediatriz é perpendicular ao segmento no seu ponto médio, logo, $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{AB}$.

$P \curvearrowright (x\ ,\ y)$

$M \curvearrowright \left(\frac{3-5}{2}\ ,\ \frac{-2+4}{2}\right) = (-1\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{MP} = P - M = (x\ ,\ y) - (-1\ ,\ 1) = (x+1\ ,\ y-1)$

$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff (x+1\ ,\ y-1) \cdot (-8\ ,\ 6) = 0 \iff$ $\overrightarrow{AB} = B - A = (-8\ ,\ 6)$

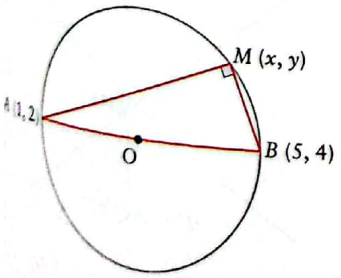
$\iff (x+1) \times (-8) + (y-1) \times 6 = 0 \iff$

$\iff -8x - 8 + 6y - 6 = 0 \iff$ $\big) : -2$

$\iff 4x - 3y + 7 = 0$

Logo, uma equação da mediatriz de $[AB]$ é $4x - 3y + 7 = 0$ ou a sua equação reduzida é $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$.

Exemplo 4 Equação de uma circunferência



Considere, num referencial o. n. Oxy os pontos A e B.
Sendo $A \curvearrowright (1\ ,\ 2)$ e $B \curvearrowright (5\ ,\ 4)$, escreva uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$.

Resolução

Seja M um ponto qualquer da circunferência.

Sabe-se que todo o ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo recto e que, portanto, $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MA}$, logo $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

$\overrightarrow{MB} = B - M = (5 - x\ ,\ 4 - y)$

$\overrightarrow{MA} = A - M = (1 - x\ ,\ 2 - y)$

$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} = (5 - x\ ,\ 4 - y) \cdot (1 - x\ ,\ 2 - y) =$

$= 5 - 5x - x + x^2 + 8 - 4y - 2y + y^2$

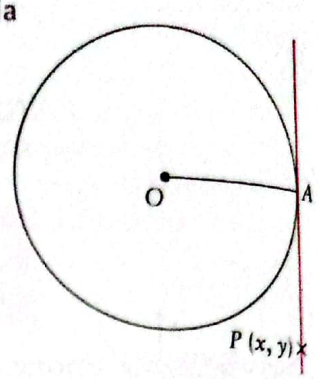
Então, uma equação da circunferência é $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 5 Recta tangente a uma circunferência

Considere num referencial o. n. Oxy os pontos $O \curvearrowright (1, 2)$ e $A \curvearrowright (5, 3)$.

Considere a circunferência de centro no ponto O e escreva uma equação da recta tangente a esta circunferência no ponto A.



Resolução

Sabe-se que toda a recta tangente a uma circunferência é perpendicular à recta que passa no centro e no ponto de tangência.

Seja $P \curvearrowright (x, y)$ um ponto qualquer da recta tangente,

então $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$.

$\overrightarrow{OA} = A - O = (5, 3) - (1, 2) = (4, 1)$

$\overrightarrow{PA} = A - P = (5, 3) - (x, y) = (5 - x, 3 - y)$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \iff (4, 1) \cdot (5 - x, 3 - y) = 0 \iff$$
$$\iff 20 - 4x + 3 - y = 0 \iff$$
$$\iff 4x + y - 23 = 0$$

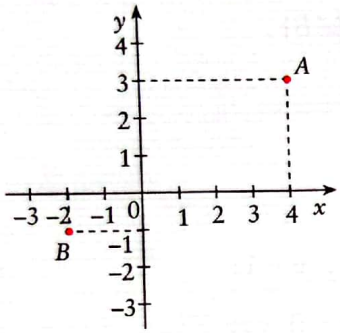
Logo, uma equação da recta tangente é $4x + y - 23 = 0$.

3

Considere num referencial o. n. Oxy os pontos:

$A \curvearrowright (4, 3)$

$B \curvearrowright (-2, 1)$



3.1 Escreva as coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$.

3.2 Usando a definição de produto escalar, escreva uma equação:

a) da mediatriz de $[AB]$;

b) da circunferência de diâmetro $[AB]$;

c) da tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$, no ponto B.

3.3 Num referencial o. n. Oxy, considere os pontos A e B, tais que:

$A \curvearrowright (1, 0)$

$B \curvearrowright (-1, 4)$

Determine uma equação para:

a) a mediatriz de $[AB]$;

b) a circunferência de centro A e que contém B;

c) a tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ no ponto A;

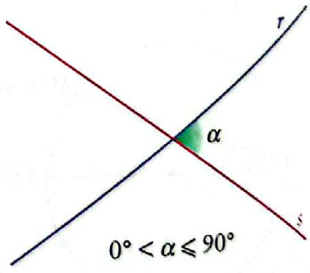
d) a recta perpendicular à recta AB e que contém a origem das coordenadas.

3.6 Ângulo de duas rectas. Rectas perpendiculares

Desenhemos duas rectas concorrentes r e s.

As rectas definem no plano quatro ângulos iguais dois a dois.

Ao ângulo de menor valor chama-se **ângulo das duas rectas.**



Ângulo de duas rectas

Dadas duas rectas r e s concorrentes, chama-se ângulo das duas rectas ao menor ângulo por elas definido.

O ângulo de duas rectas é sempre menor ou igual a $90°$.

O ângulo de duas rectas paralelas é $0°$ e o ângulo de duas rectas perpendiculares é $90°$.

Digitalizada com CamScanner

Observação

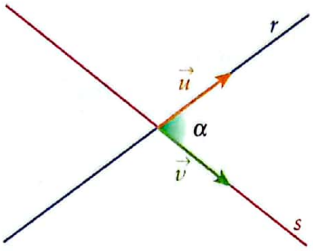
Se m é o declive da recta r, então $\vec{u} = (1, m)$ é um vector director de r.

Observação

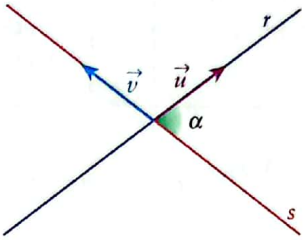
- $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$ são positivos.
- O produto escalar pode ser positivo ou negativo.
- O módulo do quociente é igual ao quociente dos módulos.

Determinação do ângulo de duas rectas

Observemos as figuras em que α representa o ângulo das rectas r e s.



$\cos \alpha = \cos (\vec{u}, \vec{v})$



$\cos \alpha = -\cos (\vec{u}, \vec{v})$

Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vectores directores das rectas r e s, respectivamente, o co-seno do ângulo das duas rectas é igual ao valor absoluto do co-seno do ângulo dos dois vectores.

$$\cos \alpha = |\cos (\vec{u}, \vec{v})|$$

Sabemos que:

$$\cos (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Logo,

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

4

4.1 Determine, para cada caso, o ângulo das rectas r e s definidas pelas equações:

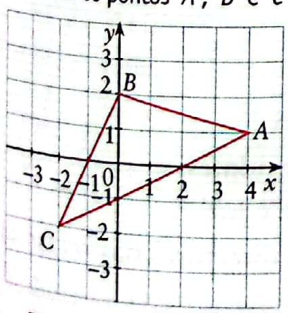
a) $r: (x, y) = (0, 3) + k(1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$;
$s: (x, y) = (-1, 5) + k(-1, 2)$, $k \in \mathbb{R}$.

b) $r: y = 2x + 1$;
$s: y = -3x$.

c) $r: x + y - 1 = 0$;
$s: y = x + 2$.

d) $r: y = 2x + 3$;
$s: y = 2x - 3$.

4.2 No referencial o. n. Oxy, considere os pontos A, B e C.



Determine com aproximação às milésimas do grau, as amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

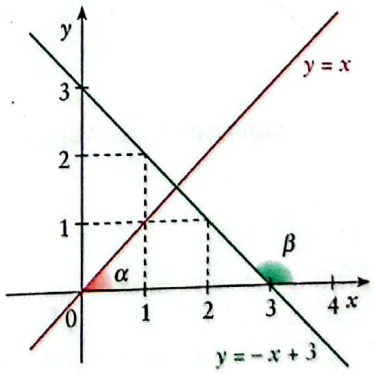
4.3 Mostre que o ângulo das rectas definidas pelas equações $y = x$ e $(\sqrt{3} - 1)x + (\sqrt{3} + 1)y = \sqrt{3}$ é $60°$.

3.7 Inclinação de uma recta

Inclinação de uma recta

Chama-se inclinação de uma recta ao ângulo positivo que a recta forma com o eixo dos xx considerando este eixo como o lado origem do ângulo.

No referencial o. n. Oxy, considere as rectas definidas por $y = x$ e $y = -x + 3$.



A respeito da recta $y = x$, sabe-se que:

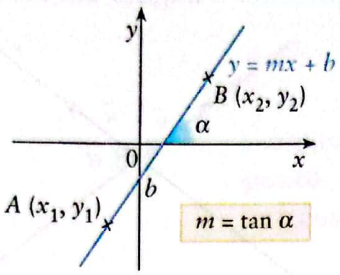
- $\alpha = 45°$ é a inclinação da recta;
- o declive da recta de equação $y = x$ é 1;
- $\tan 45° = 1$.

A respeito da recta de equação $y = -x + 3$, sabe-se que:

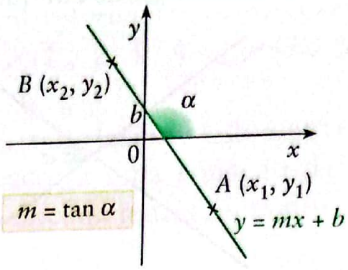
- $\beta = 135°$ é a inclinação da recta;
- o declive da recta de equação $y = -x + 3$ é -1;
- $\tan (135°) = -1$.

Digitalizada com CamScanner

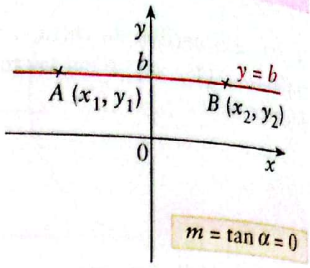
O declive de uma recta é a tangente trigonométrica da inclinação da recta.



Declive positivo
$0° < \alpha < 90°$



Declive negativo
$90° < \alpha < 180°$



Declive nulo
$\alpha = 0°$

5

5.1 Determine a inclinação de cada uma das rectas:

a) $a: y = -3x + 1$

b) $b: y = 2x + \frac{1}{2}$

c) $c: x + 2y - 2 = 0$

d) $d: y = -2x$

e) $e: y = -500$

f) $f: x = 1800$

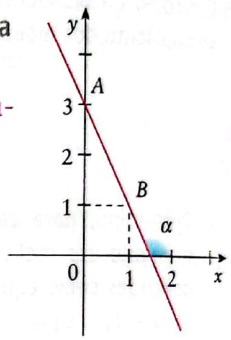
5.2 Escreva uma equação da recta que contém o ponto $A \curvearrowright (-1, 5)$ e tem inclinação:

a) $\frac{\pi}{3}$ radianos b) 1 radiano

c) 45° d) 15°

Exemplo 6 **Determinação da inclinação de uma recta**

Determine, com aproximação às centésimas, a inclinação da recta de equação $y = -2x + 3$.



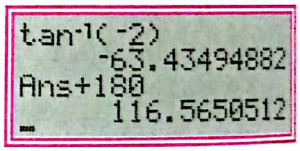
Resolução

$r: y = -2x + 3$

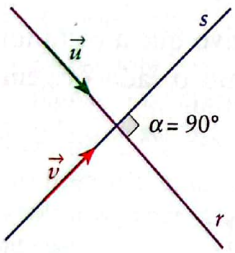
-2 é o declive de r.

Sendo α a inclinação de r, tem-se $\tan(\alpha) = -2$

e, portanto, $\alpha \approx (116{,}57)°$.



3.8 Rectas perpendiculares



Duas rectas são perpendiculares se o ângulo formado por elas é 90°. Neste caso, os seus vectores directores são ortogonais. Com efeito, sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ os vectores directores das rectas r e s, respectivamente, vem:

$$0 = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \iff 0 = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \iff 0 = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$\cos \alpha = \cos 90° = 0$

$\|\vec{u}\| \neq 0 \; ; \; \|\vec{v}\| \neq 0$

Relação entre os declives de rectas perpendiculares

Sejam as rectas r e s definidas pelas equações seguintes:

$$r: y = mx + b \qquad s: y = m'x + b'$$

Se r e s são perpendiculares, então os vectores directores das rectas são ortogonais.

$(1, m) \longrightarrow$ vector director de r; $(1, m') \longrightarrow$ vector director de s

Se os vectores são ortogonais, o produto escalar é nulo.

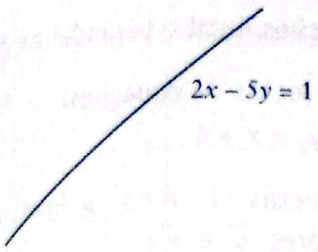
$$(1, m) \cdot (1, m') = 0 \iff 1 + mm' = 0 \iff m' = -\frac{1}{m}$$

Temos, então:

Dadas duas rectas, $r: y = mx + b$ e $s: y = m'x + b'$:

- **se $m' = m$, as rectas r e s são paralelas;**
- **se $m' = -\frac{1}{m}$, as rectas r e s são perpendiculares.**

Digitalizada com CamScanner



Exemplo 7 Recta paralela e recta perpendicular a uma recta dada

Num dado referencial o. n. Oxy, considere a recta cuja equação é $2x - 5y = 1$ e o ponto $A \curvearrowright (1\ ,\ 4)$. Escreva uma equação vectorial da recta:

7.1 paralela à recta dada e que contenha o ponto A;

7.2 perpendicular à recta dada e que contenha o ponto A.

Resolução

7.1 $2x - 5y = 1$ Recta dada.

$\vec{u} = (5\ ,\ 2)$ Vector director da recta dada.

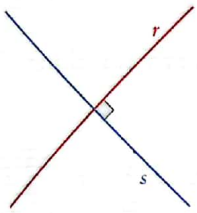
$\vec{v} = (2\ ,\ -5)$ Vector ortogonal à recta dada.

$(x\ ,\ y) = (1\ ,\ 4) + k\,(5\ ,\ 2)\ ,\ k \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta que contém A e é paralela à recta dada.

7.2 $(x\ ,\ y) = (1\ ,\ 4) + k\,(2\ ,\ -5)\ ,\ k \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta que contém A e é perpendicular à recta dada.

6

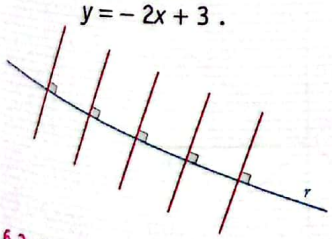
Considere as rectas r e s seguintes.



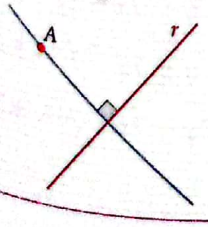
6.1 Indique o declive da recta r, sabendo que a recta é perpendicular a s e que o declive de s é:

a) 1;
b) -2;
c) -5;
d) $\frac{1}{2}$;
e) $\sqrt{2}$;
f) $\sqrt{3} - 1$;
g) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

6.2 Escreva as equações de cinco rectas perpendiculares à recta de equação $y = -2x + 3$.



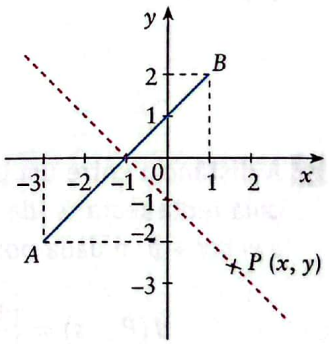
6.3 Determine a equação reduzida da recta que contém o ponto $A \curvearrowright (1\ ,\ 5)$ e é perpendicular à recta de equação $y = -\frac{1}{2}x - 3$.



Exemplo 8 Determinação da mediatriz de um segmento de recta

Num referencial o. n. Oxy, considere os pontos $A \curvearrowright (-3\ ,\ -2)$ e $B \curvearrowright (1\ ,\ 2)$.

Escreva uma equação da mediatriz de $[AB]$.



Resolução

A mediatriz é a recta perpendicular a $[AB]$ no ponto médio, M, de $[AB]$.

$$M = \left(\frac{-3+1}{2}\ ,\ \frac{-2+2}{2}\right) = (-1\ ,\ 0) \qquad M \curvearrowright \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Sendo $P \curvearrowright (x\ ,\ y)$ um ponto genérico da mediatriz, temos que:

$\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{PM} = M - P = (-1\ ,\ 0) - (x\ ,\ y) = (-1 - x\ ,\ -y)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1\ ,\ 2) - (-3\ ,\ -2) = (4\ ,\ 4)$

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff (-1 - x\ ,\ -y) \cdot (4\ ,\ 4) = 0$

$\iff -4 - 4x - 4y = 0 \iff x + y = -1$

Digitalizada com CamScanner

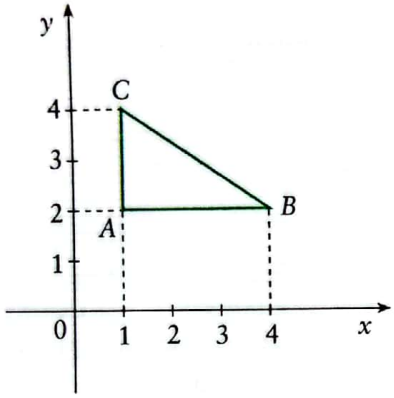
QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Sendo

$A \curvearrowright (1\ ,\ 2)$

$B \curvearrowright (4\ ,\ 2)$

$C \curvearrowright (1\ ,\ 4)$



O perímetro do triângulo $[ABC]$ é igual a:

(A) $\sqrt{13}$;

(B) $2 + \sqrt{13}$;

(C) $5 + \sqrt{13}$;

(D) $2\sqrt{13}$.

10 pontos

2 A distância entre um ponto $P \curvearrowright (x_0\ ,\ y_0)$ e uma recta recta s de equação reduzida $y = mx + b$ é dada por:

$$d(P\ ,\ s) = \left| \frac{y_0 - mx_0 - b}{\sqrt{1 + m^2}} \right|$$

Aplicando esta fórmula, a distância das rectas

$r:\ y = 2x - 1$ e

$s:\ y = 2x + 5$

é igual a:

(A) $2\sqrt{5}$;

(B) $6\sqrt{5}$;

(C) $\sqrt{5}$;

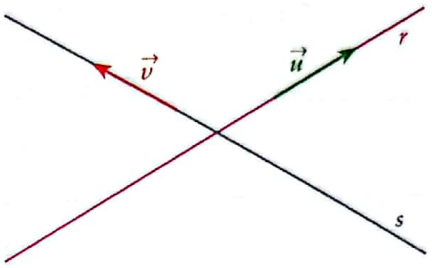
(D) $\frac{6\sqrt{5}}{2}$.

10 pontos

3 Das seguintes afirmações, qual é verdadeira?

(A) São paralelas as rectas de equações: $y_1 = -x + 3$ e $y_2 = x + 4$.

(B) O ângulo das rectas r e s é igual ao ângulo dos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



(C) A inclinação de uma recta no plano é igual ao declive da recta.

(D) Se uma recta tem de equação $y = \frac{1}{2}x + 3$, as rectas da família $y = -2x + m$ são perpendiculares à recta dada.

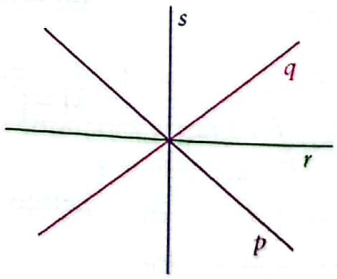
10 pontos

4 Sendo $r:\ Ax + By + C = 0$, a distância do ponto $P_0 \curvearrowright (x_0\ ,\ y_0)$ à recta r é dada pela fórmula:

$$d(P\ ,\ r) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

As equações das bissectrizes dos ângulos formados pelas rectas:

$r:\ 3x + 4y - 2 = 0$ e $s:\ 4x + 3y + 5 = 0$



são as rectas p e q de equações:

(A) $p:\ x - y + 7 = 0$ e $q:\ 7x + 7y + 3 = 0$;

(B) $p:\ x + y + 7 = 0$ e $q:\ 7x - 7y + 3 = 0$;

(C) $p:\ x - y - 7 = 0$ e $q:\ 7x - 7y - 3 = 0$;

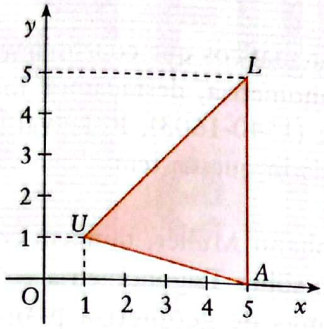
(D) $p:\ x + y + 7 = 0$ e $q:\ 7x + 7y - 3 = 0$.

30 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

5 Na figura, $[LUA]$ é um triângulo.



Determine a amplitude de cada um dos ângulos internos do triângulo.

20 pontos

6 Sendo:

$\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = 1$, $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = 45°$,

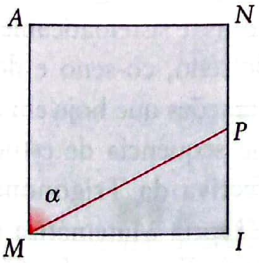
$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$, determine $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

Sugestão: Recorde que $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$,

ou seja, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})}$.

30 pontos

7 Na figura seguinte está representado um quadrado $[MINA]$ e P é o ponto médio do lado $[NI]$.



Sabendo que $\overline{MP} = \sqrt{5}$, mostre, sucessivamente, que:

7.1 $\overline{MI} = 2$;

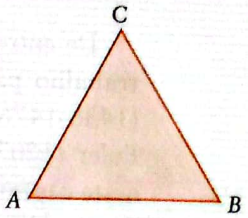
7.2 $\overline{MP} = \overline{MI} - \frac{1}{2}\overline{AM}$;

7.3 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

7.4 $\overline{AM} \cdot \overline{MP} = -2$.

30 pontos

8 $[ABC]$ é um triângulo equilátero de lado 1.



Determine:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

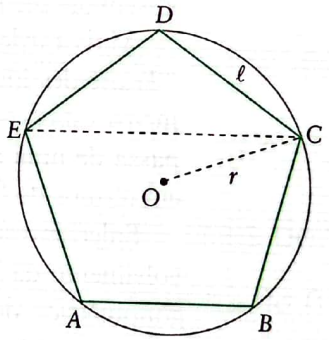
20 pontos

9 Mostre que:

$$2\,\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

30 pontos

10 Numa circunferência de raio r está inscrito um pentágono regular de lado ℓ.



10.1 Escreva em função de r:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE}$$

10.2 Escreva em função de ℓ:

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{CD}$$

10.3 Se $\overline{EC} = 12$ cm, determine:

a) $\|\overrightarrow{ED}\|$;

b) $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}$;

c) $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{DC}$.

30 pontos

Digitalizada com CamScanner

6 Funções, equações e inequações trigonométricas

1. Introdução ao estudo da trigonometria. Razões trigonométricas no triângulo rectângulo (revisão)

2. Generalização da noção de ângulo. Razões trigonométricas de um ângulo qualquer (revisão)

3. Funções trigonométricas como funções reais de variável real. Utilização das funções trigonométricas na modelação de situações reais

4. Equações trigonométricas. Fórmulas trigonométricas

5. Resolução de triângulos. Fórmulas dos co-senos e dos senos

Material:
Lápis, papel e calculadora

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

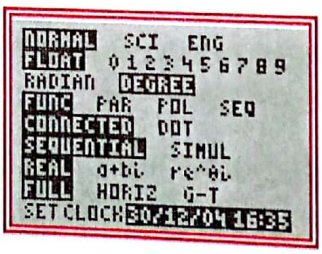
1. Usar o radiano como medida de ângulos.
2. Fazer a conversão entre graus e radianos.
3. Determinar o comprimento de um arco circular.
4. Determinar a área de um sector circular.
5. Resolver problemas usando comprimentos de arcos circulares ou áreas de sectores circulares.
6. Usar o triângulo rectângulo para escrever as razões trigonométricas.
7. Usar a calculadora para determinar ângulos ou razões trigonométricas.
8. Deduzir as razões trigonométricas de:
   $30°\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$, $45°\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$ e $60°\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$.
9. Resolver problemas usando a trigonometria do triângulo rectângulo.

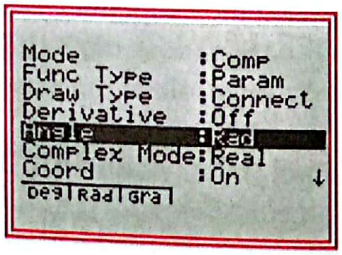
1. Introdução ao estudo da trigonometria. Razões trigonométricas no triângulo rectângulo (revisão)

A astronomia esteve na base do estudo da trigonometria.

1.1 Medidas de ângulos: o grau e o radiano

Antes de iniciar a resolução de qualquer problema de trigonometria deve consultar o *mode* da sua calculadora.



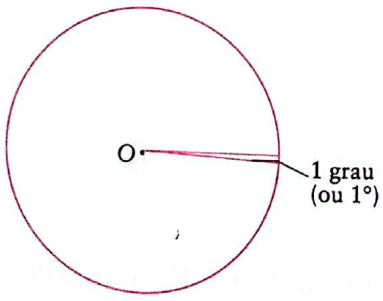


Com a calculadora pode trabalhar em graus, *mode degree*, ou em radianos, *mode radian*.

O grau

Imagine uma circunferência dividida em 360 partes iguais. Um grau seria a amplitude de um ângulo ao centro correspondente a uma dessas partes.

Um grau é igual a $\frac{1}{360}$ de um ângulo giro.



Observação

O grau, como unidade de medida, usa-se desde o tempo dos Babilónios.
Da mesma forma que mediam os ângulos mediam o tempo:

1 h = 60 min
1 min = 60 s

O **grau** e os seus submúltiplos, o minuto e o segundo, constituem o **sistema sexagesimal** de medida de ângulos.

1 grau corresponde a 60' (60' lê-se *sessenta minutos*).

1 minuto corresponde a 60'' (60'' lê-se *sessenta segundos*).

$1° = 60'$

$1' = 60''$

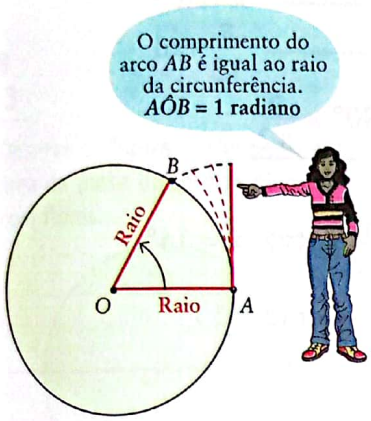
Digitalizada com CamScanner

A medida de um ângulo, no sistema sexagesimal, pode ser expressa numa única unidade, por exemplo:

$\alpha = (25{,}23)°$

ou em valores unidades

$\alpha = (25{,}23)° = 25°\ 13'\ 48''$.



Com a calculadora gráfica é muito fácil alterar a forma de escrita de um ângulo.

O radiano

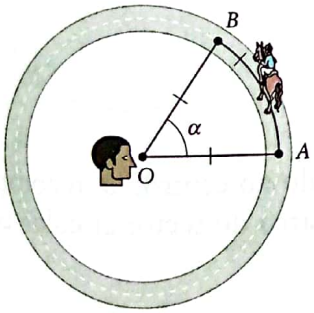
O sistema circular tem como unidade de medida o **radiano.**

Radiano

Um radiano (rad) é a amplitude de um ângulo que define em qualquer circunferência, com centro no seu vértice, um arco de comprimento igual ao raio.

Qual é, em graus, a amplitude de 1 radiano?

Vamos responder à pergunta com o seguinte exemplo:



Exemplo 1 **A corrida do cavalo**

Observe a figura representada ao lado.

O cavalo percorreu o arco AB cujo comprimento é igual ao raio $\overline{OA}$.

Qual é a amplitude do ângulo α ?

Resolução

$r = \overline{OA}$ = comprimento do arco AB

$2\pi r$ = comprimento da circunferência

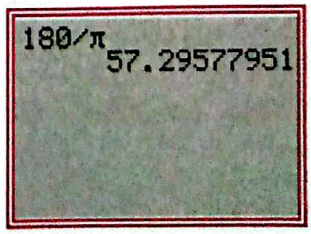
Então:

$$\begin{array}{ll} 2\pi r & \text{——————} \quad 360° \\ r & \text{——————} \quad \alpha\,, \end{array} \qquad \alpha = \frac{360° \times \cancel{r}}{2\pi \cancel{r}}$$

$$\alpha = \frac{360°}{2\pi} \text{ ou } \alpha = \frac{180°}{\pi} \quad \leftarrow \text{valor exacto}$$

$$\alpha \approx 57°$$

1 rad ≈ 57°



1

Use a calculadora gráfica para determinar a quantos graus, minutos e segundos corresponde 1 radiano.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 2 Conversão entre graus e radianos

Escreva $20°$ em radianos e $\frac{\pi}{12}$ rad em graus.

Resolução

$180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$

$20° \text{ ——— } x$

$x = \frac{20° \times \pi}{180°} \text{ rad}$

$x = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$

Logo, $20° = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$.

$180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$

$x \text{ ——— } \frac{\pi}{12} \text{ rad}$

$x = \frac{180° \times \frac{\pi}{12}}{\pi}$

$x = \frac{180°}{12} \iff x = 15°$

Logo, $\frac{\pi}{12} \text{ rad} = 15°$.

2

2.1 Escreva em radianos:

a) $62°$;

b) $300°$;

c) $15° \, 30'$;

d) $12° \, 10' \, 13''$;

2.2 Escreva em graus:

a) $\frac{5\pi}{3}$ rad ;

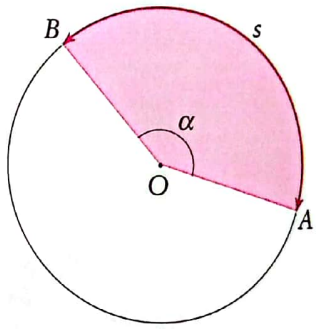
b) $\frac{11\pi}{20}$ rad ;

c) 3,14 rad ;

d) 0,2 rad .

Comprimento de um arco circular. Área de um sector circular

Consideremos o arco AB de comprimento s e o sector circular AOB (a cor na figura) da circunferência de centro O.



$$\alpha = A\hat{O}B$$

O comprimento do arco AB e a área do sector circular AOB são funções da medida em radianos do ângulo ao centro α e do raio do círculo.

Seja α, em radianos, a amplitude de um ângulo ao centro, s o comprimento do arco definido pelo ângulo α e A a área do sector circular correspondente, tem-se:

Comprimento do arco	Ângulo em radianos
$2\pi r$	2π
s	α

$$s = \frac{2\pi r \, \alpha}{2\pi} \iff \boxed{s = r\,\alpha}$$

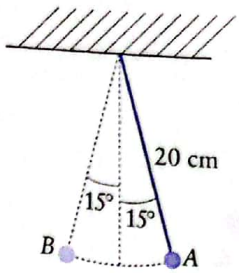
Área	Ângulo em radianos
πr^2	2π
A	α

$$A = \frac{\pi r^2 \, \alpha}{2\pi} \iff \boxed{A = \frac{r^2 \, \alpha}{2}}$$

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 3 **O arco descrito pelo pêndulo**

Observe a figura.



De acordo com os dados, qual é o comprimento do arco AB ?

Resolução

O comprimento de uma circunferência de raio 20 cm é:

$$(2\pi \times 20)\ \text{cm} = 40\pi\ \text{cm}$$

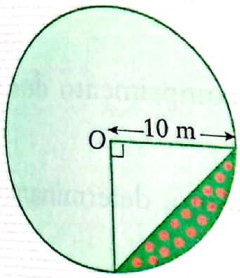
Então:

40π ——— $360°$

x ——— $30°$ $\qquad x = \dfrac{40\pi \times 30°}{360°} = \dfrac{10\pi}{3}$

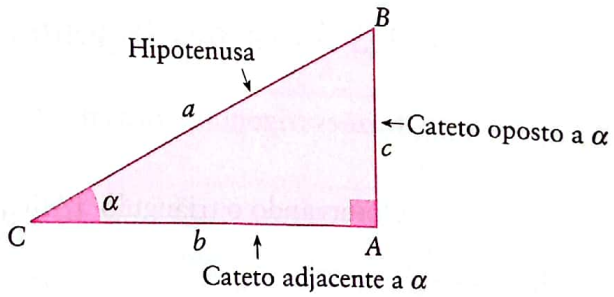
Logo, $x = \dfrac{10\pi}{3}$ cm (valor exacto) ou $x \approx 10{,}5$ cm .

3 Observe a figura e determine a área da parte do jardim plantada com flores.



1.2 As razões trigonométricas num triângulo rectângulo

Do ponto de vista do ângulo α, os lados de um triângulo rectângulo têm nomes especiais.



Ainda relativamente ao ângulo α, definem-se as seguintes razões trigonométricas:

seno de $\alpha = \sin\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$

co-seno de $\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$

tangente de $\alpha = \tan\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \dfrac{c}{b}$

Observação

sin α pode também ser representado por sen α .

Usamos sin α por ser a simbologia internacionalmente aconselhada.

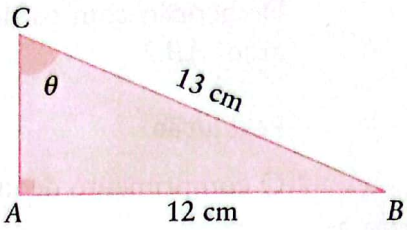
tan α pode ser representada por tg α .

Note que $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 4 Escrever as razões trigonométricas

Considere o triângulo rectângulo em A e o ângulo θ.



Calcule o valor de cada uma das razões trigonométricas de θ.

Resolução

Acerca do triângulo precisamos de conhecer o comprimento dos três lados.

Conhecemos o comprimento de dois deles e, portanto, determinamos o terceiro pelo Teorema de Pitágoras.

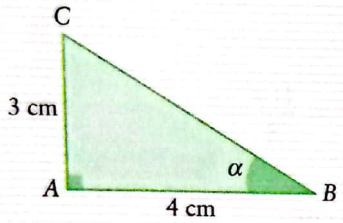
$$\overline{AC} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

Aplicando as definições, tem-se:

$$\sin\theta = \frac{12}{13}\ ;\ \cos\theta = \frac{5}{13} \text{ e } \tan\theta = \frac{12}{5}.$$

4

4.1 Relativamente ao triângulo da figura seguinte, escreva o valor das três razões trigonométricas.



4.2 Explique porque é que:

$0 < \cos\alpha < 1$ e

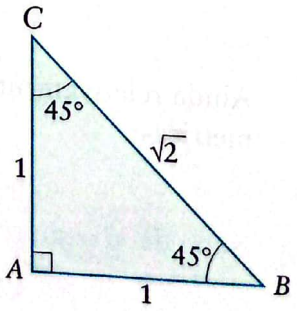
$0 < \sin\alpha < 1$

sendo α um ângulo agudo de um triângulo rectângulo.

1.3 As razões trigonométricas de ângulos especiais

Razões trigonométricas de $45°$ $\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$

Observando o triângulo $[ABC]$, tem-se:



$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

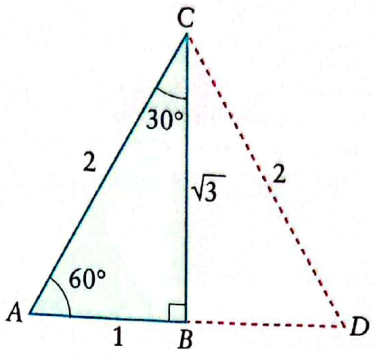
$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

Digitalizada com CamScanner

Razões trigonométricas de $30°\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$ e $60°\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$

Observando o triângulo $[ABC]$, vem:



$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \sqrt{3}$; $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Em síntese:

Razões \ Ângulo	30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad	60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad	45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1

Observação

Para simplificação da escrita, por vezes, escreve-se $\frac{\pi}{6}$ em lugar de $\frac{\pi}{6}$ rad.

Sempre que nos referimos a ângulos $\frac{\pi}{6}$ significa $\frac{\pi}{6}$ rad.

Exemplo 5 Cálculo de uma expressão trigonométrica

Calcule o valor da expressão:

$$\sin 30° - 2\cos 30° \times (\tan 60°)^2$$

Resolução

$\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$

Então, substituindo estes valores na expressão, vem:

$$\frac{1}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \times 3 = \frac{1}{2} - 3\sqrt{3}$$

5

Calcule o valor da expressão:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{6} \times \cos\frac{\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{4}} \times \sin^2\frac{\pi}{6}$$

Note que:

$$\sin^2\frac{\pi}{6} = \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$$

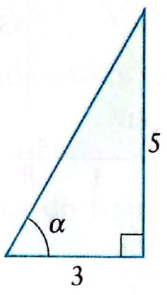
Digitalizada com CamScanner

1.4 A calculadora gráfica e as razões trigonométricas

As calculadoras gráficas têm teclas trigonométricas que podem ser utilizadas de diversas formas, como se mostra no exemplo seguinte.

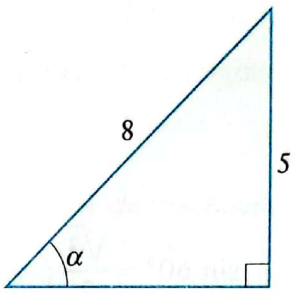
Exemplo 6 Calculadora gráfica e razões trigonométricas

6.1



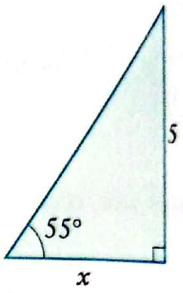
Determine α.

6.2



Determine $\tan \alpha$.

6.3



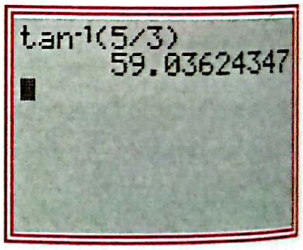
Determine x.

Resolução

6.1 Observando a figura, conhecemos, relativamente a α, o cateto adjacente e o cateto oposto.

Assim, $\tan \alpha = \frac{5}{3}$.

Usando a calculadora gráfica com a função $\tan^{-1}$, determina-se α.

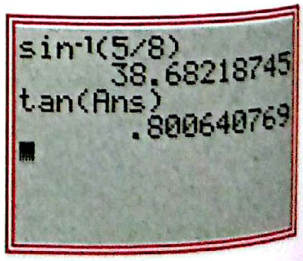


Logo, $\alpha = 59{,}04°$ (2 c. d.).

6.2 Observando a figura sabe-se que:

$\sin \alpha = \frac{5}{8}$

Com a ajuda da calculadora, determina-se α e, em seguida, $\tan \alpha$.

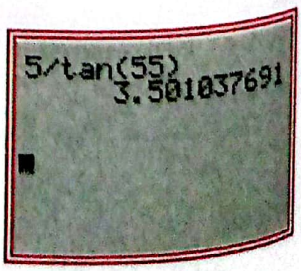


Logo, $\tan \alpha = 0{,}80$ (2 c. d.).

6.3 Observando a figura, tem-se:

$\tan 55° = \frac{5}{x} \iff$

$\iff x = \frac{5}{\tan 55°}$

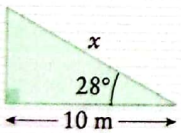


Logo, $x = 3{,}50$ (2 c. d.).

6

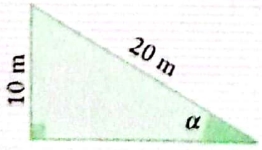
Para cada figura determine o valor pedido.

6.1



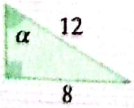
Determine x.

6.2



Determine α.

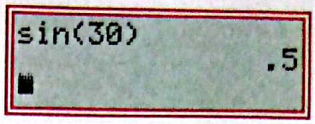
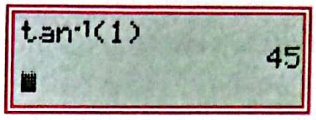
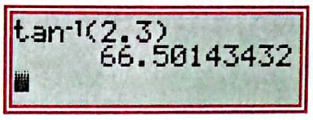
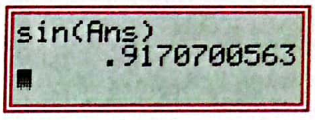
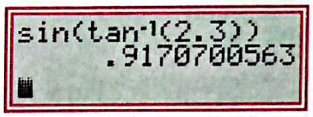
6.3



Determine $\tan \alpha$.

Digitalizada com CamScanner

Em síntese, a calculadora gráfica pode ser utilizada do seguinte modo:

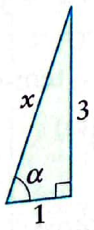
Cálculo	Exemplo	Calculadora
Indicar a razão trigonométrica de um ângulo.	Qual é o valor de $\sin 30°$?	 $\sin 30° = 0{,}5$
Determinar um ângulo conhecida uma das suas razões.	Se $\tan \alpha = 1$, qual é o valor de α ?	 $\alpha = 45°$
Determinar a razão trigonométrica de um ângulo conhecida outra razão trigonométrica do mesmo ângulo.	Sabendo que $\tan \alpha = 2{,}3$, qual é o valor de $\sin \alpha$?	  ou  Logo, se $\tan \alpha = 2{,}3$, então $\sin \alpha = 0{,}92$ (2 c. d.) .

Exemplo 7 **Determinar uma razão trigonométrica conhecida outra**

Determine $\sin \alpha$ sabendo que $\tan \alpha = 3$ e α é um ângulo agudo.

Resolução

Sem calculadora



$\tan \alpha = 3$

$x = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

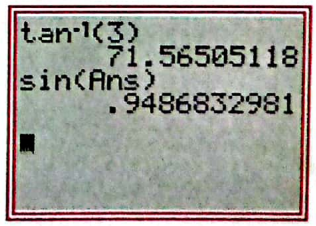
Então, $\sin \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

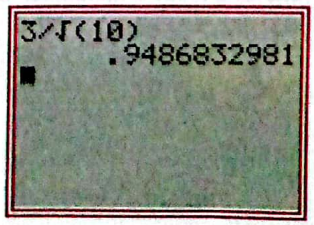
Verificação

Valor exacto: $\sin \alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

Valor aproximado: $\sin \alpha = 0{,}95$ (2 c. d.)

Com calculadora





7 Determine o valor exacto e o valor aproximado, com duas casas decimais, de $\sin \alpha$, sabendo que:

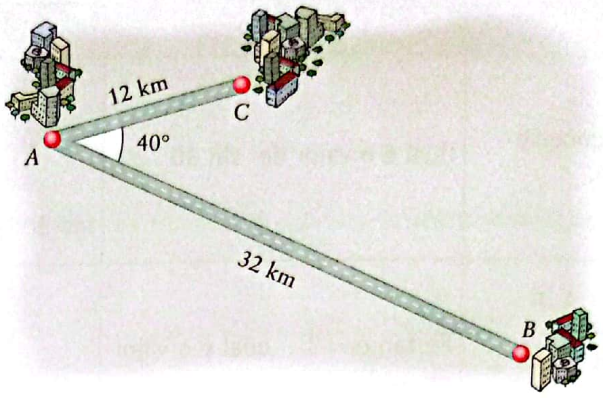
7.1 $\cos \alpha = \dfrac{1}{5}$;

7.2 $\tan \alpha = \dfrac{3}{2}$.

(α é um ângulo agudo.)

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 8 A distância entre cidades



As cidades A e C distam 12 km .

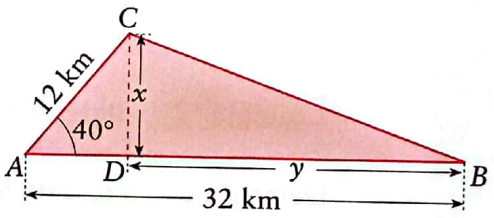
As cidades A e B distam 32 km .

$B\hat{A}C = 40°$

Qual é a distância de B a C ?

Resolução

Para resolvermos o problema vamos recorrer a uma linha auxiliar $[CD]$ que é a altura do triângulo $[ABC]$ relativa à base $[AB]$.



Sendo $\overline{DC} = x$ e $\overline{DB} = y$, pretendemos determinar:

$$\overline{BC} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Relativamente ao triângulo $[ADC]$, tem-se:

$$\sin(40°) = \frac{x}{12} \iff x = 12 \sin(40°)$$

$$\cos(40°) = \frac{\overline{AD}}{12} \iff \overline{AD} = 12 \cos(40°)$$

Considerando o triângulo $[DBC]$ e sabendo que

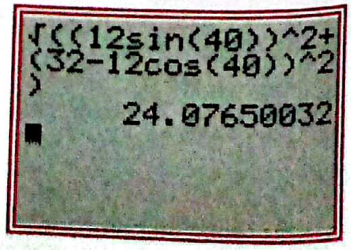
$y = 32 - \overline{AD} \iff y = 32 - 12 \cos(40°)$

então:

$$\overline{BC} = \sqrt{(12 \sin(40°))^2 + (32 - 12 \cos(40°))^2}$$

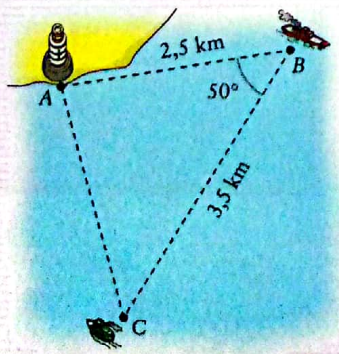
Com a ajuda da calculadora, determina-se $\overline{BC}$.

$\overline{BC} = 24{,}1$ km (1 c. d.) .



8

Observe a figura e determine $\overline{AC}$.



Digitalizada com CamScanner

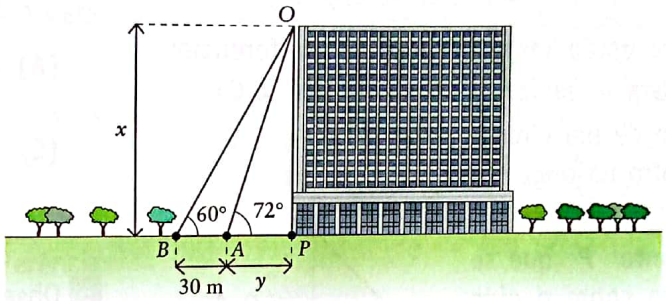
Exemplo 9 A altura do prédio

O Pedro determinou os ângulos de elevação do solo para o cimo de um prédio de dois pontos A e B, sendo esses ângulos de $72°$ e $60°$, respectivamente.

Se A e B distam 30 m, qual é a altura do prédio?

Resolução

Vamos começar por fazer um desenho e colocar a informação dada no exemplo acima descrito.



Seja $\overline{AP} = y$ e $\overline{PO} = x$.

Observando a figura, tem-se:

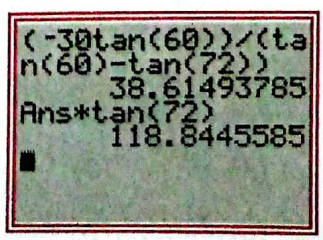
$$\begin{cases} \tan 72° = \dfrac{x}{y} \\ \tan 60 = \dfrac{x}{y+30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \tan 72° \\ x = (y+30) \tan 60° \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+30) \tan 60° = y \tan 72° \\ x = y \tan 72° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \tan 60° + 30 \tan 60° = y \tan 72° \\ x = y \tan 72° \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(\tan 60° - \tan 72°) = -30 \tan 60° \\ x = y \tan 72° \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-30 \tan 60°}{\tan 60° - \tan 72°} \\ x = y \tan 72° \end{cases} \Leftrightarrow$$

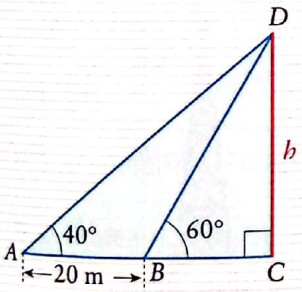
$$\begin{cases} y = 38{,}6 \text{ m (1 c. d.)} \\ x = 118{,}8 \text{ m (1 c. d.)} \end{cases}$$



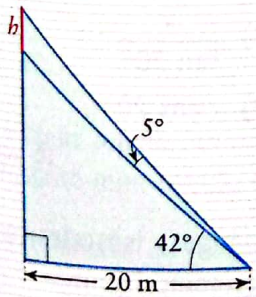
Logo, a altura do prédio é aproximadamente igual a 118 m.

9

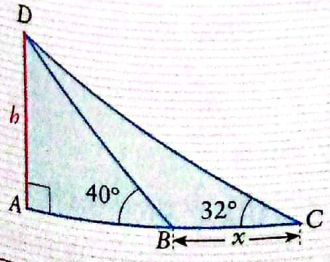
9.1 Determine h.



9.2 Determine h.



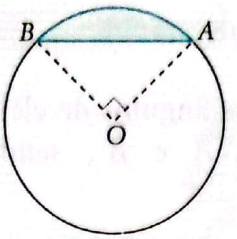
9.3 Determine h em função de x.



Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 2 cm. $[AB]$ é uma corda da circunferência e $A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$.



A área da parte colorida é:

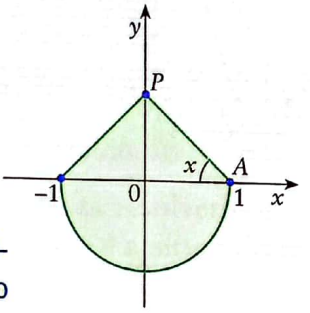
(A) 2π cm^2 ; **(B)** $(\pi + 2)$ cm^2 ;

(C) $(2 - \pi)$ cm^2 ; **(D)** $(\pi - 2)$ cm^2 .

10 pontos

2 Na figura estão representados, em referencial o. n. Oxy :

- metade de um círculo de centro na origem e raio 1 ;
- um ponto P que se desloca sobre o eixo das ordenadas;
- um ângulo de amplitude x e vértice no ponto A $\curvearrowright (1\ ,\ 0)$;
- $x = O\hat{A}P$, $x \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$.



Qual das expressões seguintes representa, em função de x , a área da parte colorida da figura?

(A) $\cos x + \frac{\pi}{2}$ **(B)** $\frac{1}{\tan x} + \frac{\pi}{2}$

(C) $\tan x + \frac{\pi}{2}$ **(D)** $\sin x + \pi$

10 pontos

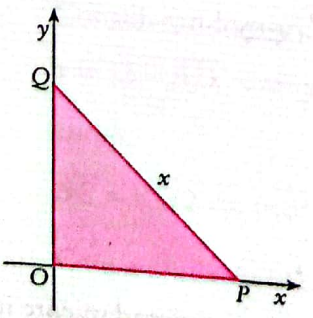
3 Na figura estão representados, em referencial o. n. Oxy :

- os pontos P e Q do eixo das abcissas e das ordenadas, respectivamente;
- $\overline{OP} = \overline{OQ}$ e $\overline{PQ} = x$.

A área do triângulo $[OPQ]$ em função de x é dada por:

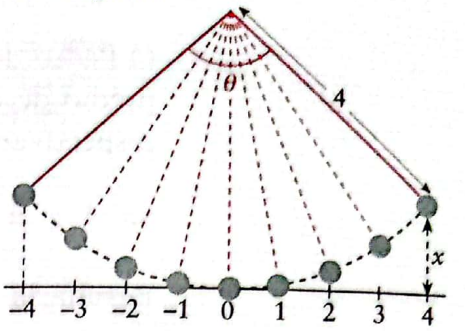
(A) x^2 ; **(B)** $\frac{x^2}{2}$;

(C) $\frac{x^2}{4}$; **(D)** $2x$.



10 pontos

4 Observe a figura.



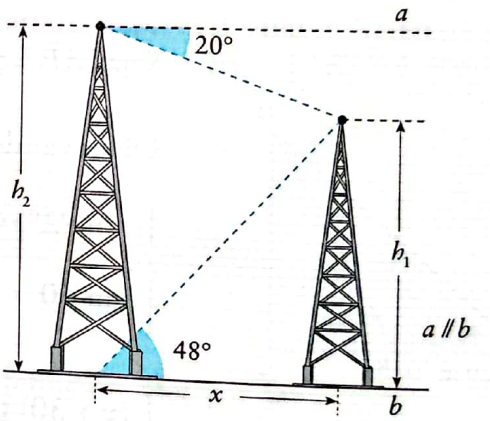
De acordo com os dados, x em função de θ com $\theta \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ é dado por:

(A) $4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$; **(B)** $4 - 4 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$;

(C) $4 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$; **(D)** $4 - 4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

10 pontos

5 Observe a figura e os dados nela indicados.



$h_2 - h_1$ é dada em função de x por:

(A) $x \tan 20°$; **(B)** $\frac{x}{\tan 20°}$;

(C) $\frac{x}{\sin 20°}$; **(D)** $x \cos 20°$.

10 pontos

6 A figura representa um triângulo isósceles tendo os lados iguais a 1 dm de comprimento.

$A\hat{C}B = (2\theta)°$

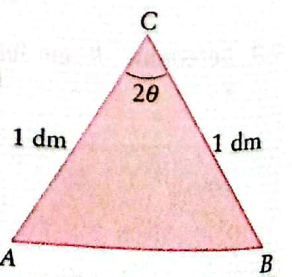
A área A do triângulo, em função de θ é dada por:

(A) $\sin\theta \cos\theta$;

(B) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$;

(C) $2 \sin\theta \cos\theta$;

(D) $\frac{1}{2} \sin\theta \cos\theta$.

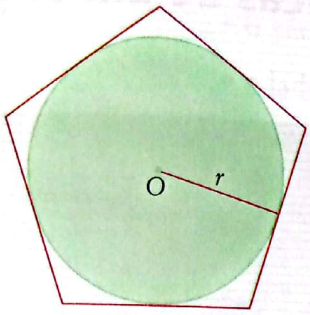


10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

7 Um círculo com r cm de raio está inscrito num pentágono regular.

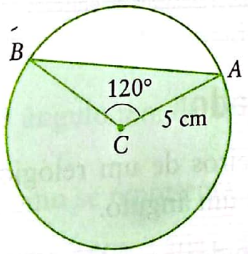


Escreva em função do raio r do círculo o perímetro do pentágono.

20 pontos

8 Na figura está representada uma circunferência de centro C e raio 5 cm.

A e B são pontos da circunferência e $A\hat{C}B = 120°$.



Calcule:

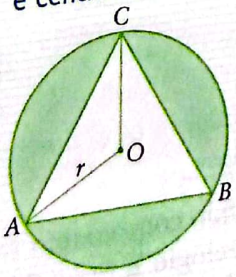
8.1 o comprimento do arco AB;

8.2 a área do sector ACB;

8.3 a área da parte colorida da figura.

30 pontos

9 A figura representa um triângulo equilátero $[ABC]$, inscrito num círculo de raio r e centro O.



9.1 Mostre que o perímetro P do triângulo $[ABC]$ em função de r é dado por:

$P(r) = 3r\sqrt{3}$

9.2 Mostre que:

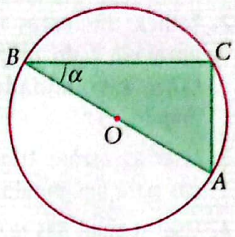
$$\frac{\text{medida da área da parte colorida}}{\text{medida da área do triângulo } [ABC]} = \frac{4\pi\sqrt{3} - 9}{9}.$$

30 pontos

10 A figura representa uma circunferência de centro O e diâmetro $[AB]$.

Sabe-se que:

$\overline{AB} = 10$ m e $\alpha = A\hat{B}C$, sendo C um ponto do arco AB.



10.1 Justifique que $[ABC]$ é um triângulo rectângulo.

10.2 Mostre que a área do triângulo é dada, em função de α, por:

$A(\alpha) = 50 \sin\alpha \cos\alpha$.

10.3 Determine, se possível, a área do triângulo para:

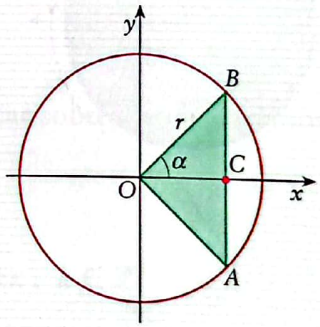
a) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; **b)** $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

20 pontos

11 Na figura está representada uma circunferência de raio r e centro O na origem do referencial o. n. Oxy.

A e B pertencem à circunferência de centro O e raio r.

O ponto C pertence ao eixo das abcissas e $\alpha = C\hat{O}B$.

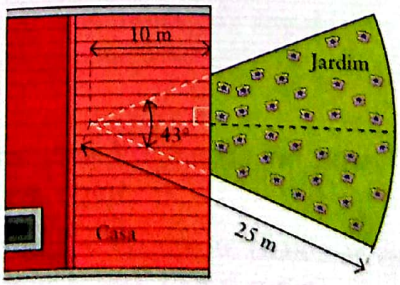


Mostre que a área do triângulo $[AOB]$ é dada em função de r e de α por:

$A = r^2 \sin\alpha \cos\alpha$.

20 pontos

12 O jardim de uma casa é parte de um sector circular como se mostra na figura.



De acordo com os dados, determine a área do jardim.

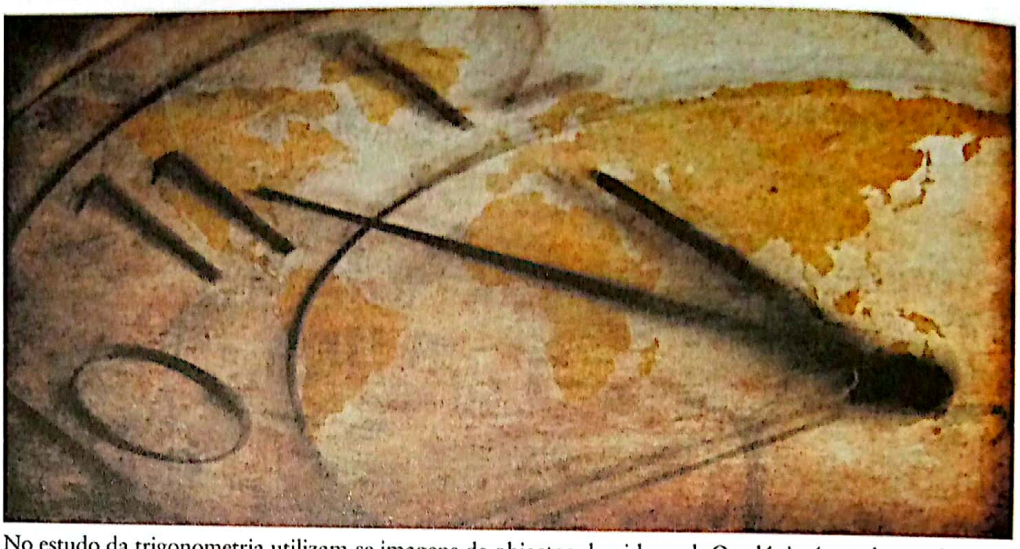
20 pontos

Digitalizada com CamScanner

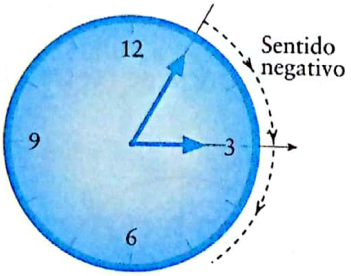
Objectivos

1. Representar um ângulo num referencial.
2. Indicar diferentes amplitudes para um lado origem e um lado extremidade de um ângulo.
3. Usar as razões trigonométricas para um ângulo qualquer.
4. Usar o sinal das razões trigonométricas.
5. Conhecer as razões trigonométricas de ângulos de referência.
6. Reduzir um ângulo ao 1.º quadrante.

2. Generalização da noção de ângulo. Razões trigonométricas de um ângulo qualquer (revisão)



No estudo da trigonometria utilizam-se imagens de objectos da vida real. O relógio é um desses objectos.



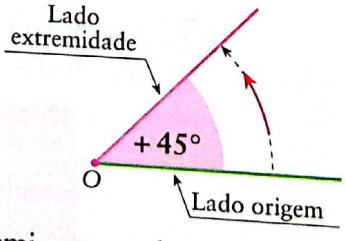
2.1 Ângulo orientado

O movimento dos ponteiros de um relógio é utilizado em trigonometria para definir o sentido de um ângulo.

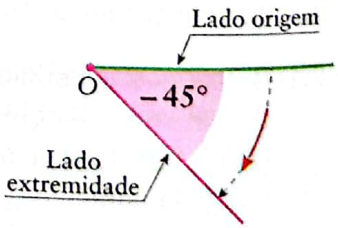
Ao sentido do movimento dos ponteiros dos relógios associamos o **sentido negativo** ou retrógrado e ao **positivo** o sentido directo.

Sentido de um ângulo

Partindo de duas semi-rectas sobrepostas, fixando uma, o lado origem, e rodando a outra, o lado extremidade do ângulo, em torno da origem, duas situações podem acontecer:



A semi-recta roda no sentido contrário aos ponteiros do relógio e descreve um **ângulo positivo.**



A semi-recta roda no sentido dos ponteiros do relógio e descreve um **ângulo negativo.**

Ângulo orientado

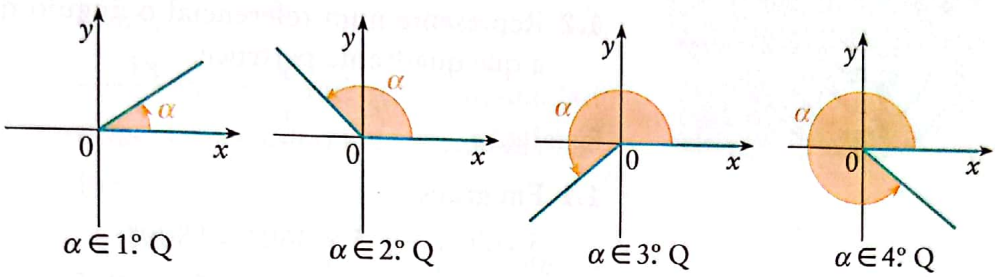
A um ângulo ao qual se atribui um sentido chama-se ângulo orientado.

Digitalizada com CamScanner

2.2 Ângulo num referencial

Representa-se um ângulo num referencial quando:

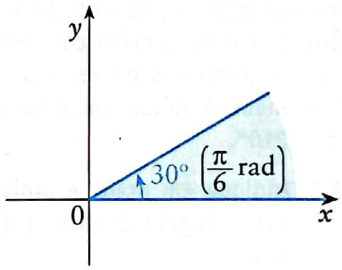
- o vértice do ângulo coincide com a origem das coordenadas;
- o lado origem do ângulo está sobreposto ao semieixo positivo do eixo Ox.



O ângulo pertence ao $1.^\circ$, $2.^\circ$, $3.^\circ$ ou $4.^\circ$ quadrantes conforme o lado extremidade pertence, respectivamente, ao $1.^\circ$, $2.^\circ$, $3.^\circ$ ou $4.^\circ$ quadrantes.

2.3 Generalização da noção de ângulo

Na figura seguinte está representado um ângulo do $1.^\circ$ quadrante.



O ângulo tem de amplitude $30^\circ \left(\frac{\pi}{6} \text{ rad}\right)$.

Como se representa um ângulo de

$30^\circ + 360^\circ$, $30^\circ - 360^\circ$ ou $30^\circ + 5 \times 360^\circ$?

Os lados de qualquer um destes ângulos iriam ficar sobrepostos aos lados do ângulo de 30° representado na figura.

De um modo geral, qualquer ângulo da forma

$$30^\circ + k \times 360^\circ, \ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

teria a mesma representação geométrica.

De um modo geral, tem-se:

Se α é uma das amplitudes, em graus, de um ângulo orientado, então $\alpha + k \times 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ são também amplitudes dos ângulos que têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade.

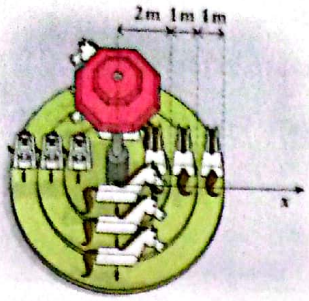
Em radianos, $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ substitui a expressão em graus $\alpha + k \times 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

De entre todas as amplitudes de um ângulo orientado, chama-se **amplitude principal** à amplitude α se $-180^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$ $(-\pi < \alpha \leqslant \pi)$.

A amplitude principal corresponde ao trajecto mínimo da semi-recta que descreve o ângulo.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 1 Representar um ângulo no referencial



Numa viagem de carrocel, o Ramos andou no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio 5 voltas completas e mais 135°.

1.1 Represente em graus e radianos o ângulo que o Ramos descreveu.

1.2 Represente num referencial o ângulo que o Ramos descreveu e diga a que quadrante pertence.

Resolução

1.1 Em graus

5 voltas $\longrightarrow 5 \times 360° = 1800°$

$1800° + 135° = 1935°$ ← Ângulo, em graus, descrito pelo Ramos.

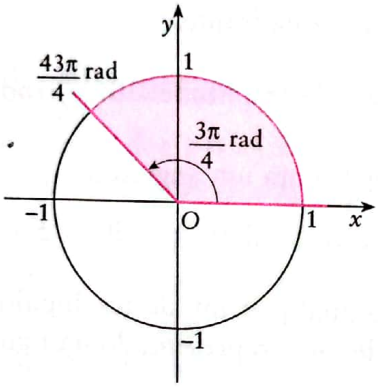
Em radianos

5 voltas $\longrightarrow (2\pi \times 5)\text{ rad} = 10\pi\text{ rad}$

$135° = 90° + 45° = \frac{\pi}{2}\text{ rad} + \frac{\pi}{4}\text{ rad} = \frac{3\pi}{4}\text{ rad}$

$10\pi\text{ rad} + \frac{3\pi}{4}\text{ rad} = \frac{43\pi}{4}\text{ rad}$ ← Ângulo, em radianos, descrito pelo Ramos.

1.2



O ângulo de $\frac{43\pi}{4}$ rad pertence ao 2.° quadrante.

1

No carrocel representado no Exemplo 1 e no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, a Ana andou 8 voltas completas e mais 210°.

1.1 Indique em graus e radianos o ângulo descrito pela Ana.

1.2 Represente num referencial o ângulo descrito pela Ana e diga a que quadrante pertence.

Exemplo 2 O quadrante de um ângulo

Represente num referencial e diga a que quadrante pertence o ângulo de amplitude:

2.1 $-1635°$; **2.2** $-\frac{11\pi}{3}$ rad; **2.3** 90 rad.

Resolução

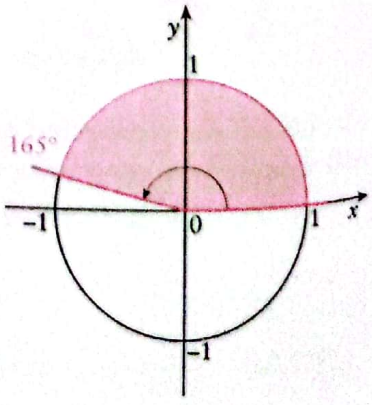
2.1 $1635 : 360 \approx 4{,}5$

$-1635 + 5 \times 360° = +165°$

Logo,

$-1635°$ pertence ao 2.° quadrante.

Repare que para responder à questão adicionou-se o número inteiro de voltas necessárias de modo a obter um ângulo α: $-180° < \alpha \leqslant 180°$.



Digitalizada com CamScanner

2.2 $-\frac{11\pi}{3}$ rad

$\frac{12\pi}{3}$ rad corresponde a 2 voltas.

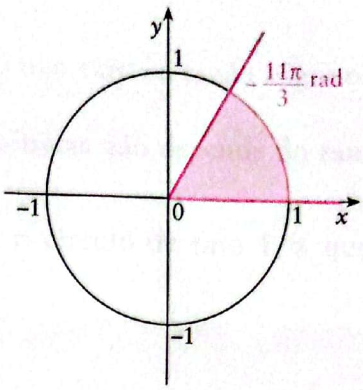
$-\frac{11\pi}{3}+\frac{12\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

Logo,

$-\frac{11\pi}{3}$ rad e $\frac{\pi}{3}$ rad têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade.

Então,

$-\frac{11\pi}{3}$ pertence ao 1.° quadrante.



2.3 90 rad

Em graus

$90 \text{ rad} = \left(90 \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ$

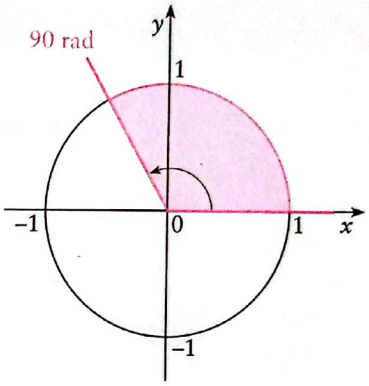
$\left(90 \times \frac{180}{\pi} - 14 \times 360\right)^\circ \approx 117^\circ$

Em radianos

90 rad

$(90 - 14 \times 2\pi)$ rad $\approx 2{,}04$ rad

Logo, 90 rad pertence ao 2.° quadrante.



2 Represente num referencial o ângulo de amplitude:

2.1 1510° ;

2.2 − 1683° ;

2.3 $-\frac{11\pi}{4}$ rad ;

2.4 $-\frac{17\pi}{6}$ rad ;

2.5 $-\frac{100\pi}{8}$ rad ;

2.6 − 8,7 rad ;

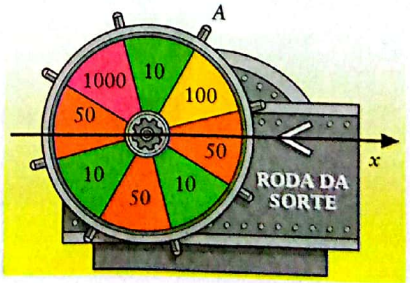
2.7 − 30 rad .

Exemplo 3 A roda da sorte

Observe a roda da sorte representada na figura seguinte.

Considere que, na posição de repouso, o centro da roda coincide com a origem do referencial e o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox .

No jogo, permite-se que a roda rode nos dois sentidos (o sentido positivo e o sentido negativo).



Para ganhar o prémio é necessário que a roda dê, pelo menos, uma volta completa.

Qual foi o prémio da Ana se a roda rodou − 1850° ?

Resolução

$-1850^\circ = -5 \times 360^\circ - 50^\circ$; $\alpha = -50^\circ$

Observando a roda e considerando que cada sector correspondia a 45° , conclui-se que o ponteiro apontava para 1000 meticais.

3 Observe a roda da sorte da figura ao lado.

De acordo com as regras do jogo descritas no **Exemplo 3**, copie e complete a tabela.

Jogador	Ângulo	Prémio meticais
A	− 755°	10
B	$\frac{16\pi}{3}$ rad	
C		1000
D		100
E	$60^\circ + k \times 360^\circ$, $k \in \{1, 2, 3\}$	

Digitalizada com CamScanner

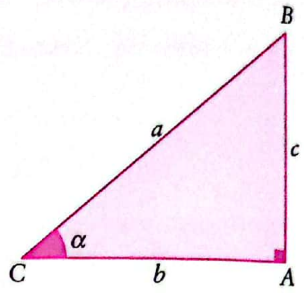
2.4 Definição das razões trigonométricas de um ângulo qualquer

Dado um triângulo rectângulo $[ABC]$, definiram-se as razões trigonométricas de um ângulo agudo do triângulo do seguinte modo:

$$\sin \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

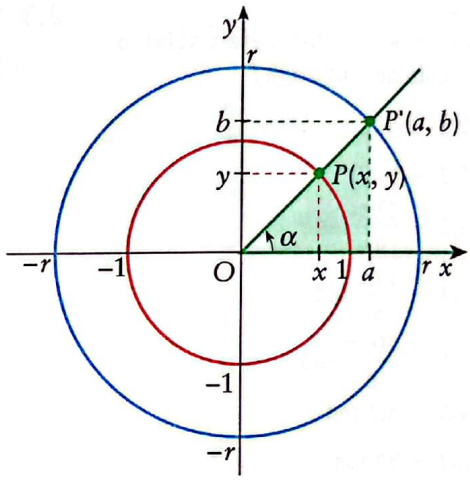
$$\tan \alpha = \frac{c}{b}$$



Observe, agora, a figura ao lado.

No referencial estão representadas duas circunferências de centro O, uma de raio 1 e outra de raio r.

O ângulo α tem o lado origem coincidente com a parte positiva do eixo Ox e o outro lado, lado extremidade, intersecta a circunferência de raio 1 no ponto $P \curvearrowright (x, y)$ e a circunferência de raio r no ponto $P' \curvearrowright (a, b)$.



O ponto P é o **ponto associado** à circunferência de raio 1 e o ponto P' é o **ponto associado** à circunferência de raio r.

Definições

$$\begin{cases} \sin \alpha = \dfrac{\text{ordenada do ponto associado}}{\text{raio do círculo}} \\ \sin \alpha = \dfrac{b}{r} = \dfrac{y}{1} = y \end{cases} \qquad \boxed{\sin \alpha = y}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{\text{abcissa do ponto associado}}{\text{raio do círculo}} \\ \cos \alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{x}{1} = x \end{cases} \qquad \boxed{\cos \alpha = x}$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \dfrac{\text{ordenada do ponto associado}}{\text{abcissa do ponto associado}} \\ \tan \alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad \boxed{\tan \alpha = \frac{y}{x}}$$

Digitalizada com CamScanner

É importante notar que:

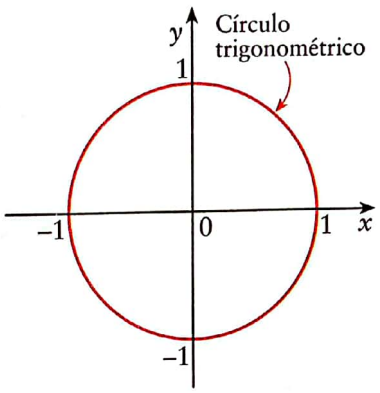
1.° Se algum dos denominadores é zero, então não existe a razão trigonométrica respectiva.

2.° O valor de cada uma das razões trigonométricas não depende do raio do círculo.

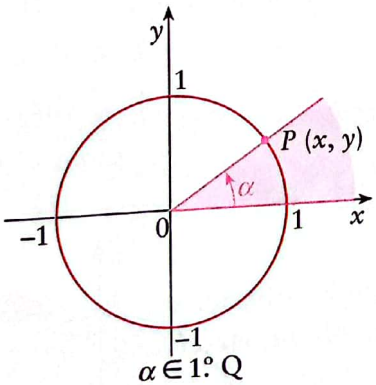
Para simplificar passamos a utilizar sempre o círculo de raio 1, a que chamamos **círculo trigonométrico.**

Círculo trigonométrico

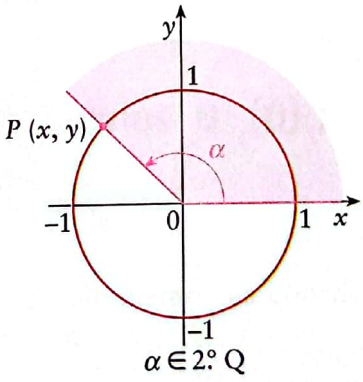
Círculo trigonométrico é um círculo de centro na origem do referencial e raio igual à unidade.



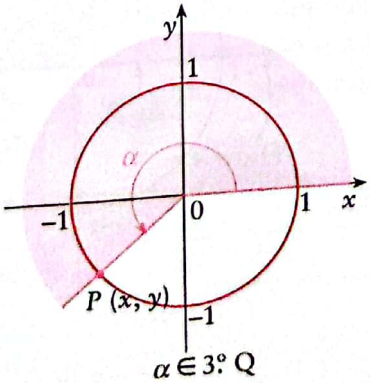
Desenhemos, então, num círculo trigonométrico, ângulos de diferentes quadrantes e vértice na origem do referencial.



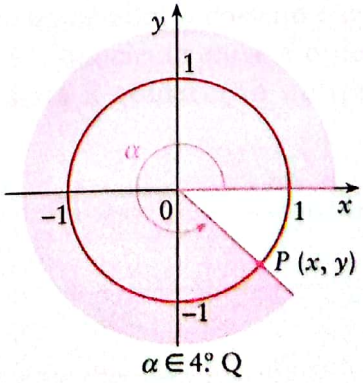
$\alpha \in 1.^{\circ}$ Q



$\alpha \in 2.^{\circ}$ Q



$\alpha \in 3.^{\circ}$ Q



$\alpha \in 4.^{\circ}$ Q

Para qualquer quadrante a que o ângulo pertença, tem-se:

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x \quad \text{e} \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

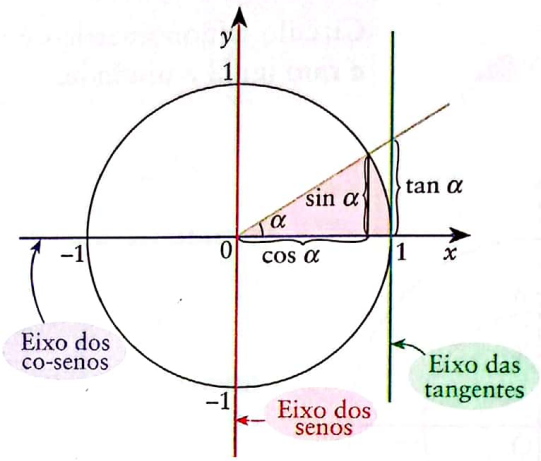
Digitalizada com CamScanner

2.5 Linhas trigonométricas

Como o seno de α é igual à ordenada do ponto associado, ao eixo das ordenadas também se chama **eixo dos senos.**

Como o co-seno de α é igual à abcissa do ponto associado, ao eixo das abcissas também se chama **eixo dos co-senos.**

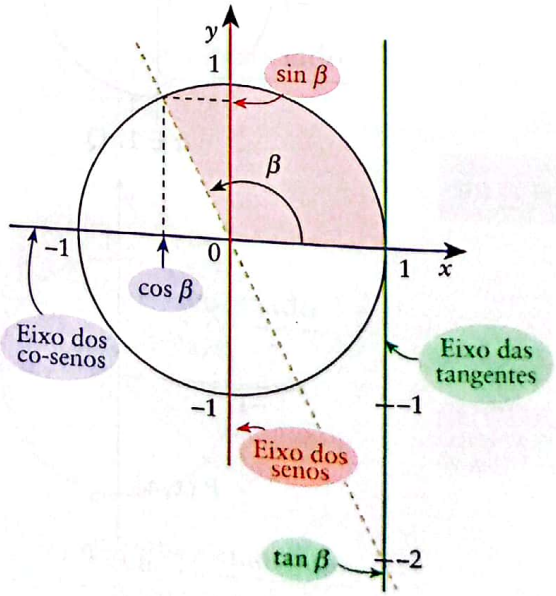
A linha das tangentes é uma linha vertical que contém o ponto $(1\ ,\ 0)$ e chama-se **eixo das tangentes.**



De acordo com a definição das razões trigonométricas, pode concluir-se que:

Sendo α um ângulo qualquer, tem-se:

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$
$$\tan\alpha \in \mathbb{R}$$

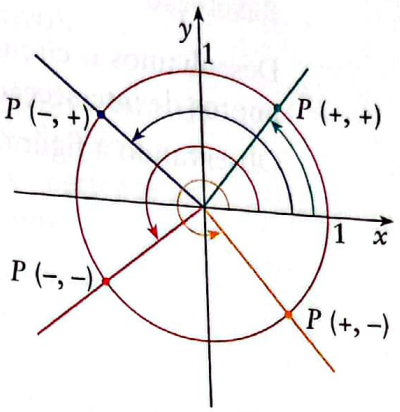


Assim, pode existir um ângulo β tal que $\tan\beta = -2$, mas não faz sentido dizer, por exemplo, que $\sin\alpha = -2$ ou $\cos\alpha = -2$.

Digitalizada com CamScanner

2.6 Sinal das razões trigonométricas

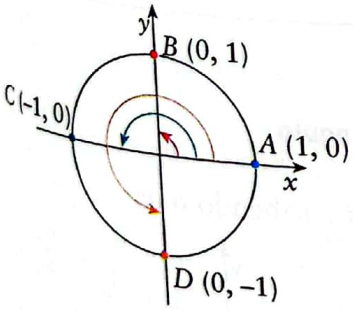
O sinal de uma razão trigonométrica depende exclusivamente do sinal das coordenadas do ponto P associado ao ângulo no círculo trigonométrico.



Tem-se, então:

	seno	co-seno	tangente
1.° Q	+	+	+
2.° Q	+	−	−
3.° Q	−	−	+
4.° Q	−	+	−

2.7 Razões trigonométricas dos ângulos 0° (0); $90° \left(\frac{\pi}{2}\right)$; 180° (π) e $270° \left(\frac{3\pi}{2}\right)$



Desenhemos um círculo trigonométrico e coloquemos as coordenadas dos pontos de intersecção do círculo com os eixos.

Como o seno é igual à ordenada do ponto associado, o co-seno é igual à abcissa do ponto associado e a tangente é o quociente entre a ordenada e a abcissa do ponto associado, é imediata a construção do quadro seguinte:

α		seno	co-seno	tangente
0°	0 rad	0	1	0
90°	$\frac{\pi}{2}$ rad	1	0	Não existe
180°	π rad	0	− 1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$ rad	− 1	0	Não existe

Digitalizada com CamScanner

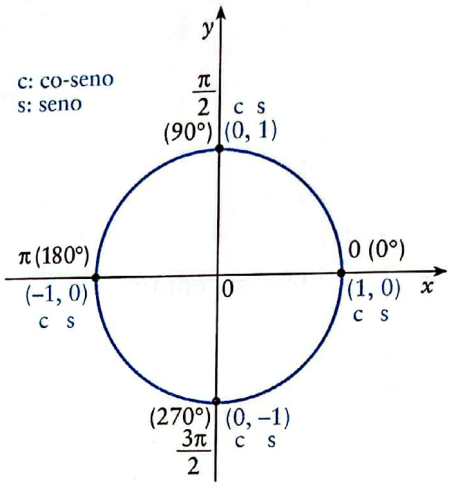
Exemplo 4 **Calcular sem a calculadora**

$$\sin 0 + \cos \frac{\pi}{2} - \tan 2\pi + \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2}$$

Resolução

Desenhamos o círculo trigonométrico e assinalamos as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos.

Observando a figura, tem-se:



$$0 + 0 - 0 + 1 + 0 = 1$$

- $\cos \frac{3\pi}{2}$
- $\sin \frac{\pi}{2}$
- $\tan 2\pi$ $\left(\frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi}\right)$
- $\cos \frac{\pi}{2}$
- $\sin 0$

4

Calcule, sem usar a calculadora.

4.1 $\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} + 2 \cos \pi - 2 \sin \frac{3\pi}{2}$

4.2 $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \pi + \tan \pi - 2 \cos 0$

Note que $\sin^2 \frac{\pi}{2} = \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2$.

4.3 $\sin^2 \frac{3\pi}{2} + \cos^2 \frac{3\pi}{2} - 1$

4.4 $\cos 540° - \tan 720° + \sin 990°$

Verifique as suas respostas usando a calculadora.

Exemplo 5 **O quadrante a que pertence o ângulo**

Indique a que quadrante pertence o ângulo x, sabendo que:

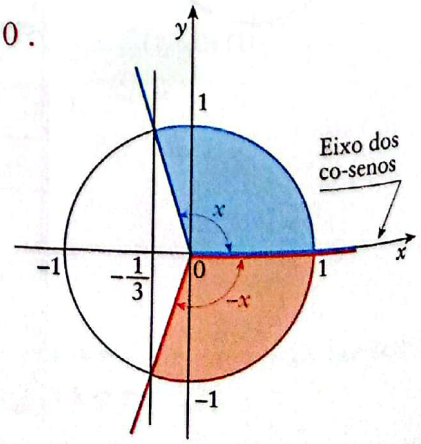
5.1 $\cos x = -\frac{1}{3}$; **5.2** $\frac{\sin^2 x}{\cos x} < 0$.

Resolução

5.1 $\cos x = -\frac{1}{3}$

Observando a figura, conclui-se que:

ou $x \in$ 2.° quadrante ou $x \in$ 3.° quadrante.



Digitalizada com CamScanner

5

Indique o quadrante a que pertence o ângulo α, sabendo que:

5.1 $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$;

5.2 $\cos\alpha = \frac{5}{7}$;

5.3 $\tan\alpha = -\frac{3}{5}$;

5.4 $\sin\alpha\cos\alpha < 0 \wedge \sin\alpha > 0$;

5.5 $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$;

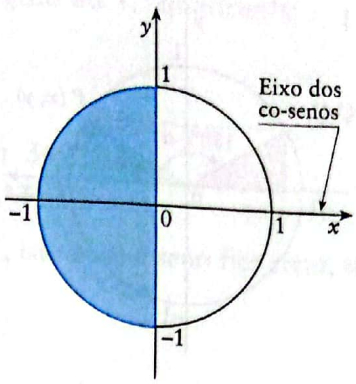
5.6 $\cos\alpha\tan\alpha > 0$;

5.7 $\frac{\cos^2\alpha}{\tan\alpha} > 0$.

5.2 $\frac{\sin^2 x}{\cos x} < 0$

Ora, $\sin^2 x \geqslant 0$, $\forall x$ (o quadrado de um número real é sempre um número não negativo).

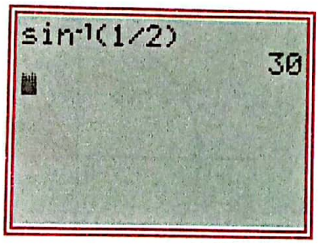
Assim, o denominador terá de ser menor que zero. Se $\cos x < 0$, então o ângulo x pertence ao 2.° ou ao 3.° quadrante.



2.8 Redução ao 1.° quadrante

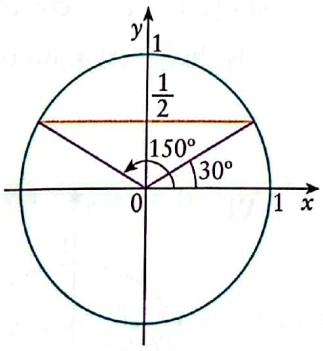
Qual será a amplitude do ângulo cujo seno é $\frac{1}{2}$?

Usando a calculadora gráfica obtém-se o ecrã:



De acordo com a calculadora gráfica, o ângulo cujo seno é $\frac{1}{2}$ tem 30° de amplitude.

Só haverá no intervalo $]-180°, 180°]$ um ângulo cujo seno é $\frac{1}{2}$?



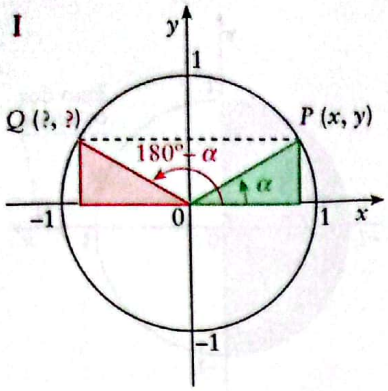
No intervalo $]-180°, 180°]$ há dois ângulos que têm o mesmo seno, um do 1.° Q e outro do 2.° Q.

A calculadora gráfica apenas indica um dos ângulos. Por isso, devemos recorrer ao círculo trigonométrico e procurar as relações das razões trigonométricas entre ângulos de diferentes quadrantes.

Fazer a **redução ao 1.° quadrante** é estabelecer fórmulas que relacionam as razões trigonométricas de um ângulo de qualquer quadrante com as razões trigonométricas de um ângulo do 1.° quadrante.

Digitalizada com CamScanner

I



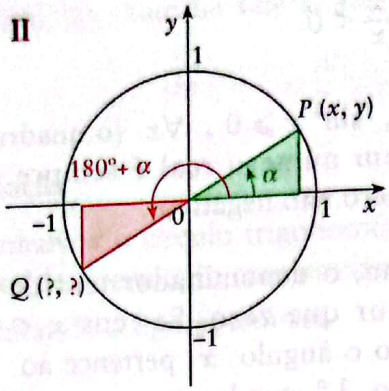
$Q \curvearrowright (-x, y)$

$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$

$\tan(180° - \alpha) = -\tan \alpha$

II



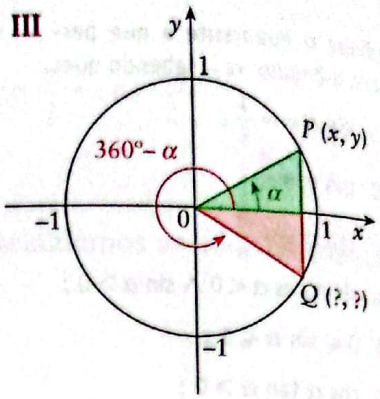
$Q \curvearrowright (-x, -y)$

$\sin(180° + \alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(180° + \alpha) = -\cos \alpha$

$\tan(180° + \alpha) = \tan \alpha$

III



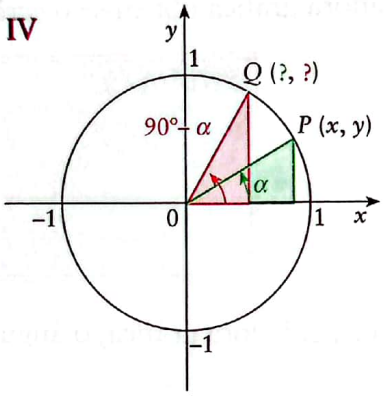
$Q \curvearrowright (x, -y)$

$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$

$\tan(360° - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

IV

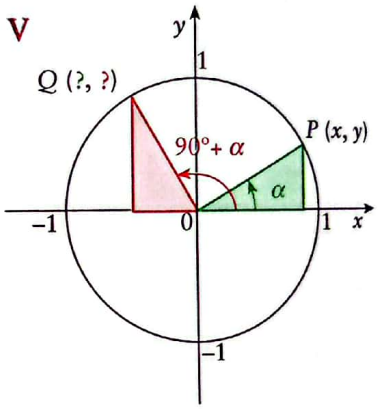


$Q \curvearrowright (y, x)$

$\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$

$\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$

V

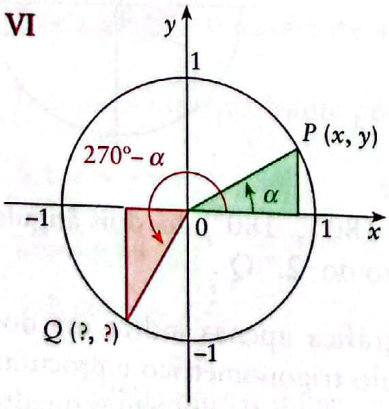


$Q \curvearrowright (-y, x)$

$\sin(90° + \alpha) = \cos \alpha$

$\cos(90° + \alpha) = -\sin \alpha$

VI

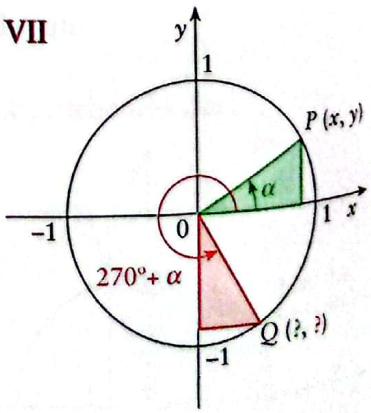


$Q \curvearrowright (-y, -x)$

$\sin(270° - \alpha) = -\cos \alpha$

$\cos(270° - \alpha) = -\sin \alpha$

VII



$Q \curvearrowright (y, -x)$

$\sin(270° + \alpha) = -\cos \alpha$

$\cos(270° + \alpha) = \sin \alpha$

Digitalizada com CamScanner

Método prático para a redução de um ângulo ao 1.° quadrante

- **O ângulo a reduzir é dado**

Escreve-se o ângulo na forma:

$$180° - \alpha \text{ ou } 180° + \alpha \text{ ou } 360° - \alpha$$

conforme o ângulo seja do 2.°, 3.° ou 4.° quadrante.

Atende-se ao sinal e mantém-se a "função", isto é, se é seno fica seno, se é co-seno fica co-seno...

Exemplo:

Escreva como seno de um ângulo do 1.° quadrante $\sin 293°$.

Tem-se:

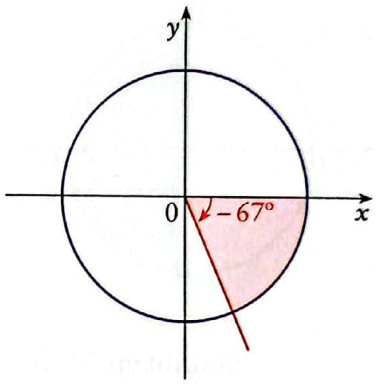
$293° \in 4.°\ Q$.

$360° - 293° = 67°$.

$\sin (360° - 67°) = ?\ \sin 67°$.

Como o seno no 4.° quadrante é negativo, vem:

$\sin 293° = \sin (360° - 67°) = -\sin 67°$.



- **O ângulo não é dado**

  - Se o ângulo está escrito como uma soma ou diferença com 180° ou 360°, mantém-se a "função".
  - Se o ângulo está escrito como uma soma ou diferença com 90° ou 270°, passa-se à "co-função", isto é, o seno passa a co-seno, o co-seno passa a seno...

Em ambas as situações atende-se ao sinal.

Exemplo:

- $\sin (x - \pi) = \sin (x - \pi + 2\pi) = \sin (\pi + x)$

  $\sin (\pi + x) = ?\ \sin x$

  Como $(\pi + x) \in 3.°\ Q$ e no 3.° Q o seno é negativo, vem:

  $$\sin (\pi + x) = -\sin x$$

- $\cos\left(\frac{7}{2}\pi + x\right) = \cos\left(\frac{7}{2}\pi + x - \frac{4}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)$

  $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = ?\ \sin x$

  Como $\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) \in 4.°\ Q$ e no 4.° Q o co-seno é positivo, vem:

  $$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = +\sin x\,.$$

Observação

Nas simplificações considera-se sempre x pertencente ao 1.° quadrante. Se tal não acontecesse, nada alteraria a expressão final.

Tudo se passava como se se efectuasse uma rotação em torno da origem e as relações definidas ficariam na mesma.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 6 **Determinar o valor exacto**

Sabe-se que $f(x)=\dfrac{1-\sin x+\cos x}{\tan x}$, $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

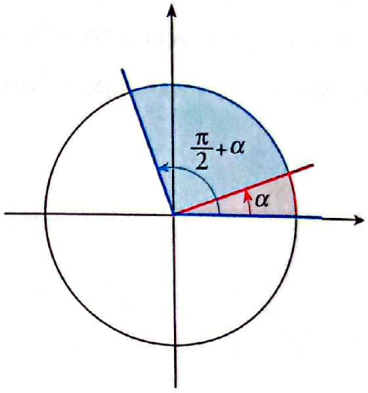
Se $\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ e $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\dfrac{5}{9}$, determine o valor exacto de $f(\alpha)$.

Resolução

$$f(x)=\frac{1-\sin x+\cos x}{\tan x},\ x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$f(\alpha)=\frac{1-\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan\alpha},\ \alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

Para determinar $f(\alpha)$ é necessário conhecer $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$.

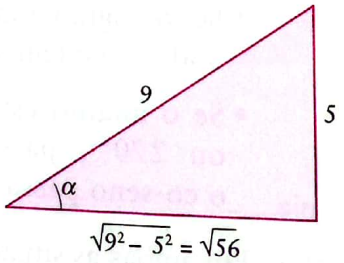


Sabe-se que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{5}{9}\iff-\sin\alpha=-\frac{5}{9}$$

$$\iff \sin\alpha=\frac{5}{9}$$

Partindo do conhecimento que $\sin\alpha=\dfrac{5}{9}$, vem:



Logo, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{56}}{9}$ e $\tan\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{56}}=\dfrac{5\sqrt{56}}{56}$.

Assim:

$$f(\alpha)=\frac{1-\frac{5}{9}+\frac{\sqrt{56}}{9}}{\frac{5}{\sqrt{56}}}$$

$$f(\alpha)=\frac{9\sqrt{56}-5\sqrt{56}+56}{45}$$

$$f(\alpha)=\frac{4\sqrt{56}+56}{45}$$

6

6.1 Sabendo que:

$f(\alpha)=(1+\sin\alpha)^2+\cos\alpha$,

determine $f(\alpha)$, sabendo que $\alpha\in$ 3.º quadrante e que $\tan(\pi-\alpha)=-3$.

6.2 Sabendo que $\alpha\in$ 2.º quadrante e que:

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\dfrac{1}{5}$,

calcule:

$\sin(\pi+\alpha)-\cos^2(\pi-\alpha)+$

$+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+$

$+\cos(\alpha-7\pi)$.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 7 **Cálculo do valor exacto de uma expressão**

Sabendo que $\sin(\pi+\alpha)=\frac{3}{5}$ e que $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$:

7.1 simplifique a expressão

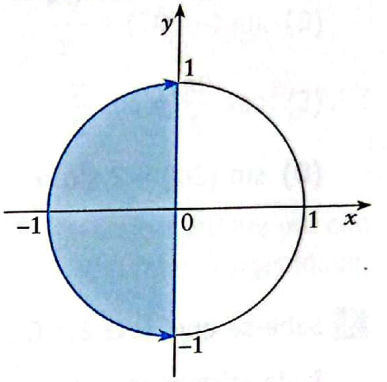
$$\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+\tan(\alpha-9\pi);$$

7.2 calcule o valor exacto de $\tan\alpha$.

Resolução

7.1 Comecemos por simplificar e interpretar os dados.

$$\sin(\pi+\alpha)=\frac{3}{5};\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$$



$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

Logo,

$$-\sin\alpha=\frac{3}{5}\iff\sin\alpha=-\frac{3}{5}$$

Então, $\alpha\in$ 3.° quadrante.

Assim, sabemos que $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ e que $\alpha\in$ 3.° quadrante.

Vamos simplificar a expressão pedida:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha-\frac{4\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\alpha-9\pi)=\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

Logo,

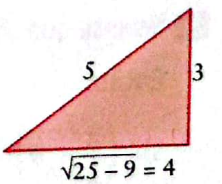
$$\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+\tan(\alpha-9\pi)=$$

$$=-\sin\alpha+\sin\alpha+\tan\alpha=\tan\alpha.$$

7.2 Sabe-se que:

$$\sin\alpha=-\frac{3}{5}\text{ e que }\alpha\in\text{ 3.° quadrante.}$$

Consideremos $\sin x=\frac{3}{5}$.



Observando o triângulo, vem $\tan x=\frac{3}{4}$.

Sabe-se que:

$$\sin\alpha=-\frac{3}{5}\text{ e que }\alpha\in\text{ 3.° quadrante.}$$

Logo, $\tan\alpha=\frac{3}{4}$.

E 7

7.1 Sabendo que $\tan\alpha=3$ e que $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\ 2\pi\right[$, calcule:
$A(\alpha)=1+\cos\alpha-2\sin\alpha$

7.2 Sabendo que:
$\cos(\pi+\theta)=-\frac{1}{4}$ com $\theta\in\left]-\pi,\ 2\pi\right[$,
calcule:
$A(\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-$
$-3\tan(\theta-7\pi)$

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 O ângulo $-\frac{16\pi}{3}$ pertence ao:

(A) 1.° Q ; **(B)** 2.° Q ;

(C) 3.° Q ; **(D)** 4.° Q .

8 pontos

2 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\tan 330° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(B) $\sin(-60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\cos\frac{5\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2}$

(D) $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha$

8 pontos

3 Sabe-se que $\theta \in$ 2.° Q .

Pode afirmar-se que:

(A) $\sin\theta\cos\theta > 0$; **(B)** $\tan\theta\cos\theta < 0$;

(C) $\sin^3\theta\cos\theta > 0$; **(D)** $\sin\theta > \cos\theta$.

8 pontos

4 Sabe-se que $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{5}$ e que $x \in$ 4.° Q .

Então, pode afirmar-se que:

(A) $\cos x = -\frac{1}{5}$; **(B)** $\sin x = \frac{1}{5}$;

(C) $\cos x = \frac{1}{5}$; **(D)** $\sin x = -\frac{1}{5}$.

8 pontos

5 Sabe-se que $\sin(\pi + \theta) = -\frac{1}{3}$ e que $\theta \in$ 2.° Q .

Então:

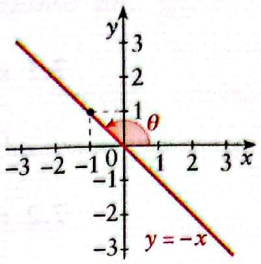
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ é igual a:

(A) $-\frac{2}{3}$; **(B)** $-2\sqrt{2}$;

(C) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; **(D)** $-\sqrt{2}$.

8 pontos

6 No referencial o. n. Oxy está representada a recta de função $y = -x$.



θ é o ângulo positivo formado pela parte positiva do eixo das abcissas e a recta r .

Pode afirmar-se que:

(A) $\sin(-\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(B) $\cos(-\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(C) $\tan(-\theta) = -1$;

(D) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8 pontos

7 Sabe-se que:

$\tan\theta = \frac{a}{b}$ com $a > 0$ e $b > 0$.

Pode afirmar-se que:

(A) $\sin\theta > 0$;

(B) $\cos\theta > 0$;

(C) $\sin\theta = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

(D) $\cos\theta = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

8 pontos

8 Observe a figura.

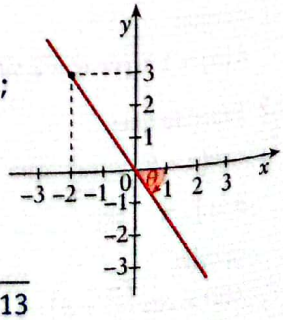
Pode afirmar-se que:

(A) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sqrt{13}}{13}$;

(B) $\cos(\pi - \theta) = \frac{2}{3}$;

(C) $\tan(\theta - \pi) = \frac{3}{2}$;

(D) $\cos(\pi + \theta) = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$.



8 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

9 Indique o quadrante a que pertence cada um dos ângulos.

9.1 $1015°$ **9.2** $2215°$

9.3 $-48°$ **9.4** $-6015°$

16 pontos

10 Calcule sem usar a calculadora.

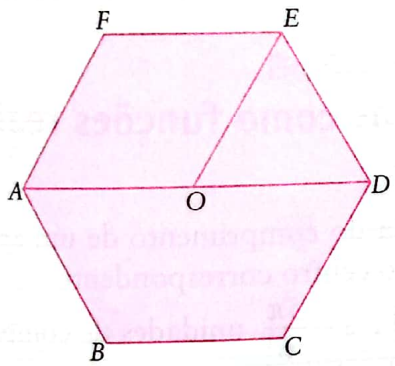
10.1 $\cos\frac{\pi}{2} - \tan\pi + \sin\pi$

10.2 $\cos(-675°) + \tan(225°) - \sin(-270°)$

10.3 $\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right) \times \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

18 pontos

11 Na figura $[ABCDEF]$ é um hexágono regular.



Escreva uma expressão geral da amplitude dos ângulos que têm:

11.1 $\dot{O}D$ como lado origem e $\dot{O}A$ como lado extremidade;

11.2 $\dot{O}D$ como lado origem e $\dot{O}E$ como lado extremidade.

20 pontos

12 Indique a amplitude e a que quadrante pertence um ângulo inscrito num decágono regular.

15 pontos

13 Sabendo que:

$\sin(\alpha - \pi) = \frac{1}{3}$ e que $\alpha \in 3.°\,Q$,

calcule:

$\tan(\pi - \alpha) + 2\cos(5\pi - \alpha)$

15 pontos

14 Considere que no referencial o. n. Oxy,

$P \curvearrowright (x, -3)$

Determine x sabendo que P pertence ao lado extremidade do ângulo θ e que $\sin\theta = -\frac{1}{2}$.

15 pontos

15 Determine y, ordenada do ponto $Q \curvearrowright (-3, y)$, que pertence ao lado extremidade do ângulo θ e tal que $\cos\theta = -\frac{4}{13}$.

15 pontos

16 Escreva um pequeno texto onde explique em que quadrantes se verifica a seguinte desigualdade:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x \tan x} < 0$$

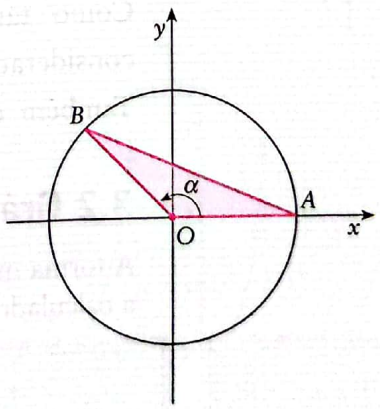
15 pontos

17 Na figura está representado um círculo trigonométrico e um triângulo $[AOB]$.

O lado $[OA]$ está contido no eixo das abcissas.

Os vértices A e B pertencem à circunferência de centro O.

Seja $\alpha = A\hat{O}B$.



Escreva, em função de α, a área do triângulo $[AOB]$.

15 pontos

Digitalizada com CamScanner

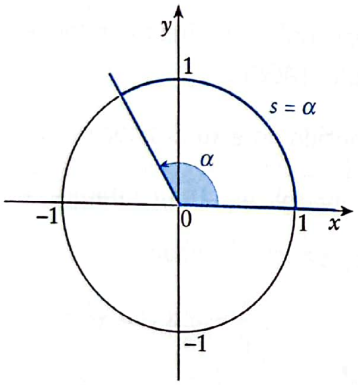
Objectivos

1. Definir as funções trigonométricas como funções reais de variável real.
2. Representar graficamente as funções trigonométricas.
3. Conhecer propriedades das funções trigonométricas.
4. Obter gráficos de funções trigonométricas a partir do gráfico de $y = \sin x$ e $y = \cos x$.
5. Utilizar as funções trigonométricas na modelação de situações reais.

3. Funções trigonométricas como funções reais de variável real. Utilização das funções trigonométricas na modelação de situações reais

A utilização das funções trigonométricas na modelação de situações reais é uma das mais importantes aplicações da trigonometria.

3.1 Funções trigonométricas como funções reais de variável real



No círculo trigonométrico, a medida do comprimento de um arco é igual à medida, em radianos, do ângulo ao centro correspondente.

Assim, se, por exemplo, $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ rad, $s = \frac{5\pi}{6}$ unidades de comprimento.

Como as medidas dos arcos são medidas de comprimento (cm, dm, m, ...) e estas medidas são números reais, conclui-se que $\sin x$ e $\cos x$ podem ser considerados como o seno e o co-seno de um número real.

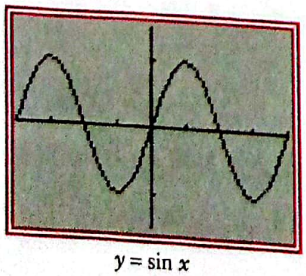
Se a cada número real x corresponde um e um só número real y, tal que $y = \sin x$ e $y = \cos x$, as funções seno e co-seno são **funções reais de variável real.**

Como $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$, também a função tangente pode ser considerada como uma função real de variável real.

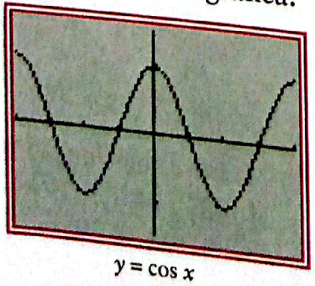
Também $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$, é função real de variável real.

3.2 Gráficos de funções trigonométricas

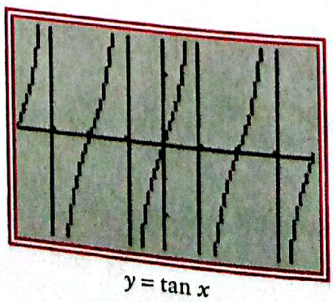
A forma mais simples de obter o gráfico das funções trigonométricas é utilizar a calculadora gráfica.



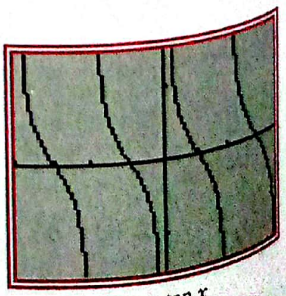
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$



$y = \operatorname{cotan} x$

Digitalizada com CamScanner

Também podemos obter o gráfico das funções trigonométricas usando o conhecimento das razões trigonométricas no círculo trigonométrico e, ponto por ponto, passar a informação para o referencial o. n. Oxy.

Gráfico de $y = \sin x$

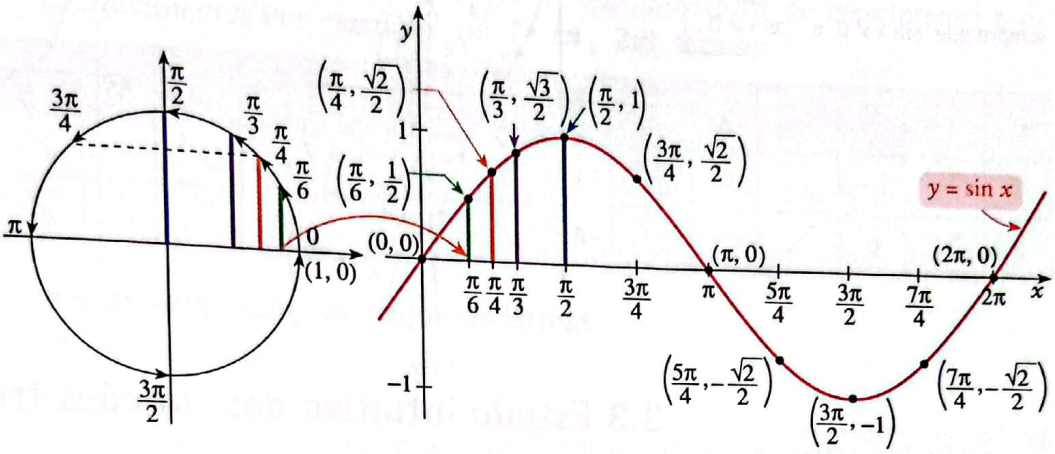


Gráfico de $y = \cos x$

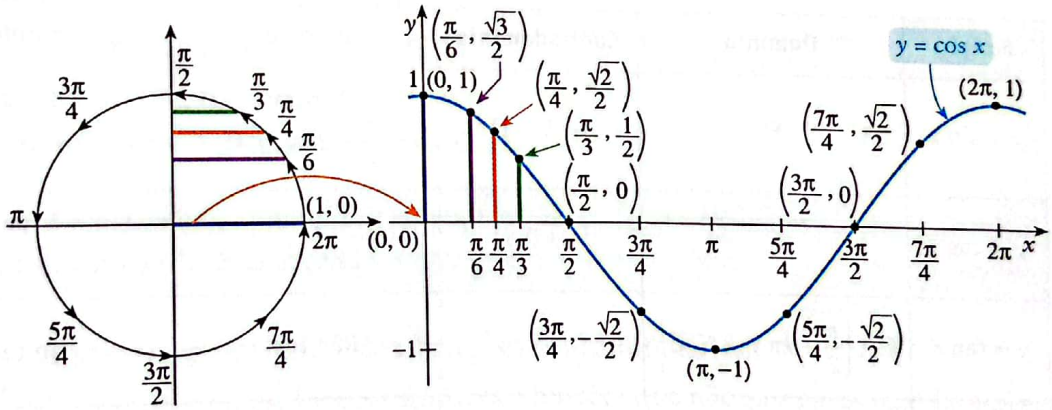
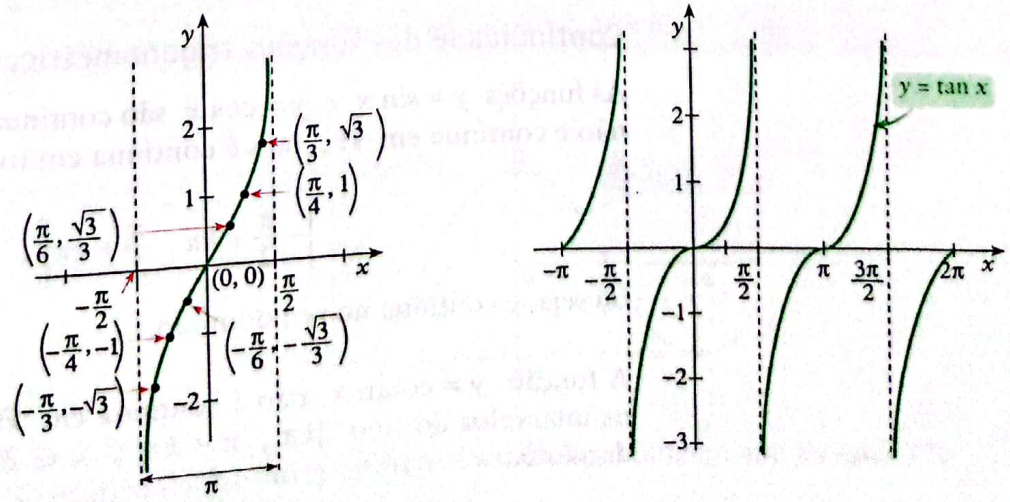


Gráfico de $y = \tan x$

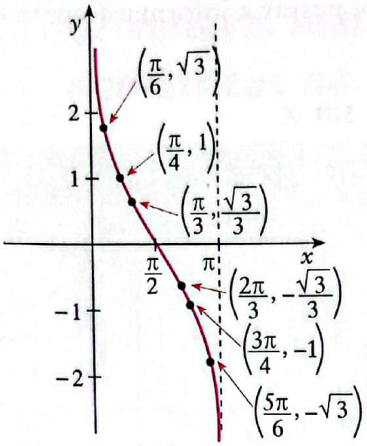


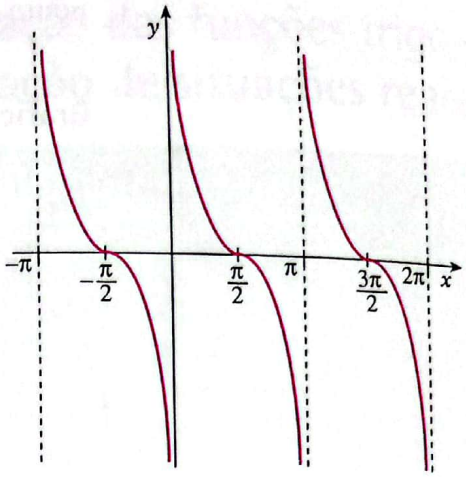
Digitalizada com CamScanner

Gráfico de $y = \text{cotan } x$

Observação

Repare que $\text{cotan } x = \dfrac{1}{\tan x}$, sempre que $\sin x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.





3.3 Estudo intuitivo das funções trigonométricas

Domínio, contradomínio, extremos e zeros das funções trigonométricas

Por observação dos gráficos, pode-se concluir que:

Função	Domínio	Contradomínio	Máximo	Mínimo	Zeros
$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	**1** para: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	**−1** para: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	**1** para: $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	**−1** para: $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$y = \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	Não tem	Não tem	$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$y = \text{cotan } x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	Não tem	Não tem	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Continuidade das funções trigonométricas

As funções $y = \sin x$ e $y = \cos x$ são contínuas em $\mathbb{R}$. A função $y = \tan x$ não é contínua em $\mathbb{R}$, mas é contínua em todos os intervalos do tipo

$$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$$

ou seja, é contínua no seu domínio.

A função $y = \text{cotan } x$ não é contínua em $\mathbb{R}$, mas é contínua em todos os intervalos do tipo $]k\pi,\ \pi + k\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$ ou seja, é contínua no seu domínio.

Digitalizada com CamScanner

Monotonia das funções trigonométricas

A função $y = \tan x$ é uma função crescente em todos os intervalos em que está definida.
A função $y = \operatorname{cotan} x$ é uma função decrescente em todos os intervalos em que está definida.
As funções $y = \sin x$ e $y = \cos x$ têm intervalos de crescimento e de decrescimento. Por exemplo, em $[-2\pi, 2\pi]$ tem-se:

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$y = \sin x$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$y = \cos x$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

Período das funções trigonométricas

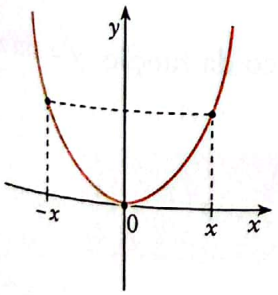
O que é uma função periódica?

A função f é periódica de período p se p é a menor constante positiva, tal que: $f(x + p) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Observando o gráfico das funções trigonométricas, conclui-se que:
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\forall x \in D_f$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\forall x \in D_f$
$\tan(x + \pi) = \tan x$, $\forall x \in D_f$
$\operatorname{cotan}(x + \pi) = \operatorname{cotan} x$, $\forall x \in D_f$

O período da função $y = \sin x$ e $y = \cos x$ é 2π.
O período da função $y = \tan x$ e $y = \operatorname{cotan} x$ é π.

Observação

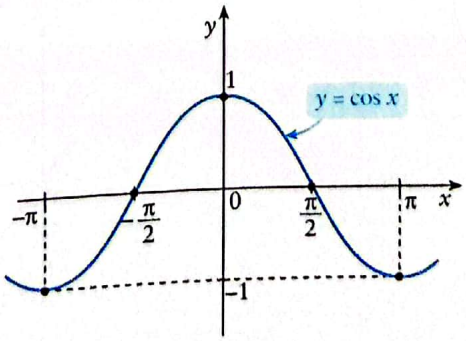


O gráfico de uma função par é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas.
$f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$

Simetria e paridade das funções trigonométricas

Há funções pares, funções ímpares e funções que não são pares nem ímpares.
A função f é uma função par se e só se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.
A função f é uma função ímpar se e só se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

A função $y = \cos x$ é uma função par.
$\cos(-x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$



O gráfico da função $y = \cos x$ é simétrico relativamente ao eixo Oy.

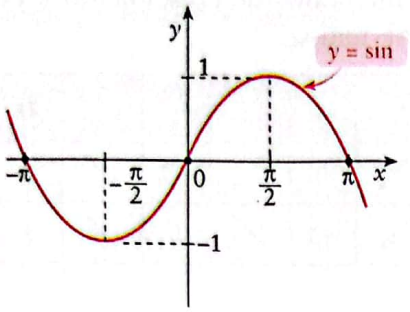
Digitalizada com CamScanner

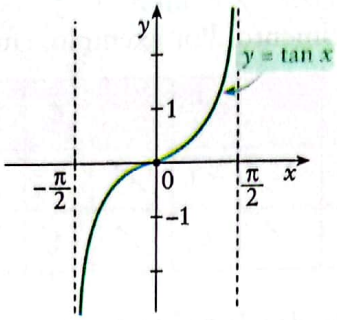
As funções $y = \sin x$, $y = \tan x$ e $y = \operatorname{cotan} x$ são funções ímpares.

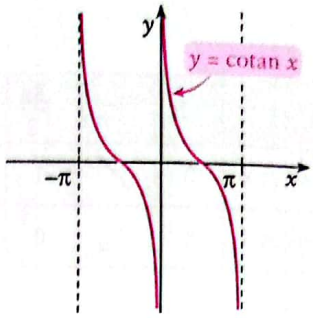
$\sin(-x) = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\tan(-x) = -\tan x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\operatorname{cotan}(-x) = -\operatorname{cotan} x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

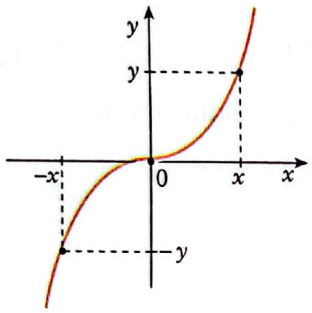






Os gráficos das funções $y = \sin x$, $y = \tan x$ e $y = \operatorname{cotan} x$ são simétricos relativamente à origem do referencial.

Observação



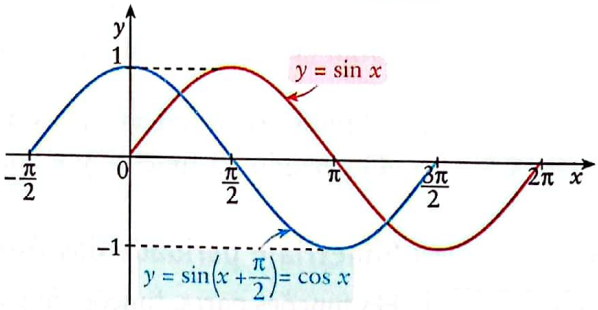
O gráfico de uma função ímpar é simétrico relativamente à origem do referencial.

$f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$

Comparação de $y = \sin x$ com $y = \cos x$

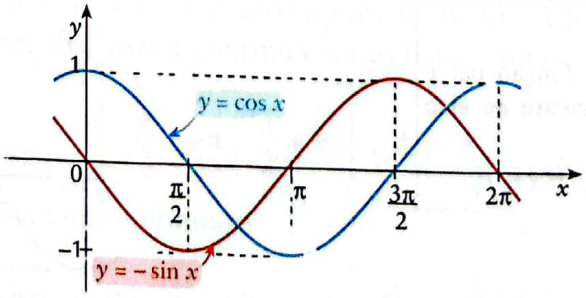
Usando as transformações dos gráficos das funções, pode passar-se do gráfico de um seno para o gráfico de um co-seno.

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



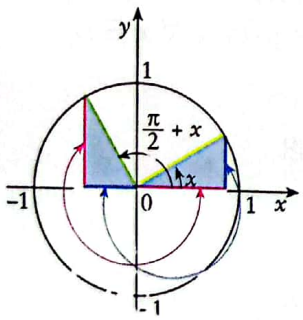
Deslocando para a esquerda $\frac{\pi}{2}$ unidades o gráfico da função $y = \sin x$, obtém-se o gráfico da função $y = \cos x$.

$$-\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \quad \text{ou} \quad \sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$



Partindo do gráfico de $y = \cos x$ e deslocando $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda, obtém-se o gráfico de $y = -\sin x$.

Observação



No círculo trigonométrico é muito simples concluir que:

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

e que

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

Digitalizada com CamScanner

3.4 Transformações dos gráficos das funções trigonométricas

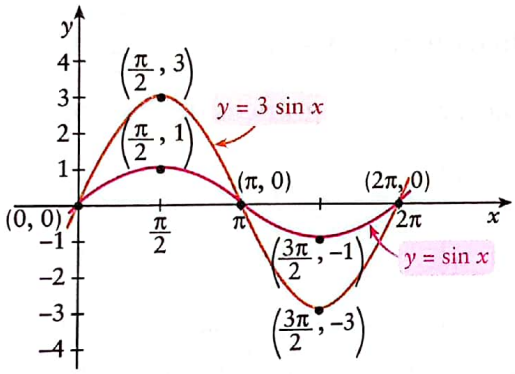
A utilização das funções trigonométricas na modelação de situações reais é uma das mais importantes aplicações do estudo da trigonometria.

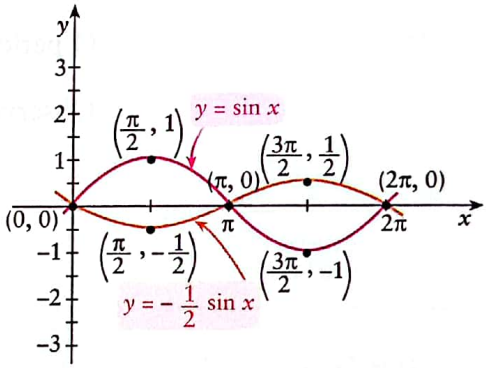
Para resolver este tipo de problemas é importante conhecer os efeitos nos gráficos das funções provocados pela introdução de parâmetros nas funções $y = \sin x$ e $y = \cos x$.

Gráfico de $y = A \sin x$ e de $y = A \cos x$ com $A \neq 0$

Como se obtém o gráfico de $y = 3 \sin x$ partindo do gráfico de $y = \sin x$?

E $y = -\frac{1}{2} \sin x$?





Obtém-se o gráfico de $y = 3 \sin x$ partindo do gráfico de $y = \sin x$ fazendo uma extensão na vertical segundo o factor 3.

Obtém-se o gráfico de $y = -\frac{1}{2} \sin x$ fazendo uma contracção na vertical segundo o factor $\frac{1}{2}$ e, em seguida, obtendo o gráfico simétrico relativamente ao eixo das abcissas.

De um modo geral:

Sendo $y = A \sin x$ ou $y = A \cos x$ com $A \neq 0$:

$|A|$ = amplitude

$|A| > 1 \longrightarrow$ produz uma extensão na vertical

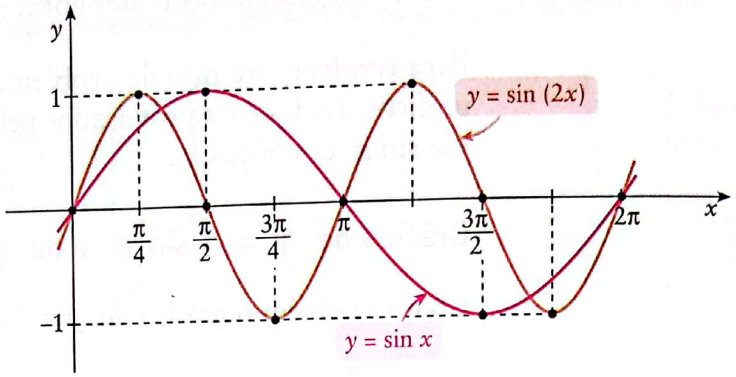
$|A| < 1 \longrightarrow$ produz uma contracção na vertical

$A < 0 \longrightarrow$ produz uma simetria relativamente ao eixo Ox

Digitalizada com CamScanner

Gráfico de $y = \sin(Bx)$ e de $y = \cos(Bx)$ com $B \neq 0$.
Período de uma função trigonométrica

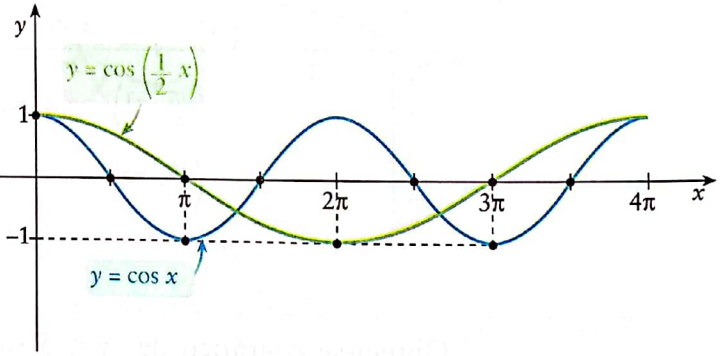
Como se obtém o gráfico de $y = \sin(2x)$ partindo do gráfico $y = \sin x$?



Obtém-se o gráfico de $y = \sin(2x)$ partindo do gráfico de $y = \sin x$ efectuando uma contracção na horizontal segundo o factor 2.

O período da função $y = \sin(2x)$ é $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Observemos, agora, os gráficos de $y = \cos x$ e $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$.



Repare que o período da função $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ é $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Como se altera o período da função também se altera a expressão geral dos zeros.

De um modo geral:

Sendo $y = \sin(Bx)$ ou $y = \cos(Bx)$, $B \neq 0$.

Período $= P = \frac{2\pi}{|B|}$.

$|B| > 1 \longrightarrow$ produz uma contracção na horizontal

$|B| < 1 \longrightarrow$ produz uma extensão na horizontal

Zeros
- $\frac{k\pi}{|B|}$, $k \in \mathbb{Z}$ para $y = \sin(Bx)$
- $\frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{|B|}$, $k \in \mathbb{Z}$ para $y = \cos(Bx)$

Digitalizada com CamScanner

Observação

Repare que o processo de determinação do período aplica-se a funções do tipo:
- $y = A \sin(Bx + C) + D$
- $y = A \cos(Bx + C) + D$
- $y = A \tan(Bx + C) + D$

Exemplo 1 **Determinação do período de uma função trigonométrica**

Considere as funções f, g e h definidas por

$f(x) = -2 \sin(\pi x)$; $g(x) = -2 \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)\right]$ e $h(x) = -\tan(5 - 2x)$.

Determine o período de cada uma das funções trigonométricas.

Resolução

- $f(x) = -2 \sin(\pi x)$

  Período de $f = \frac{2\pi}{\pi}$

  Período de f é igual a 2.

  2π é o período de $y = \sin x$, π é o coeficiente de x.

- $g(x) = -2 \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)\right]$

  Período de g é igual a $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

  2π é o período de $y = \cos x$, $\frac{\pi}{2}$ é o coeficiente de x.

- $h(x) = -\tan(5 - 2x) = \tan(-5 + 2x)$

  Período é igual a $\frac{\pi}{2}$.

  π é o período de $y = \tan x$, 2 é o coeficiente de x.

1

Determine o período de cada uma das seguintes funções trigonométricas e verifique a resposta usando a calculadora gráfica.

1.1 $f(x) = -3 \sin(4\pi x)$

1.2 $g(x) = -5 \cos(3x)$

1.3 $f(t) = 5 \cos(6\pi t)$

1.4 $h(x) = 1 - \tan(1 - 6x)$

1.5 $f(t) = 1 - \sin(3 - \pi t)$

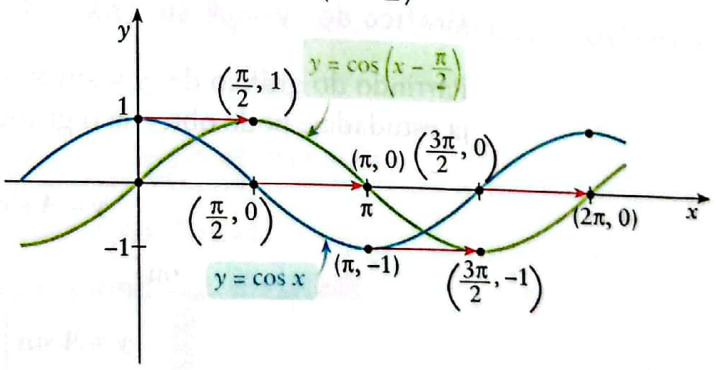
1.6 $f(t) = 1{,}3 + 2{,}5 \cos\frac{\pi(t+2)}{5}$

1.7 $f(t) = \tan(2t)$

1.8 $f(t) = 1 - \tan(1 - 3\pi t)$

Gráfico de $y = \sin(x - C)$ e $y = \cos(x - C)$, com $C \neq 0$

Observemos o gráfico de $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.



Obtém-se o gráfico de $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ partindo do gráfico de $y = \cos x$ fazendo uma translação na horizontal segundo o vector $\vec{v} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

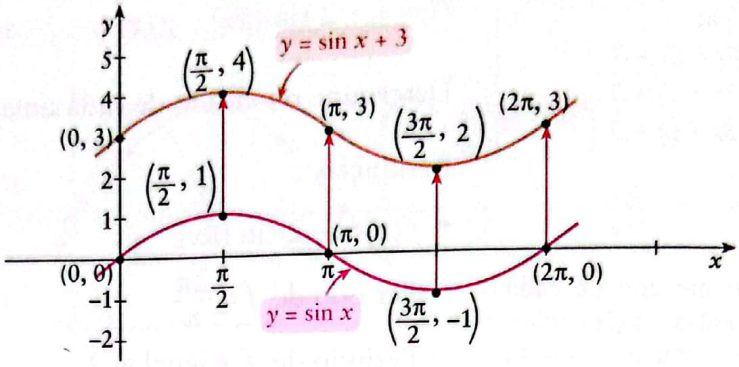
De um modo geral:

Sendo $y = \sin(x - C)$ ou $y = \cos(x - C)$, $C \neq 0$:
$|C|$ representa a deslocação na horizontal
$C > 0 \longrightarrow$ produz uma deslocação para a direita
$C < 0 \longrightarrow$ produz uma deslocação para a esquerda

Digitalizada com CamScanner

Gráfico de $y = \sin x + D$ e $y = \cos x + D$, com $D \neq 0$

Observemos o gráfico de $y = \sin x + 3$.



Obtém-se o gráfico de $y = \sin x + 3$ partindo do gráfico de $y = \sin x$ fazendo uma translação na vertical segundo o vector $\vec{v} = (0, 3)$.

De um modo geral:

Sendo $y = \sin x + D$ ou $y = \cos x + D$, $D \neq 0$:

$|D|$ representa a deslocação na vertical

$D > 0 \longrightarrow$ produz uma deslocação para cima

$D < 0 \longrightarrow$ produz uma deslocação para baixo

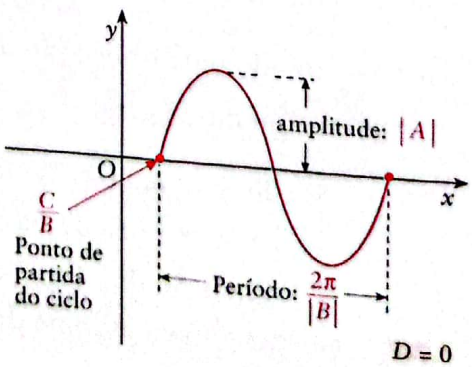
Gráfico de $y = A \sin (Bx - C) + D$ e $y = A \cos (Bx - C) + D$

Partindo do gráfico de $y = \sin x$ e $y = \cos x$ e usando as transformações já estudadas, pode obter-se o gráfico das funções:

$$y = A \sin (Bx - C) + D$$

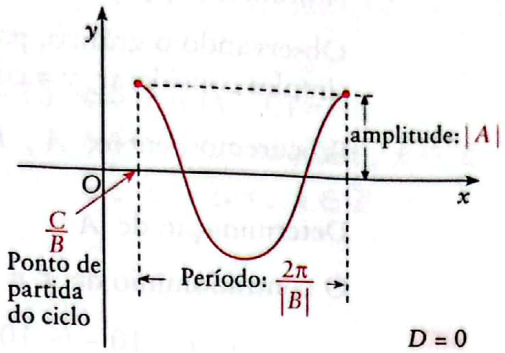
ou

$$y = A \sin \left[B \left(x - \frac{C}{B} \right) \right] + D$$

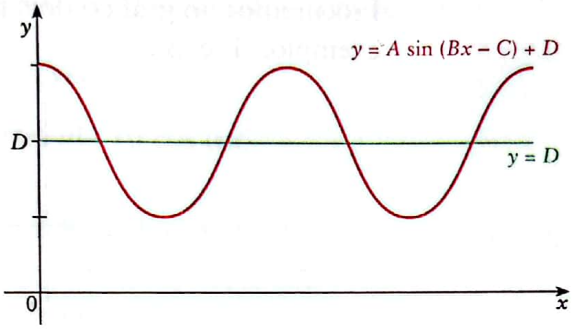


Digitalizada com CamScanner

$$y = A\cos(Bx - C) + D \text{ ou } y = A\cos\left[B\left(x - \frac{C}{B}\right)\right] + D$$



Nos gráficos apresentados, considerou-se $D = 0$. No caso de $D \neq 0$, a recta horizontal que "corta" o gráfico ao meio é a recta da equação $y = D$, como podemos observar no seguinte gráfico.

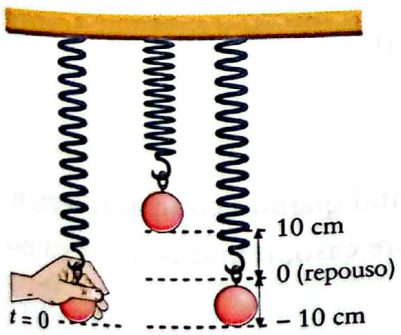


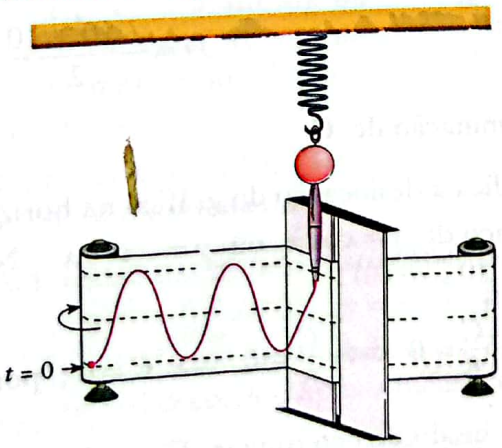
3.5 Aplicação das funções trigonométricas na modelação de situações reais

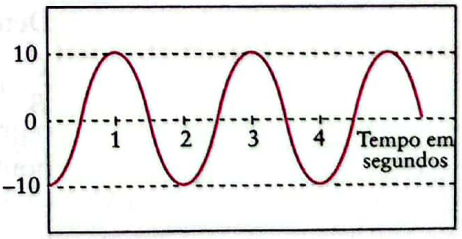
Os modelos matemáticos que descrevem fenómenos cíclicos são funções com senos e co-senos.

Exemplo 2 **A vibração de uma mola**

Observe as seguintes figuras.







Qual é a função trigonométrica representada pelo gráfico?

Digitalizada com CamScanner

Resolução

A primeira opção é decidir se vamos partir de $y = \sin t$ ou $y = \cos t$.

Observando o gráfico, para $t = 0$ a função não é nula, portanto, é mais simples considerar $y = \cos t$ como ponto de partida.

Procuremos, então, A, B, C e D, em que $y = A\cos(Bt - C) + D$.

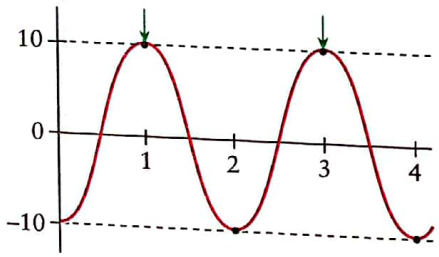
Determinação de A

O contradomínio de f é $D'_f = [-10, 10]$.

Então, $|A| = \dfrac{10 - (-10)}{2} = 10$; $A = \pm 10$.

Determinação de B

Procuremos no gráfico dois pontos consecutivos que definam um ciclo, por exemplo, 1 e 3.



O período da função é $3 - 1 = 2$

e, portanto,

$2 = \dfrac{2\pi}{B} \iff B = \pi$.

Determinação de D

A recta horizontal que "corta" o gráfico a meio é $y = 0$, logo, $D = 0$, ou, como o contradomínio da função é $[-10, 10]$:

$$D = \frac{-10 + 10}{2} = 0$$

Determinação de C

$\dfrac{C}{B}$ indica a deslocação do gráfico na horizontal quando comparado com o gráfico de $y = \cos x$ ou $y = -\cos x$. Neste caso, o gráfico começa no ponto $(0, -10)$.

Logo, $\dfrac{C}{B} = 0 \iff \dfrac{C}{\pi} = 0 \iff C = 0$, por exemplo.

Outro modo de determinar C é substituir as coordenadas de um ponto do gráfico na expressão.

Digitalizada com CamScanner

Por exemplo, $(1\ ,\ 10)$ pertence ao gráfico da função

$$y = -10\cos(\pi t - C)\ ,$$

logo,

$$10 = -10\cos(\pi - C) \iff \cos(\pi - C) = -1$$
$$\iff \pi - C = \pi + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff C = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Por exemplo:

$k = 0 \longrightarrow C = 0$

$k = 1 \longrightarrow C = 2\pi$

...

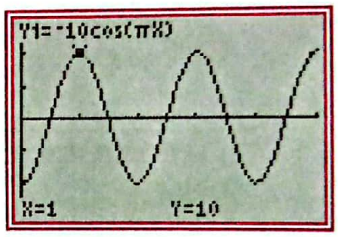
Repare que há um número infinito de valores para C.

Substituindo os valores encontrados, tem-se $f(t) = \pm 10\cos(\pi t)$.

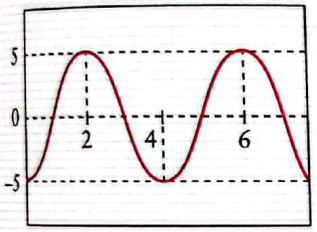
Como $f(0) < 0$, vem:

$$y = f(t) = -10\cos(\pi t)$$

Confirme com a calculadora gráfica.



2 Escreva um modelo que possa representar o seguinte gráfico:

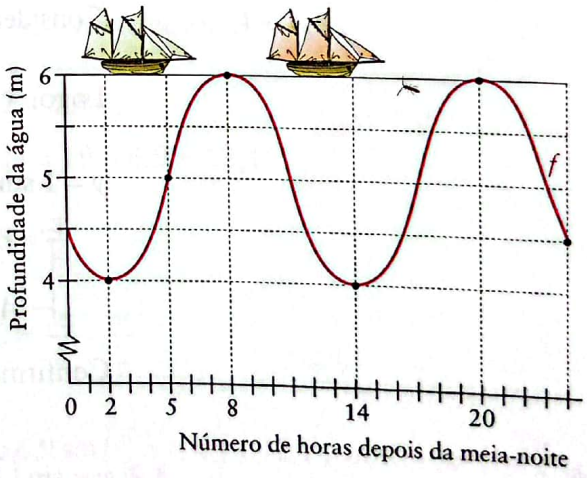


Exemplo 3 As marés

Com os dados recolhidos numa doca, construiu-se o esboço do gráfico da figura.

O gráfico mostra como varia a profundidade da água com as marés.

Na baixa-mar, a profundidade da água na doca é 4 m, com a subida da maré, a água atinge na praia-mar 6 m de profundidade.



Num certo dia a baixa-mar ocorreu às 2 horas da manhã e a praia-mar às 8 horas da manhã.

3.1 Escreva o modelo matemático do tipo

$$y = A\sin(Bx - C) + D\ ,$$

sendo y a profundidade da água, em metros, e x o tempo, em horas, decorrido após a meia-noite.

3.2 Usando o modelo referido em **3.1**, determine a profundidade da água às 17 horas.

Digitalizada com CamScanner

Resolução

3.1 Procuremos A, B, C e D de modo que $y = A \sin(Bx - C) + D$ represente a função dada.

Determinação de A

$D'_f = [4, 6]$; $|A| = \frac{6-4}{2} = 1$; $A = \pm 1$

Neste caso $A = 1$. Considerando como ponto de partida de referência $(5\ ,\ 5)$, a função começa por crescer, como $y = \sin x$ relativamente ao ponto $(0\ ,\ 0)$.

Determinação de B

Considerando 8 e 20 para definição de um ciclo, tem-se que o período P é $20 - 8 = 12$.

Então, $12 = \frac{2\pi}{B} \iff B = \frac{\pi}{6}$.

Determinação de D

A recta $y = 5$ "parte" o gráfico a meio, logo $D = 5$.

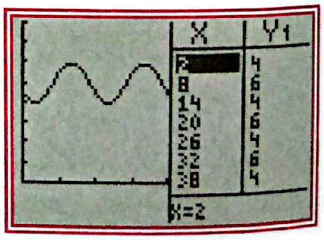
Determinação de C

Considerando que o gráfico se inicia em $(5\ ,\ 5)$, $\frac{C}{B} = 5 \iff C = \frac{5\pi}{6}$.

Logo:

$$y = 1 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{5\pi}{6}\right) + 5$$

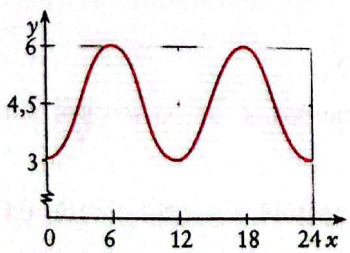
A B C D



Confirme com a calculadora gráfica.

3

Escreva um modelo que possa representar o seguinte gráfico:

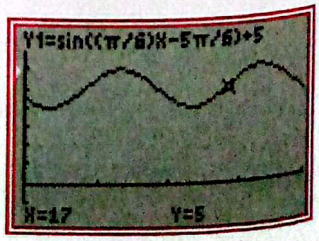


3.2 $y = \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{5\pi}{6}\right) + 5$ e $x = 17$.

Logo, $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} \times 17 - \frac{5\pi}{6}\right) + 5$

$y = \sin(2\pi) + 5 \iff y = 5$

Às 17 horas a profundidade da agua era de 5 metros.



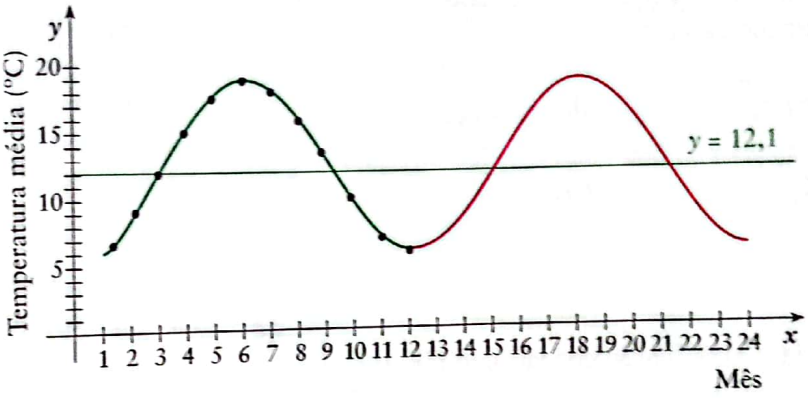
Digitalizada com CamScanner

3.6 Utilização da calculadora na modelação de funções cujo gráfico é uma sinusóide

A tabela seguinte mostra as temperaturas médias num dado local durante os 12 meses de um ano.

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
6,5	9,1	12,1	15,2	17,6	19	18,2	16,1	13,4	10,1	6,5	5,2

Representando os dados no gráfico, vem:



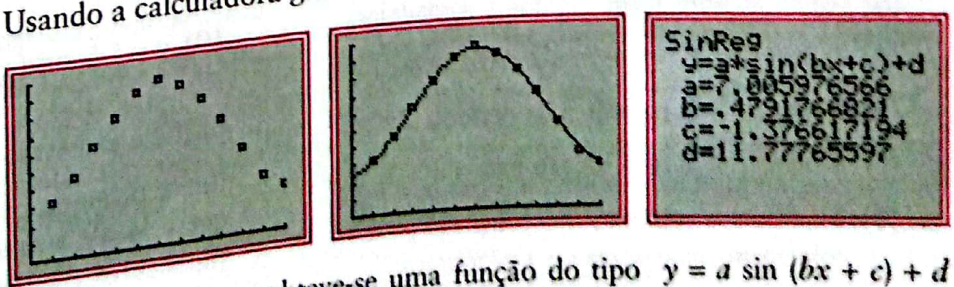
Usando o método definido nos exemplos anteriores, pode concluir-se que:

$$y = 6{,}9 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{2}\right) + 12{,}1 \text{ , pois tem-se:}$$

- $|A| = \frac{1}{2}|19 - 5{,}2| = 6{,}9$ e, neste caso, $A = 6{,}9$.
- $19 - 5{,}2 = 13{,}8$; $13{,}8 : 2 = 6{,}9$
  $5{,}2 + 6{,}9 = 12{,}1 = D$ ou $D = 19 - 6{,}9 = 12{,}1$
- $P = \frac{2\pi}{B}$; $12 = \frac{2\pi}{B} \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{6}$
- $\frac{C}{B} = 3 \Leftrightarrow \frac{C}{\frac{\pi}{6}} = 3 \Leftrightarrow C = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

ou, fazendo $f(6) = 19$ em $f(x) = 6{,}9 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - C\right) + 12{,}1$, obtém-se $C = \frac{\pi}{2}$.

Usando a calculadora gráfica com a função *SinReg*, vem:



Com a calculadora obteve-se uma função do tipo $y = a \sin(bx + c) + d$ com valores próximos dos obtidos com lápis e papel.

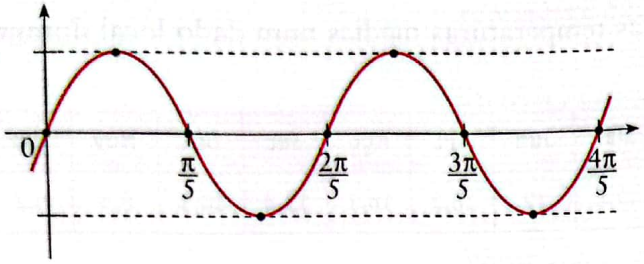
Observação

Forma sinusóide ou sinusoidal é uma imagem gráfica análoga aos gráficos das funções seno ou co-seno.

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.



Qual dos valores representados poderá ser o período da função?

(A) $\frac{2\pi}{5}$ **(B)** $\frac{\pi}{5}$

(C) $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{2}{5}$

10 pontos

2 Seja f uma função definida por $f(x) = \frac{1}{\tan(2x)}$.

Qual dos seguintes conjuntos poderá ser o domínio de f?

(A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(B) $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

(C) $]-\pi, \pi[$

(D) $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$

10 pontos

3 Considere as funções reais de variável real definidas por:

$f: x \mapsto y = \sin^2 x$; $g: x \mapsto y = \sin x^2$ e $h: x \mapsto y = e^{\sin x}$.

Das seguintes afirmações indique a verdadeira.

(A) As funções f, g e h são periódicas.

(B) A função h é periódica de período 2π.

(C) A função h é uma função par.

(D) Os máximos relativos das funções g e h coincidem.

10 pontos

4 Considere as funções reais de variável real:

$f: x \mapsto y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right)$

$g: x \mapsto y = 2 + \sin(-2x + \pi)$

Das seguintes afirmações indique a verdadeira:

(A) O contradomínio da função f é $[-2, 2]$.

(B) O período da função f é 2.

(C) O período da função g é 2.

(D) O contradomínio da função g é $[-1, 3]$.

10 pontos

5 À entrada de um porto de abrigo, a profundidade da água varia com as marés.

Num certo dia, a profundidade na praia-mar é de 10 m e de 7 m na baixa-mar.

Considere ainda que o tempo que decorre entre cada maré alta e cada maré baixa é de 6 horas, sendo igualmente de 6 horas o tempo que decorre entre cada maré baixa e cada maré alta.

Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a profundidade, y, em metros, de água no mar, à entrada do porto, t horas após a maré alta.

(A) $y = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 8{,}5$

(B) $y = 1{,}5\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 8{,}5$

(C) $y = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi t}{6} - 3\right) + 8{,}5$

(D) $y = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 8{,}5$

Qual é a expressão correcta?

Numa pequena composição explique as razões que o levam a rejeitar as outras três expressões (aponte três razões diferentes, uma para cada expressão rejeitada).

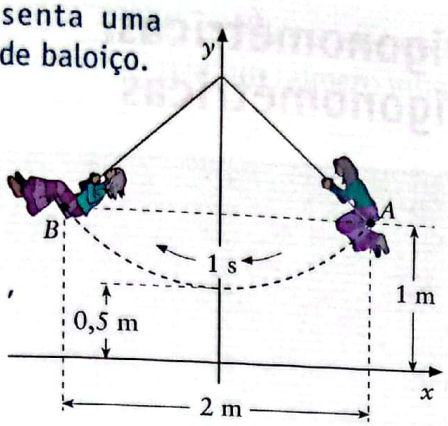
10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

6 A figura representa uma menina a andar de baloiço.

Seja $h(t)$ a função que a cada segundo faz corresponder a altura, h, em metros, da menina ao solo.



Para $t = 0$, a menina está em A, a 1 m do solo. Meio segundo depois está a 0,5 metros do solo e 0,5 segundos depois está em B a 1 metro do solo.

A menina anda no baloiço durante alguns segundos, passando sempre de A para B e de B para A, demorando em cada um destes percursos 1 segundo.

6.1 Copie e complete a tabela.

t (s)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
h (m)							

6.2 Faça um esboço para o gráfico da função h.

6.3 Mostre que:

$$h(t) = \frac{1}{4}\cos(2\pi t) + \frac{3}{4}$$

30 pontos

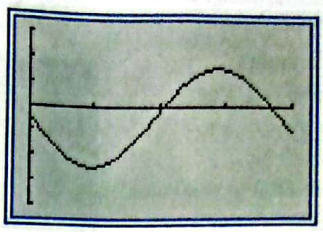
7 Uma população de aves tropicais varia anualmente atingindo o máximo de 10 000 em 1 de Janeiro e um mínimo de 4000 em 1 de Julho.

Sabendo que o modelo matemático que descreve a situação é um gráfico com a forma sinusoidal, faça uma curta composição onde refira:

- a forma como varia a população das aves ilustrando a sua descrição com um gráfico;
- uma previsão para o número de aves no dia 1 de Setembro.

30 pontos

8 Com a calculadora gráfica obteve-se o seguinte gráfico da função f:



Sabe-se que o máximo da função é 1,5 e o mínimo é $-2,5$. Considerando que:

$$f(0) = -0,5 \text{ e } f(3) = -2,5,$$

escreva uma expressão do tipo $y = A\sin(Bx - C) + D$ para definir a função.

30 pontos

9

9.1 Se considerarmos que a temperatura média durante os 365 dias do ano num dado local é modelada pela função:

$$y = A\sin[B(t - C)] + D,$$

em que t representa o tempo em dias, explique porque é que $B = \frac{2\pi}{365}$.

9.2 A temperatura mais baixa numa cidade foi de 3 °C e ocorreu em 30 de Janeiro (trigésimo dia do ano). A temperatura mais elevada foi de 35 °C.

Explique porque é que estes factos indicam que:

$$y = 16\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 121)\right] + 19.$$

9.3 A temperatura média, f, em graus Celsius, em duas cidades diferentes é modelada por:

Cidade A: $f(t) = 22\sin\frac{2\pi}{365}(t - 110) + 4$

Cidade B: $f(t) = 4\sin\frac{2\pi}{365}(t - 110) + 22$

onde t em dias, a partir de 1 de Janeiro.

Escreva uma curta composição para publicar num jornal acerca das temperaturas médias das cidades A e B, comparando a sua variação e o valor das mesmas.

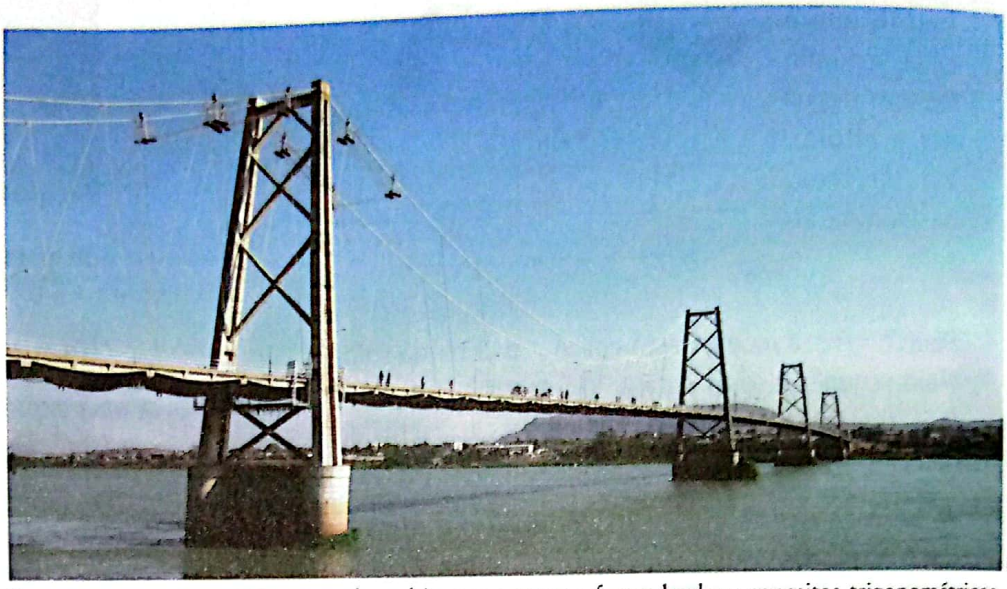
40 pontos

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Resolver equações trigonométricas (revisão).
2. Deduzir as fórmulas
   $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ e
   $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
   sendo α um ângulo qualquer (revisão).
3. Deduzir as fórmulas trigonométricas do seno, co-seno e tangente da soma e da diferença de dois ângulos.
4. Verificar identidades trigonométricas aplicando fórmulas trigonométricas.

4. Equações trigonométricas. Fórmulas trigonométricas



Ponte Presidente Samora Machel, rio Zambeze, Tete

Frequentemente, encontramos na vida real imagens que nos fazem lembrar conceitos trigonométricos. As marés são exemplos disso.

4.1 Equações trigonométricas

Uma **equação trigonométrica** é uma equação em que a variável está associada a uma expressão trigonométrica.

Por exemplo, são equações trigonométricas:

$$\sin x = \frac{1}{2}; \quad 2\cos x - 1 = 0 \quad \text{e} \quad 3\tan x + 5 = 0\,.$$

Na resolução de problemas que envolvem funções trigonométricas surge muitas vezes uma equação trigonométrica. Por isso, é muito importante aprender a resolver com destreza equações trigonométricas.

Equações do tipo: $\sin x = a$

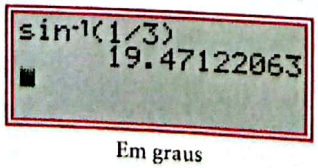
Considere-se a equação: $\sin x = \frac{1}{3}$

Uma equação traduz uma pergunta.

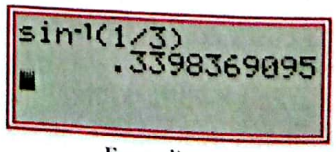
Neste caso, a pergunta é:

"Qual é amplitude do ângulo x tal que $\sin x$ é $\frac{1}{3}$?"

Usando a calculadora gráfica é fácil encontrar uma solução para a equação.



Em graus



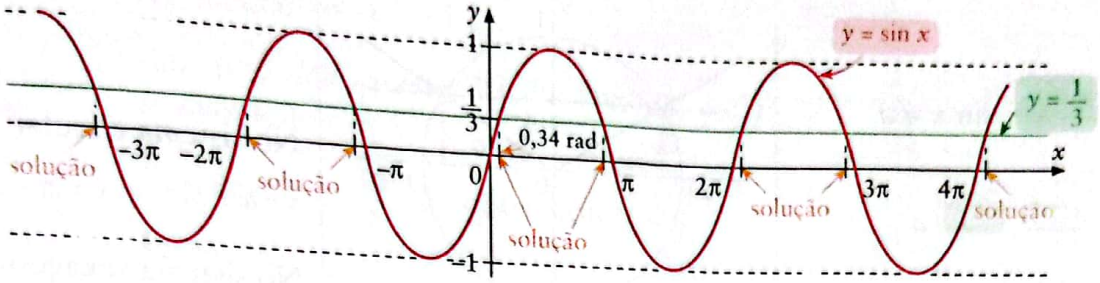
Em radianos

Assim, com a aproximação às centésimas do grau, $x = 19{,}47°$ e com aproximação às centésimas do radiano, $x = 0{,}34$ rad.

Até aqui tudo parece ser muito simples.

Digitalizada com CamScanner

O problema está no facto da figura seguinte sugerir que a equação $\sin x = \frac{1}{3}$ tem um número infinito de soluções.

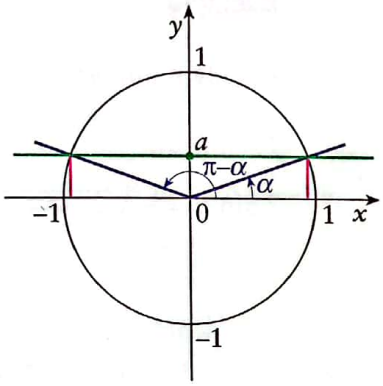


Com a calculadora encontramos apenas uma das soluções:

$$19{,}47° \text{ ou } 0{,}34 \text{ rad.}$$

Vejamos como proceder para encontrar as outras soluções.

Recorrendo ao círculo trigonométrico, verifica-se que:



Se $\sin \alpha = a$, também $\sin(\pi - \alpha) = a$.

Logo, se $19{,}47°$ é solução, também $(180 - 19{,}47)°$ é solução.

Se $0{,}34$ rad é solução, também $(\pi - 0{,}34)$ rad é solução.

Já encontrámos as duas soluções do intervalo $[0\ ,\ 2\pi]$.

Para escrever as outras soluções basta atender a que o período da função $y = \sin x$ é 2π.

Logo, as soluções são dadas por:

No sistema sexagesimal

$x = 19{,}47° + 360°\,k \ \vee\ x = (180 - 19{,}47)° + 360°\,k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.

No sistema circular

$x = 0{,}34 + 2k\pi \ \vee\ x = (\pi - 0{,}34) + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.

Quando se diz para resolver a equação, em $\mathbb{R}$, pretende-se que as soluções sejam apresentadas em radianos.

Digitalizada com CamScanner

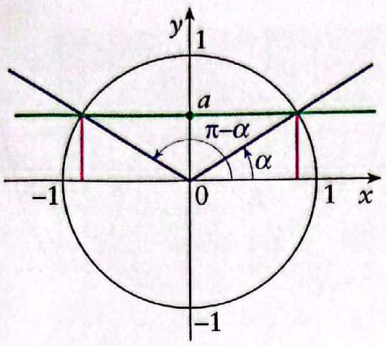
De um modo geral, para resolver uma equação do tipo $\sin x = a$, procede-se do seguinte modo:

$\sin x = a$

2ND sin a

$x = \ldots$

1.° Determina-se α com ou sem ajuda da calculadora.



2.° No círculo trigonométrico assinala-se α e $\pi - \alpha$.

No sistema circular

$x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

No sistema sexagesimal

$x = \alpha + k \times 360° \ \vee \ x = (180° - \alpha) + k \times 360°, \ k \in \mathbb{Z}$

3.° Escreve-se em radianos ou em graus a expressão geral das soluções da equação.

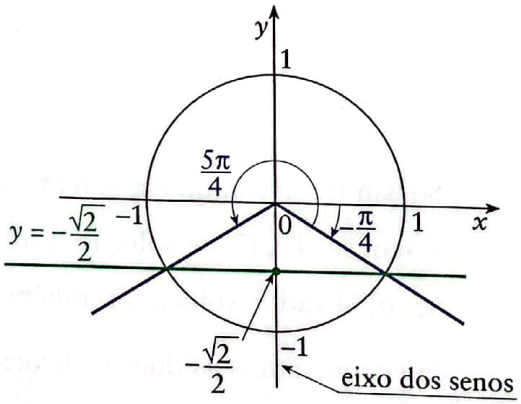
Exemplo 1 Resolução de uma equação trigonométrica do tipo $\sin x = a$

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $2 \sin x = -\sqrt{2}$.

Resolução

$2 \sin x = -\sqrt{2} \iff \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dá-se à equação a forma $\sin x = a$.



No círculo trigonométrico encontram-se as duas soluções do intervalo $[0, 2\pi]$:

$-\frac{\pi}{4}$ e $\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}$.

Logo:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

1

1.1 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$

c) $-\sqrt{3} = 2 \sin x$

d) $\frac{1}{5} + \sin x = 0$

1.2 Dada a função real de variável real

$f: x \mapsto y = \sin(2x)$

Determine:

a) os zeros da função;

b) os valores de $x \in [-\pi, \pi]$, de modo que $f(x)$ seja um máximo relativo.

Exemplo 2 Resolução de uma equação trigonométrica do tipo $\sin x = a$

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das equações.

2.1 $\sin x = -1$

2.2 $\sin(2x) = 0$

2.3 $\sin^2 x - 2 \sin x = 0$

Digitalizada com CamScanner

Observação

Note que não há contradição do que foi dito, pois:

$$\pi - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

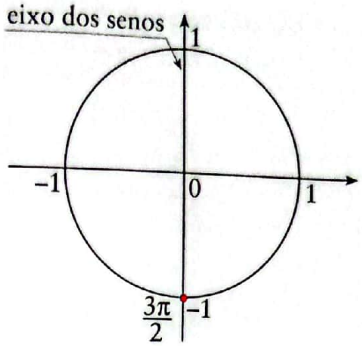
e

$-\frac{\pi}{2}$ rad e $\frac{3\pi}{2}$ rad têm o mesmo lado de origem e o mesmo lado extremidade.

Logo, α e $\pi - \alpha$ coincidem.

Resolução

2.1 $\sin x = -1$



No círculo trigonométrico encontra-se α, tal que $\sin \alpha = -1$.

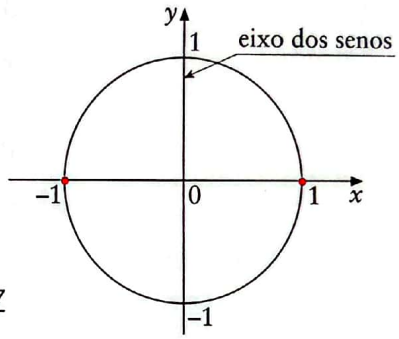
Em $[0, 2\pi[$ apenas há um ângulo α cujo seno é -1.

Esse ângulo é $\frac{3\pi}{2}$ (ler observação).

Logo,

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. ← Expressão geral das soluções da equação dada.

2.2 $\sin(2x) = 0$



No círculo trigonométrico encontramos α e $\pi - \alpha$, tal que $\sin \alpha = 0$.

$\alpha = 0$ e $\pi - \alpha = \pi$

Logo:

$2x = 0 + 2k\pi \ \vee \ 2x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Dividindo os dois membros pelo coeficiente de x, vem:

$x = k\pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. ← Expressão geral das soluções da equação dada.

Outra forma de obter a solução consiste em reparar que para $x = 0$ $\sin(2x) = 0$, e de π em π a situação repete-se.

Logo,

$2x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ (ler observação).

Observação

A expressão geral das soluções de uma equação trigonométrica gera o conjunto-solução.

Como $k \in \mathbb{Z}$, para o mesmo conjunto há um número infinito de expressões que podem gerar o mesmo conjunto.

Por exemplo:

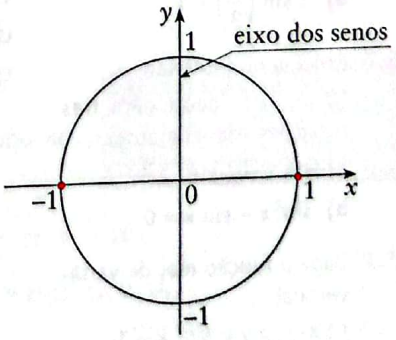
$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = -k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = (k+2)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

geram o mesmo conjunto-solução.

2.3 $\sin^2 x - 2 \sin x = 0$



$\sin x (\sin x - 2) = 0 \iff$

$\iff \sin x = 0 \ \vee \ \sin x = 2$

A equação $\sin x = 2$ é impossível pois $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Considerando a equação $\sin x = 0$, vem:

$x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ou

$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. ← Expressão geral das soluções da equação dada.

2

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

2.1 $\sin(3x) = 1$

2.2 $\sin(-2x) = 0$

2.3 $\sin^2 x = \sin x$

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 3 **Resolução de uma equação trigonométrica num intervalo**

Resolva em $[0°\ ,\ 360°]$ a equação $\sin(2x) = -\sin x$.

Resolução

$\sin(2x) = -\sin x \iff$

$\iff \sin(2x) = \sin(-x)$

$-\sin(x) = \sin(-x)$

Dá-se à equação a forma $\sin x = \sin \alpha$.

Logo:

$2x = -x + k \times 360° \ \vee \ 2x = 180° - (-x) + k \times 360°\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.

Resolvem-se as equações em ordem a x.

$3x = k \times 360° \ \vee \ x = 180° + k \times 360°\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = k \times 120° \ \vee \ x = 180° + k \times 360°\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Aplica-se a fórmula $\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + k \times 360° \ \vee \ x = \pi - \alpha + k \times 360°\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.

Para procurar as soluções do intervalo $[0°, 360°]$ atribuem-se valores a k.

$x = k \times 120° \ \vee \ x = 180° + k \times 360°\ ,\ k \in \mathbb{Z}$.

$k = 0 \longrightarrow x = 0° \ \vee \ x = 180°$

$k = 1 \longrightarrow x = 120° \ \vee \ x = \cancel{540°}$

$k = 2 \longrightarrow x = 240° \ \vee \ x = \cancel{900°}$

$k = 3 \longrightarrow x = 360° \ \vee \ x = \cancel{1260°}$

$k = -1 \longrightarrow x = \cancel{-120°} \ \vee \ x = \cancel{-180°}$

Para $k = 4$ ou $k = -2$ não há mais soluções da equação no intervalo $[0°\ ,\ 360°]$.

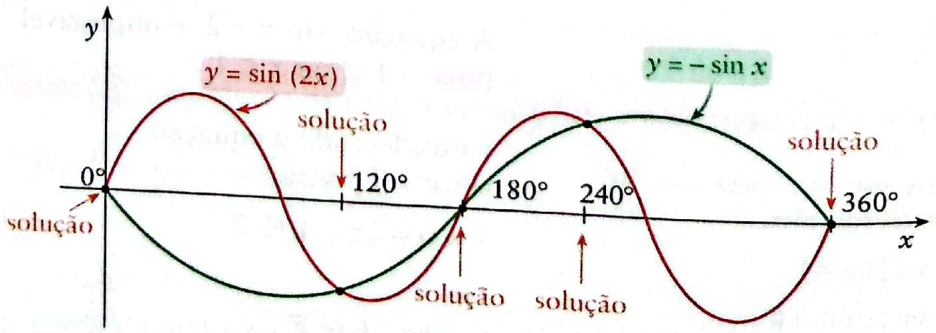
Logo, no intervalo $[0°\ ,\ 360°]$ as soluções da equação

$$\sin(2x) = -\sin x$$

são:

$$0°\ ,\ 120°\ ,\ 180°\ ,\ 240° \text{ e } 360°\ .$$

Com a ajuda da calculadora gráfica e procurando os pontos de intersecção dos gráficos das funções $y = \sin(2x)$ e $y = -\sin x$, pode confirmar-se que a equação tem cinco soluções no intervalo $[0°\ ,\ 360°]$.



3

3.1 Resolva no intervalo $]-360°\ ,\ 360°[$ cada uma das seguintes equações trigonométricas.

a) $\sin(-2x) + \sin x = 0$

b) $2 \sin\left(\frac{x}{3}\right) = 1$

3.2 Resolva no intervalo $[0\ ,\ 2\pi]$ cada uma das equações trigonométricas.

a) $\sin x = -\sin(2x)$

b) $\sin^2 x - \sin x = 0$

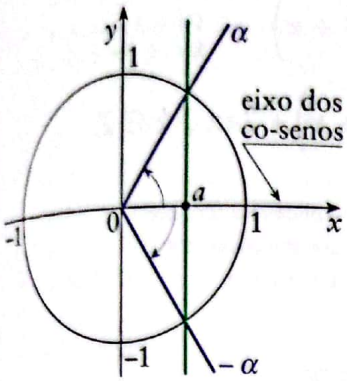
3.3 Dada a função real de variável real

$f : x \rightsquigarrow y = \sin^2 x - 1$,

determine $x \in [-\pi\ ,\ \pi]$ em que $f(x) = \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)$.

Digitalizada com CamScanner

Equações do tipo: $\cos x = a$



Depois de se ter compreendido a resolução de uma equação do tipo $\sin x = a$ é muito simples resolver uma equação do tipo $\cos x = a$.

Para tal basta ter em conta que:

- α e $\pi - \alpha$ têm o mesmo seno
- α e $-\alpha$ têm o mesmo co-seno

Assim:

$\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \vee x = (\pi - \alpha) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \cos \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

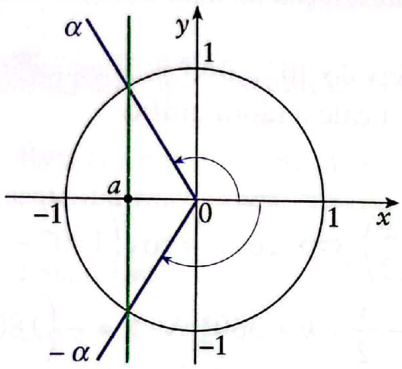
Logo, para resolver uma equação do tipo $\cos x = a$, procede-se do seguinte modo:

$\cos x = a$

2ND cos a

$x = \ldots$

1.º Determina-se α com ou sem ajuda da calculadora.



2.º No círculo trigonométrico assinala-se α e $-\alpha$.

No sistema circular

$x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

No sistema sexagesimal

$x = \alpha + k \times 360° \vee x = -\alpha + k \times 360°,\ k \in \mathbb{Z}$.

3.º Escreve-se a expressão geral das soluções.

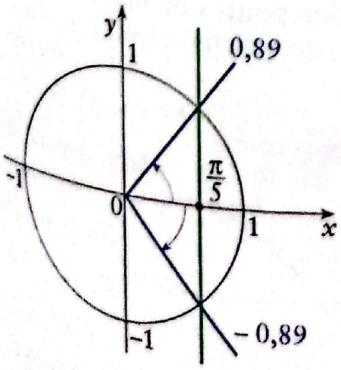
Exemplo 4 Resolução de uma equação trigonométrica do tipo $\cos x = a$

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações.

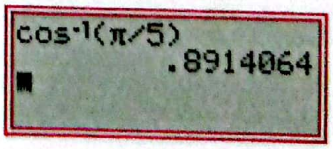
4.1 $\cos x = \frac{\pi}{5}$ **4.2** $\cos(2x) = -\sin x$

Resolução

4.1 $\cos x = \frac{\pi}{5}$



Com a ajuda da calculadora determina-se α tal que $\cos \alpha = \frac{\pi}{5}$.



No círculo trigonométrico assinala-se α e $-\alpha$.

$\alpha = 0{,}89$ rad (2 c. d.) ; $-\alpha = -0{,}89$ rad (2 c. d.).

Logo:

$x = 0{,}89 + 2k\pi \vee x = -0{,}89 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. ← Expressão geral das soluções da equação dada.

Digitalizada com CamScanner

4

Considere a função real de variável real definida por:

$f: x \mapsto y = 2\cos(2x)$

Determine $x \in [-\pi, \pi]$ de modo que:

4.1 $f(x) = 0$;

4.2 $f(x) = 2$;

4.3 $f(x) = -\sqrt{2}$;

4.4 $f(x) = -0{,}2$.

4.2 $\cos(2x) = -\sin x$

• $\cos(2x) = -\sin x \iff \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ← Dá-se à equação a forma $\cos x = \cos\alpha$.

Logo, $2x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \vee 2x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Resolvem-se as equações em ordem a x. Aplica-se a fórmula $\cos x = \cos\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{R}$.

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. ← Expressão geral das soluções da equação dada.

Exemplo 5 Resolução de uma equação trigonométrica num intervalo

Resolva, no intervalo $[0°, 360°]$, a equação $\cos x = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e verifique a solução com a calculadora gráfica.

Resolução

$\cos x = -\cos\left(\frac{x}{2}\right) \iff \cos x = \cos\left(180° - \frac{x}{2}\right)$

$\iff x = 180° - \frac{x}{2} + k \times 360° \vee x = -\left(180° - \frac{x}{2}\right) + k \times 360°$, $k \in \mathbb{Z}$

$\iff 3x = 360° - x + k \times 720° \vee 2x = -360° + x + k \times 720°$, $k \in \mathbb{Z}$

$\iff 3x = 360° + k \times 720° \vee x = -360° + k \times 720°$, $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = 120° + k \times 240° \vee x = -360° + k \times 720°$, $k \in \mathbb{Z}$

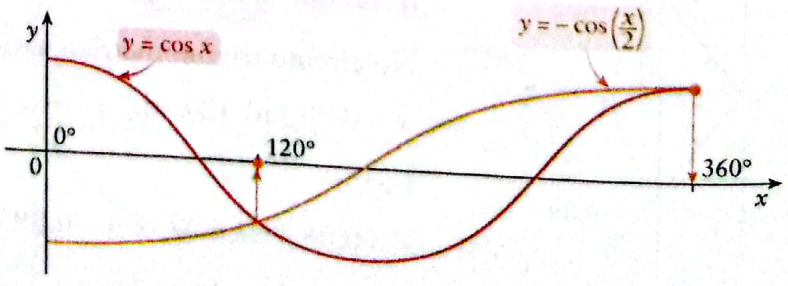
Em $[0°, 360°]$, vem:

$k = 0 \rightarrow x = 120° \vee x = -360°$; $k = 1 \rightarrow x = 360° \vee x = 360°$;

$k = 2 \rightarrow x = 600° \vee x = 1080°$

As soluções são $120°$ e $360°$.

Com a calculadora, procuram-se as abcissas dos pontos de intersecção de $y = \cos x$ e $y = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.



5

Resolva em $[-360°, 0°]$ a equação:

$\cos(2x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

Digitalizada com CamScanner

Equações do tipo: $\tan x = a$

Como sabemos, o período da função $y = \tan x$ é π.

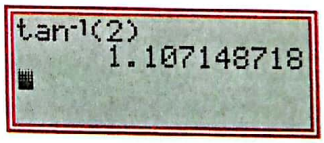
Assim, para resolver uma equação do tipo $\tan x = a$, procede-se do seguinte modo:

$\tan x = a$	No sistema sexagesimal $x = \alpha + 180° k$, $k \in \mathbb{Z}$. No sistema circular $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2ND TAN a $x = \ldots$	
1.° Determina-se α com ou sem a ajuda da calculadora.	2.° Escreve-se a expressão geral das soluções.

Exemplo 6 Resolução de uma equação trigonométrica

Resolva em $[0\ ,\ 2\pi]$ a equação $\tan x = 2$ e confirme a resposta com a calculadora gráfica.

Resolução



$\tan x = 2$

$x = 1{,}11$ rad (2 c. d.)

Logo:

$x = 1{,}11 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ← Expressão geral da solução da equação dada.

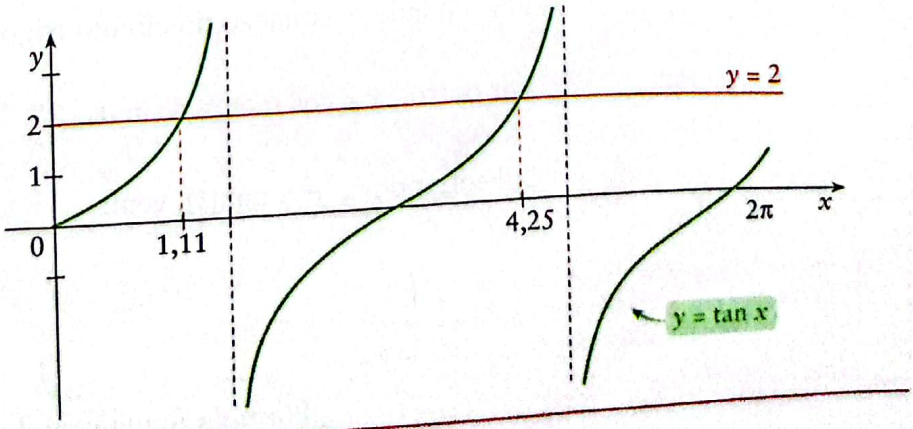
$k = 0 \longrightarrow x = 1{,}11$ rad

$k = 1 \longrightarrow x = 1{,}11 + \pi = 4{,}25$ (2 c. d.)

$k = 2 \longrightarrow x = 1{,}11 + 2\pi$

$k = -1 \longrightarrow x = 1{,}11 - \pi$

Com a ajuda da calculadora gráfica, obtêm-se as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos de $y = \tan x$ e $y = 2$.



6

Considere a função real de variável real

$f : x \mapsto y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Determine $x \in [-\pi\ ,\ 0]$ de modo que:

6.1 $f(x) = 0$;

6.2 $f(x) = \sqrt{3}$;

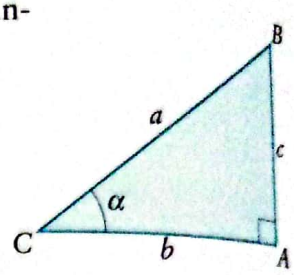
6.3 $f(x) = -1$;

6.4 $f(x) = -2$.

Digitalizada com CamScanner

4.2 Fórmula fundamental da trigonometria

Da definição das razões trigonométricas num triângulo rectângulo, vem:



$\sin\alpha = \frac{c}{a}$; $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ e $\tan\alpha = \frac{c}{b}$.

Consideremos a seguinte sequência de cálculos:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$

$= \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

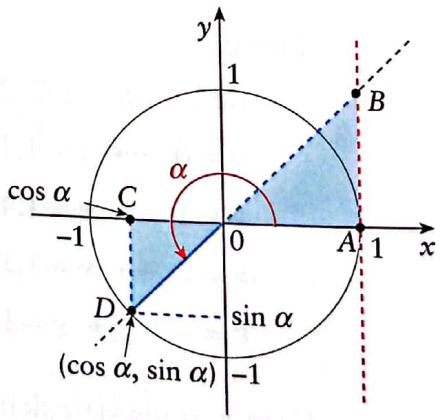
$\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$
$\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$

Logo,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Esta fórmula é conhecida por **fórmula fundamental da trigonometria** e aplica-se, assim como a fórmula $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, a um ângulo de qualquer quadrante, como se mostra a seguir.

Considere-se o círculo trigonométrico e um ângulo α, por exemplo, do 3.° Q.



Por um lado, a equação do círculo trigonométrico é $x^2 + y^2 = 1$ (1).

Por outro, $x = \cos\alpha$ e $y = \sin\alpha$.

Substituindo x e y em (1), vem:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

↑

Fórmula fundamental da trigonometria

Digitalizada com CamScanner

Observe que:

Os triângulos $[AOB]$ e $[OCD]$ do círculo trigonométrico anterior são semelhantes (têm um ângulo recto e $A\hat{O}B = C\hat{O}D$).

Logo:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$$

Substituindo:

$\overline{OA} = 1$; $\overline{AB} = \tan\alpha$; $\overline{OC} = \cos\alpha$ e $\overline{CD} = \sin\alpha$, vem

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} \iff \tan\alpha\,(\cos\alpha) = \sin\alpha$$

$$\iff \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Se α pertencer a qualquer outro quadrante as igualdades referidas são provadas da mesma forma.

Na resolução de problemas, nomeadamente na dedução de outras fórmulas trigonométricas, usam-se os seguintes resultados:

Para qualquer ângulo α, tem-se:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dividindo por $\sin^2\alpha$, vem:

$$1 + \frac{1}{\tan^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Dividindo por $\sin^2\alpha$, vem:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$

Fórmulas que resultam do facto de as funções seno e tangente serem funções ímpares e de a função co-seno ser uma função par.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 7 **Aplicação das fórmulas trigonométricas**

Considere a função $f(x) = 1 - 10\cos^2 x$.

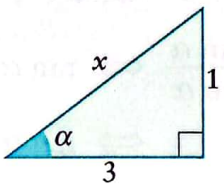
Sabendo que $\tan\alpha = \frac{1}{3}$, determine, sem recorrer à calculadora, $f(\alpha)$.

Resolução

Sabendo que $\tan\alpha = \frac{1}{3}$, pretendemos determinar $\cos^2\alpha$.

1.° processo

$\tan\alpha = \frac{1}{3}$



$x = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}$

$\cos\alpha = \frac{\pm 3}{\sqrt{10}}$ Não sabemos qual o quadrante a que pertence α.

$\cos^2\alpha = \frac{9}{10}$

Substituindo em $f(\alpha) = 1 - 10\cos^2\alpha$, vem:

$f(\alpha) = 1 - 10 \times \frac{9}{10}$

Logo, $f(\alpha) = -8$.

2.° processo

Para determinar $\cos^2\alpha$, pode usar-se a fórmula:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ Dividindo por $\cos^2\alpha$.

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ Substituindo $\tan\alpha = \frac{1}{3}$.

$\frac{1}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{10}$

Substituindo em $f(\alpha) = 1 - 10\cos^2\alpha$, vem:

$f(\alpha) = 1 - 10 \times \frac{9}{10}$.

Logo, $f(\alpha) = -8$.

7

7.1 Sendo $f(x) = a + b\sin^2 x$, determine $f(\theta)$, sabendo que:
$a = -1$; $b = 5$ e $\tan\theta = \frac{1}{5}$.

7.2 Determine $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$, sabendo que:
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{5}$ e que $x \in 2.^\circ\,Q$.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 8 **Verificação de uma identidade**

Mostre que:

$$\sin x \tan x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

Resolução

O 1.º membro da igualdade é mais complicado do que o segundo, portanto, vamos partir do 1.º membro e tentar chegar ao 2.º.

$$\begin{aligned}
1.^{\circ}\text{ membro} &= \sin x \tan x + \cos x \\
&= \sin x \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x && \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1} \\
&\quad (1) \qquad (\cos x) \\
&= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} && \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\
&= \frac{1}{\cos x} = 2.^{\circ}\text{ membro.}
\end{aligned}$$

8 Mostre que:

8.1 $\frac{\sin x}{\tan(-x)} = -\cos x$;

8.2 $\cos x - \cos x \sin^2 x = \cos^3 x$;

8.3 $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$;

8.4 $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} = 2 + 2\tan^2\theta$;

8.5 $\frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta} = 2 + \frac{2}{\tan^2\theta}$.

Exemplo 9 **Simplificar uma expressão**

Simplifique a expressão:

$$\frac{\tan x - \sin(-x)}{1+\cos x}, \quad 1+\cos x \neq 0$$

Resolução

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x - \sin(-x)}{1+\cos x} &= \frac{\tan x + \sin x}{1+\cos x} && \sin(-x) = -\sin x \\
&= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x}{1+\cos x} && \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{\sin x + \sin x \cos x}{\cos x + \cos^2 x} \\
&= \frac{\sin x \,(1+\cos x)}{\cos x \,(1+\cos x)} \\
&= \tan x, \text{ se } 1+\cos x \neq 0
\end{aligned}$$

9

9.1 Simplifique a expressão:

$$\ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + \ln|\cos x|$$

9.2 a) Descubra onde está o erro.

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x} = \sin x - \cos x$$

b) Simplifique correctamente a expressão:

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x}$$

Digitalizada com CamScanner

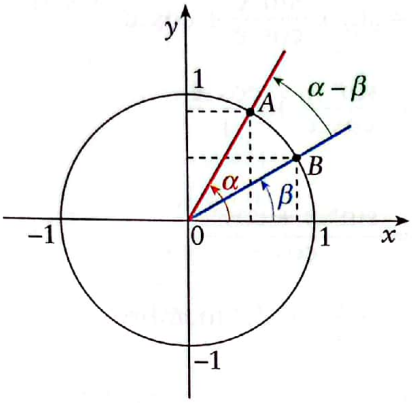
4.3 Fórmulas trigonométricas do seno, co-seno e tangente da soma e da diferença de dois ângulos

Co-seno da diferença de dois ângulos

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Para demonstrar esta fórmula usa-se a definição de produto escalar de dois vectores.

Considere-se a figura seguinte.



Tem-se:

$A \curvearrowright (\cos\alpha\ ,\ \sin\alpha)$

$B \curvearrowright (\cos\beta\ ,\ \sin\beta)$

$O \curvearrowright (0\ ,\ 0)$

$\overrightarrow{OA} = A - O = (\cos\alpha\ ,\ \sin\alpha)$

$\overrightarrow{OB} = B - O = (\cos\beta\ ,\ \sin\beta)$

Aplicando as definições de produto escalar nos dois vectores, vem:

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\cos\alpha\ ,\ \sin\alpha) \cdot (\cos\beta\ ,\ \sin\beta)$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \quad (1)$

Por outro lado,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \cos(\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos(\alpha - \beta) \quad (2)$

$\|\overrightarrow{OA}\| = 1$,
$\|\overrightarrow{OB}\| = 1$
$(\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB}) = \alpha - \beta$

Usando (1) e (2), vem:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\ ,\ \text{c.q.d.}$$

Co-seno da soma de dois ângulos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

A demonstração é muito simples, pois:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$

Aplicando o conhecimento do $\cos(\alpha - \beta)$, vem:

$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta)$

$\cos(-\beta) = \cos\beta$
$\sin(-\beta) = -\sin\beta$

Logo:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta\ ,\ \text{c.q.d.}$$

Observação

$\cos(a + b) \neq \cos a + \cos b$
$\cos(a - b) \neq \cos a - \cos b$

Digitalizada com CamScanner

Seno da diferença de dois ângulos

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Para demonstrar esta fórmula basta ter em conta que:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]\\&=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\end{aligned}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ e $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

Logo:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\text{, c.q.d.}$$

Seno da soma de dois ângulos

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

Para demonstrar esta fórmula basta ter em conta que:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin(\alpha-(-\beta))\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)\end{aligned}$$

$\cos(-\beta)=\cos\beta$
$\sin(-\beta)=-\sin\beta$

Logo:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\text{, c.q.d.}$$

Tangente da diferença de dois ângulos

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta},\ \alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta \text{ diferentes de } \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Para demonstrar esta fórmula basta ter em conta que:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

Assim, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

Dividindo por $\cos\alpha\cos\beta$, vem:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

Logo,

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\text{, c.q.d.}$$

Digitalizada com CamScanner

Tangente da soma de dois ângulos

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\ \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \text{ diferentes de } \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Para demonstrar esta fórmula basta ter em conta que:

$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\alpha-(-\beta))$

$$\tan(\alpha-(-\beta))=\frac{\tan\alpha-\tan(-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$\tan(-\beta)=-\tan\beta$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

Logo:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\ \text{c. q. d.}$$

4.4 Fórmulas da duplicação

Tendo em conta que:

- $\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)$
- $\sin(2\alpha)=\sin(\alpha+\alpha)$
- $\tan(2\alpha)=\tan(\alpha+\alpha)$, tem-se:

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\ \alpha \text{ e } 2\alpha \text{ diferentes de } \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Exemplo 10 Aplicação das fórmulas da soma e diferença de dois ângulos

Obtenha o valor exacto de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Resolução

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Aplica-se a fórmula:
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

10

10.1 Determine o valor exacto de:

a) $\cos 105°$;

b) $\sin\frac{\pi}{12}$;

c) $\tan\frac{7\pi}{12}$;

d) $\sin 30°$.

considerando $30°=90°-60°$.

10.2 Mostre que:

$$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\sin(2\alpha)$$

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 11 Valor exacto de uma expressão

Determine o valor exacto de:

$\cos 59° \cos 14° + \sin 59° \sin 14°$

Resolução

$\cos 59° \cos 14° + \sin 59° \sin 14°$

$= \cos (59° - 14°)$ — Aplica-se a fórmula $\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

$= \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

11

Considere a função:

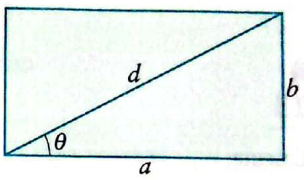
$f(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

Escreva outra função que tenha exactamente o mesmo gráfico usando a fórmula $\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Exemplo 12 A área do rectângulo

A figura mostra um rectângulo de comprimento a, altura b e diagonal d.

θ é o ângulo da diagonal com a base.



12.1 Mostre que a área do rectângulo pode ser expressa por:

$$A(\theta) = \frac{d^2}{2} \sin (2\theta), \ \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

12.2 Use a fórmula dada para determinar a amplitude de θ que torna máxima a área do rectângulo.

Resolução

12.1 Observando a figura, vem:

$\cos \theta = \frac{a}{d} \iff a = d \cos \theta$

$\sin \theta = \frac{b}{d} \iff b = d \sin \theta$

A área do rectângulo, $A(\theta)$, é dada por $a \times b$, ou seja:

$A(\theta) = d \cos \theta \times d \sin \theta$ — Substitui-se a por $d \cos \theta$ e b por $d \sin \theta$.

$A(\theta) = d^2 \cos \theta \sin \theta$

$A(\theta) = \frac{d^2}{2} (2 \cos \theta \sin \theta)$

$A(\theta) = \frac{d^2}{2} \sin (2\theta)$, c. q. d. — Aplica-se a fórmula $\sin (2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$.

12.2 $A(\theta) = \frac{d^2}{2} \sin (2\theta)$ — $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Sabemos que $0 < \sin (2\theta) \leqslant 1$. — $0 < 2\theta < 2\pi$

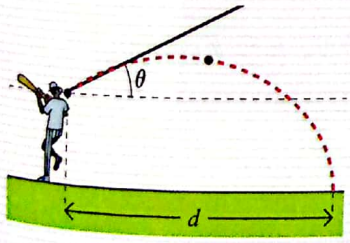
A expressão é máxima se $\sin (2\theta)$ for igual a 1.

$\sin (2\theta) = 1 \iff \theta = \frac{\pi}{4}$, pois $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Esta situação ocorre quando o rectângulo é um quadrado.

12

Observe a figura.



Para um determinado valor de velocidade inicial, d é dado por:

$d = 50 \sin \theta \cos \theta$

d em metros; $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

12.1 Escreva d apenas em função do seno.

12.2 Use a expressão escrita em **12.1** para determinar θ de modo que d seja máxima.

Digitalizada com CamScanner

4.5 Fórmulas de bissecção

Consideremos a seguinte fórmula:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Como $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, vem:

$$\cos(2\alpha) = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha$$

ou seja,

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

donde:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

ou

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}}$$

sendo α um ângulo qualquer.

Fazendo uma mudança de variável, podemos escrever:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

De forma análoga, obtém-se $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{1-\cos\alpha}{2} \iff \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

donde:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

pelo que,

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha\neq\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

13 Calcule.

13.1 $\sin\frac{\pi}{8}$

13.2 $\cos\frac{\pi}{8}$

13.3 $\tan\frac{\pi}{8}$

Exemplo 13 Para calcular

Calcule $\sin 15°$.

Resolução

$$\sin 15° = \sin\frac{30°}{2}$$

$$\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

14 Sabendo que:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e que

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2},$$

calcule:

14.1 $\sin\frac{x}{2}$;

14.2 $\cos\frac{x}{2}$.

Digitalizada com CamScanner

4.6 Fórmulas de transformação

Por vezes, tem interesse transformar somas ou diferenças de dois senos ou co-senos em produtos.

Sabemos que:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b\ ,\ a\ ,\ b \in \mathbb{R}$$

e que

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b\ ,\ a\ ,\ b \in \mathbb{R}$$

Consideremos $a+b=p$ e $a-b=q$ e resolvendo o seguinte sistema pelo método de substituição, temos que:

$$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=p+q \\ 2b=p-q \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{p+q}{2} \\ b=\dfrac{p-q}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Substituindo em $\sin(a+b)$ e em $\sin(a-b)$, vem:

$$\sin p = \sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} + \cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin q = \sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} - \cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Adicionando ordenadamente, vem:

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Subtraindo ordenadamente, vem:

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

Digitalizada com CamScanner

Sabemos que:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Considerando novamente $a+b=p$ e $a-b=q$, a solução do sistema de (1) da página anterior e a substituição em $\cos(a+b)$ e $\cos(a-b)$, vem:

$$\cos p = \cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} - \sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos q = \cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} + \sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Adicionando ordenadamente, vem:

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Subtraindo ordenadamente, vem:

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Exemplo 14 **Transformação numa soma**

Transforme numa soma:

$$\sin(2x) \times \cos x$$

Resolução

$$\sin(2x) \times \cos x = \sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}[\sin(3x) + \sin x]$$
$$= \frac{1}{2}\sin(3x) + \frac{1}{2}\sin x$$

Aplica-se a fórmula:
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

Exemplo 15 **Transformação numa soma**

Transforme numa soma:

$$\cos a \times \cos b$$

Resolução

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$
$$= \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

15

Transforme em somas:

15.1 $\sin(2x) \times \cos(3x)$;

15.2 $\cos(2x) \times \cos(5x)$.

Digitalizada com CamScanner

4.7 Resolução de equações e de inequações trigonométricas aplicando fórmulas trigonométricas

Exemplo 16 Resolver uma equação

Resolva a equação $\sin(3x) + \sin(2x) = 0$.

Resolução

$$\sin(3x) + \sin(2x) = 0 \iff$$

$$\iff 2 \sin\frac{5x}{2} \cos\frac{x}{2} = 0 \iff$$

$$\iff \sin\frac{5x}{2} = 0 \vee \cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\iff \frac{5x}{2} = k\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{2}{5}k\pi \vee x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Aplica-se a fórmula:
$\sin p + \sin q = 2 \sin\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2}$

16 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:
$\sin(3x) + \sin(6x) = 0$

Exemplo 17 Resolver uma equação

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\cos(5x) + \cos(3x) = \cos x$.

Resolução

$$\cos(5x) + \cos(3x) = \cos x \iff 2\cos(4x) \times \cos x - \cos x = 0 \iff$$

$$\iff \cos x\,[2\cos(4x) - 1] = 0 \iff \cos x = 0 \vee \cos(4x) = \frac{1}{2}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

17 Resolva no intervalo $[-\pi, \pi]$:

17.1 $\cos x + \cos(2x) = 0$;

17.2 $\cos x + \sin(2x) = 0$.

Exemplo 18 Resolver uma inequação

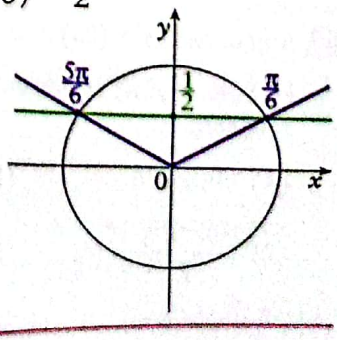
Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $\cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \leqslant \frac{1}{2}$.

Resolução

$$\cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \leqslant \frac{1}{2} \iff \cos(2x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2x\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

$$-2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leqslant \frac{1}{2} \iff \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

Observando a figura ao lado, vem:



$$-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2x + \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

ou seja, $-\frac{2\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{2\pi}{3} + k\pi \leqslant x \leqslant k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

18 Resolva no intervalo $[-\pi, \pi]$:

18.1 $\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) > \frac{3}{2}$;

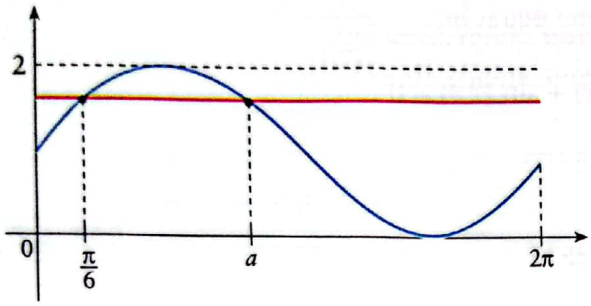
18.2 $|\sin x - \cos x| > 1$.

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Na figura está representado o gráfico da função f, definida no intervalo $[0, 2\pi]$ por:

$$f(x) = \sin x + 1 .$$



Tem-se que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f(a)$.

Qual é o valor de a ?

(A) $\frac{\pi}{6} + 1$ **(B)** $1 - \frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{3}{2}$ **(D)** $\frac{5\pi}{6}$

10 pontos

2 Para cada valor de a, a equação $\cos(ax) = 0$, $a \in \mathbb{N}$ é uma equação trigonométrica.

No intervalo $[0, 2\pi]$, pode afirmar-se:

(A) há um valor para a de modo que a equação tem cinco soluções;

(B) a equação tem sempre um número par de soluções;

(C) o número de soluções da equação é sempre um múltiplo de 4 ;

(D) para certos valores de a a equação não tem soluções.

10 pontos

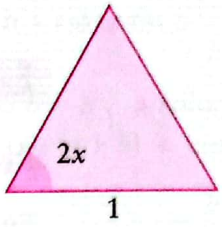
3 A equação $\sin(2x) = 0$ tem no intervalo $[-50\pi, 50\pi]$ o mesmo número de soluções da equação:

(A) $\sin x = 0$; **(B)** $2 \sin x = 0$;

(C) $\frac{\sin(2x)}{2} = 0$; **(D)** $\sin^2 x = 0$.

10 pontos

4 A figura representa um triângulo isósceles de base 1.



$2x$ é a amplitude de um dos ângulos adjacentes à base.

A medida da área do triângulo é dada por:

(A) $\frac{\tan x}{2}$;

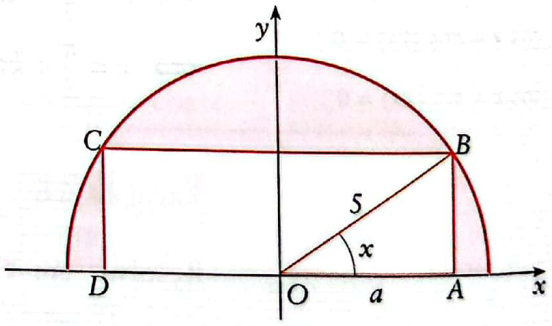
(B) $0{,}5 \tan(2x)$;

(C) $\frac{1}{4} \tan(2x)$;

(D) $\frac{2 \tan x}{4}$.

10 pontos

5 $[ABCD]$ é um rectângulo inscrito numa semicircunferência de centro O e raio 5 cm .



A e D pertencem ao eixo Ox e AB é perpendicular ao eixo Ox .

$x = A\hat{O}B$

A medida da área da parte colorida da figura é dada por:

(A) $\frac{25\pi}{2} - 25 \sin(2x)$;

(B) $50 \sin x \cos x$;

(C) $25\pi - 50 \sin(2x)$;

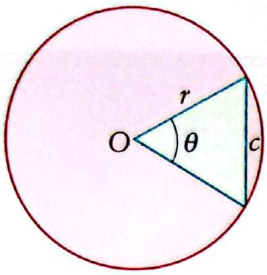
(D) $25\pi - \sin x \cos x$.

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

6 O ângulo ao centro θ define uma corda de comprimento c num círculo de raio r.



A fórmula seguinte estabelece a relação entre c, θ e r:

$$c = 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

6.1 Determine θ sabendo que $c = \sqrt{2}r$.

6.2 Escreva uma pequena composição onde explique a relação entre o comprimento dos lados de três polígonos regulares à sua escolha, e o raio do círculo onde estão inscritos.

20 pontos

7 Explique porque é que a equação $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}$ não tem soluções.

15 pontos

8 Resolva, em $[0\ ,\ 2\pi]$, as equações:

8.1 $\tan x \cos x = \tan x$;

8.2 $3 \tan^2 x = 1$.

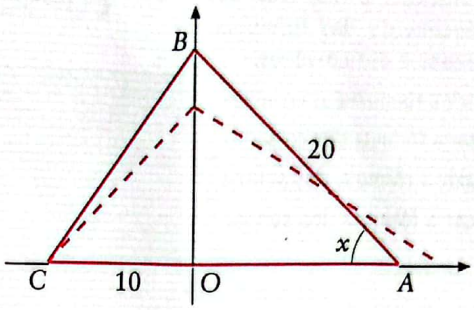
15 pontos

9 A diferença de potencial instantânea e, num dado circuito, é dada pela função $e(t) = 1{,}2 \sin t$, onde t é expresso em segundos e e em volts.

Determine, com aproximação às centésimas de segundo, o tempo t, para $0 \leqslant t \leqslant 5$, de modo que a diferença de potencial seja de 0,6 volts.

20 pontos

10 No referencial o. n. Oxy está representado o triângulo $[ABC]$.



$\overline{CO} = 10$, $\overline{AB} = 20$, $x = B\hat{A}O$ com $x \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$.

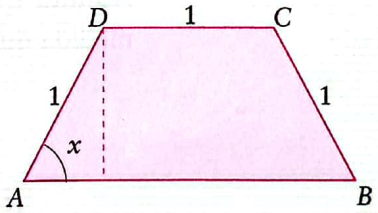
10.1 Mostre que, em função de x, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por:

$$f(x) = 100\left(\sin x + \sin(2x)\right)$$

10.2 Resolva, no intervalo $[0\ ,\ 2\pi]$, a equação $\sin x + \sin(2x) = 0$.

20 pontos

11 $[ABCD]$ é um trapézio isósceles; os lados $[AD]$, $[CD]$ e $[BC]$ têm comprimento igual a 1.



$\overline{AB} \geqslant 1$, $D\hat{A}B = x$ com $x \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

11.1 Mostre que a área do trapézio é dada por:

$$A(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \sin x$$

11.2 Determine $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando geometricamente o quadrilátero obtido.

20 pontos

12 Mostre que $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.

20 pontos

13 Resolva, no intervalo $[-\pi\ ,\ \pi]$, a equação:

$$\cos x + \sin(2x) = 0$$

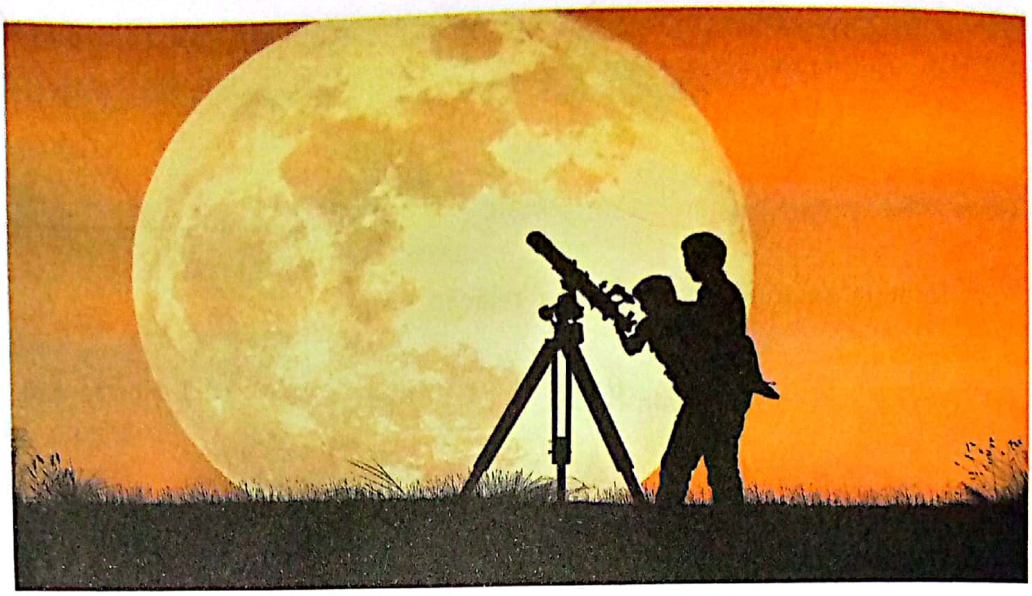
20 pontos

Digitalizada com CamScanner

Objectivos

1. Compreender o interesse do conhecimento das fórmulas dos senos e dos co-senos.
2. Deduzir a fórmula dos co-senos.
3. Aplicar a fórmula dos co-senos.
4. Deduzir a fórmula dos senos.
5. Aplicar a fórmula dos senos.

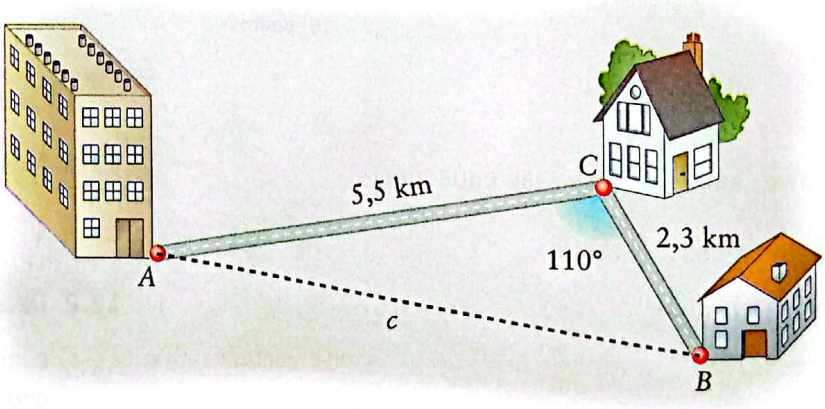
5. Resolução de triângulos. Fórmulas dos co-senos e dos senos



Na resolução de problemas da vida real usa-se muitas vezes a trigonometria.

5.1 Fórmula dos co-senos

Admita que na figura seguinte a distância de A a B não pode ser medida directamente.

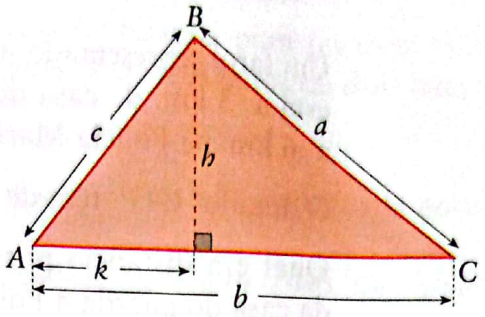


Os métodos até agora conhecidos para determinar distâncias inacessíveis não podem ser aplicados porque o triângulo $[ABC]$ não é rectângulo.

Quando foi feito o estudo da construção de triângulos foi dito que é possível construir um triângulo conhecidos os comprimentos dos três lados (LLL) ou dois lados e o ângulo por eles formado (LAL). Para estes dois casos há uma fórmula conhecida pela **fórmula dos co-senos** que pode ser utilizada na resolução de triângulos acutângulos ou obtusângulos.

Digitalizada com CamScanner

Observemos a figura seguinte.



$c^2 = h^2 + k^2$ Teorema de Pitágoras.

$h^2 = a^2 - (b-k)^2$ Teorema de Pitágoras.

$c^2 = a^2 - (b-k)^2 + k^2$ Substituir h^2 na primeira expressão.

$c^2 = a^2 - b^2 + 2bk - k^2 + k^2$

$c^2 = a^2 - b^2 + 2bk$ Adicionar e subtrair b^2.

$c^2 = a^2 + b^2 - b^2 - b^2 + 2bk$

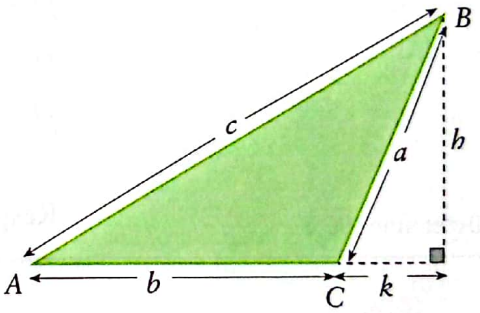
$c^2 = a^2 + b^2 - 2b\,(b-k)$ Multiplicar e dividir por a o último termo.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\left(\frac{b-k}{a}\right)$ $\frac{b-k}{a} = \cos \hat{C}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

Observemos agora a figura ao lado.

Tem-se sucessivamente:



$c^2 = h^2 + (b+k)^2$

$h^2 = a^2 - k^2$

$c^2 = a^2 - k^2 + (b+k)^2$

$c^2 = a^2 - k^2 + b^2 + 2bk + k^2$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2bk$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\left(\frac{k}{a}\right)$ $\frac{k}{a} = \cos(\pi - \hat{C}) = -\cos \hat{C}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

Em qualquer dos casos provou-se que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Por simetria, pode concluir-se a **fórmula dos co-senos.**

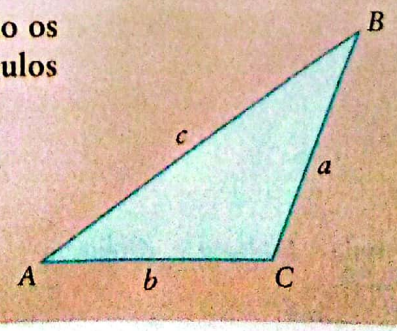
Fórmula dos co-senos

Se $[ABC]$ é um triângulo e a, b e c são os comprimentos dos lados opostos aos ângulos A, B e C, respectivamente, então:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$



Digitalizada com CamScanner

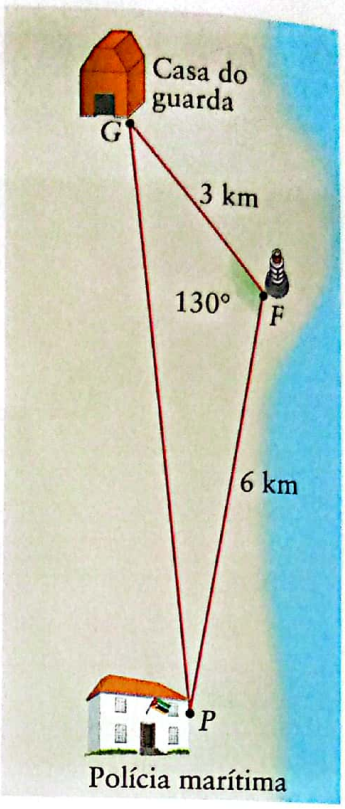
Exemplo 1 Distância por mar

Um farol representado na figura pelo ponto F, está a 3 km da casa do guarda, ponto G, e a 6 km da Polícia Marítima, ponto P.

O ângulo GFP tem de amplitude $130°$.

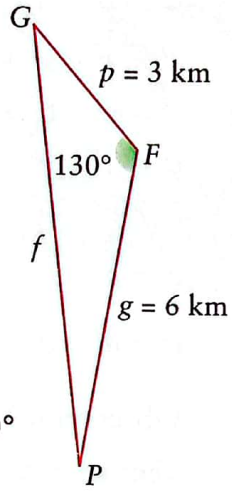
Qual é a distância por terra, em linha recta, da casa do guarda à Polícia?

Apresente a resposta com aproximação às décimas do km.



Resolução

Comecemos por fazer um esquema e assinalar os dados.



Aplicando a fórmula dos co-senos, vem:

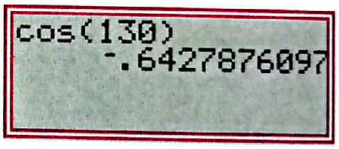
$f^2 = p^2 + g^2 - 2pg\cos\hat{F}$

Assim:

$f^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \cos 130°$

$f^2 \approx 9 + 36 + 12 \times 0{,}6427$

$f^2 \approx 52{,}7124$



$\sqrt{52{,}7124} \approx 7{,}26$

Resposta: A distância pedida é, aproximadamente, igual a 7,3 km.

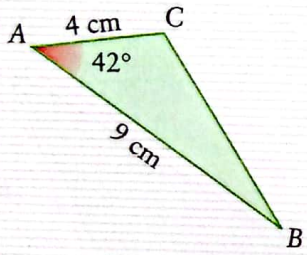
1

Na figura, $[ABC]$ é um triângulo.

$\overline{AC} = 4$ cm

$\overline{AB} = 9$ cm

$B\hat{A}C = 42°$

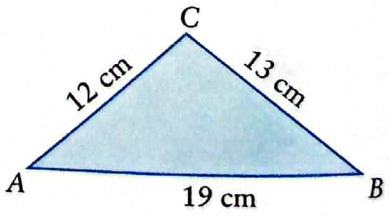


Determine $\overline{BC}$.

Exemplo 2 Determinação de um ângulo

De um triângulo conhecem-se os comprimentos dos lados: 19 cm, 13 cm e 12 cm.

Determine as amplitudes de um dos ângulos do triângulo.



Resolução

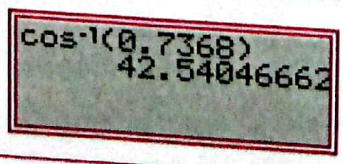
Determinação de $\hat{A}$.

Tem-se que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.

$13^2 = 12^2 + 19^2 - 2 \times 12 \times 19 \cos\hat{A} \iff \cos\hat{A} = \dfrac{12^2 + 19^2 - 13^2}{2 \times 12 \times 19}$

$\cos\hat{A} \approx 0{,}7368$

$\hat{A} \approx 42{,}5°$



2

Usando o **Exemplo 2**, determine $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Digitalizada com CamScanner

5.2 Fórmula dos senos

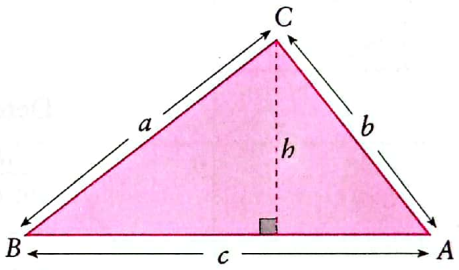
A fórmula dos co-senos é utilizada para resolver triângulos dos quais se conhecem os comprimentos de três lados ou dois lados e o ângulo por eles formado.

Contudo, a fórmula dos co-senos não é adequada para os seguintes casos:

- conhecem-se dois ângulos e um lado (ALA ou AAL);
- conhecem-se dois lados e um ângulo que não seja definido pelos lados conhecidos (LLA).

Para estes casos utiliza-se, na resolução de triângulos, a **fórmula dos senos.**

Consideremos a figura ao lado.



Tem-se sucessivamente:

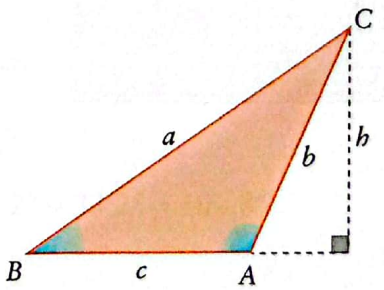
$h = a \sin \hat{B}$ $\qquad \sin \hat{B} = \dfrac{h}{a}$

$h = b \sin \hat{A}$ $\qquad \sin \hat{A} = \dfrac{h}{b}$

Logo,

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

Na figura ao lado, temos que:



$\sin \hat{A} = \sin(\pi - \alpha) = \dfrac{h}{b} \iff h = b \sin \hat{A}$

$\sin \hat{B} = \dfrac{h}{a} \iff h = a \sin \hat{B}$

Logo,

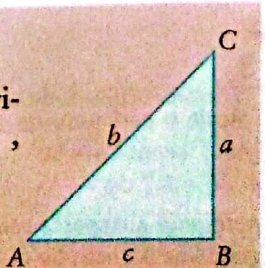
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

Por simetria, pode concluir-se a **fórmula dos senos.**

Fórmulas dos senos

Se $[ABC]$ é um triângulo e a, b e c são os comprimentos dos lados opostos aos ângulos A, B e C, respectivamente, então:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



Digitalizada com CamScanner

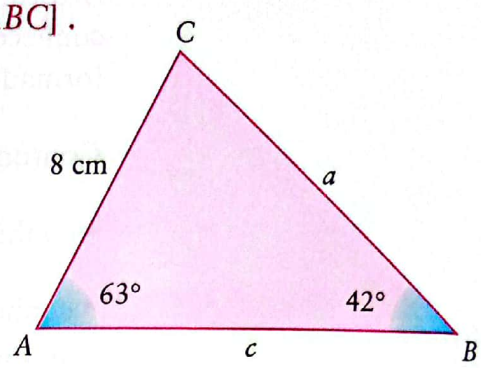
Exemplo 3 Aplicação da fórmula dos senos

A figura representa um triângulo $[ABC]$.

$\overline{AC} = 8$ cm e $\hat{A} = 63°$ e $\hat{B} = 42°$.

Determine o perímetro do triângulo $[ABC]$.

Apresente a resposta com aproximação às décimas do centímetro.



Resolução

Vamos aplicar a fórmula dos senos.

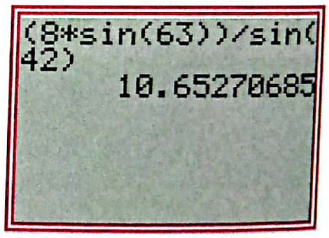
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Determinação de a:

$$\frac{a}{\sin 63°} = \frac{8}{\sin 42°} \iff$$

$$\iff a = \frac{8 \times \sin 63°}{\sin 42°}$$

$a \approx 10{,}65$ cm



Determinação de c:

Comecemos por calcular $\hat{C}$.

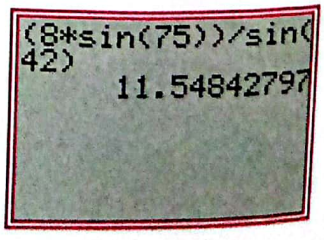
$180° - 42° - 63° = 75°$

$\hat{C} = 75°$

$$\frac{8}{\sin 42°} = \frac{c}{\sin 75°} \iff$$

$$\iff c = \frac{8 \times \sin 75°}{\sin 42°}$$

$c \approx 11{,}55$ cm



Perímetro do triângulo

$P = a + b + c$

$P \approx 10{,}65 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 11{,}55 \text{ cm} = 30{,}2 \text{ cm}$

Resposta: Com aproximação às décimas do centímetro, o perímetro do triângulo é 30,2 cm.

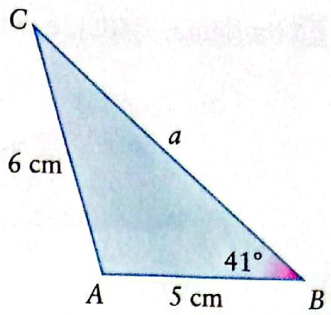
3

Calcule o perímetro do triângulo $[ABC]$ sendo $\hat{A} = 50°$, $\hat{B} = 39°$ e $\overline{AB} = 8{,}2$ cm.

Apresente a resposta com aproximação às décimas do centímetro.

Digitalizada com CamScanner

Exemplo 4 **Aplicação da fórmula dos senos**



Na figura, $[ABC]$ é um triângulo.

$\overline{AC} = 6$ cm , $\overline{AB} = 5$ cm e $\hat{B} = 41°$.

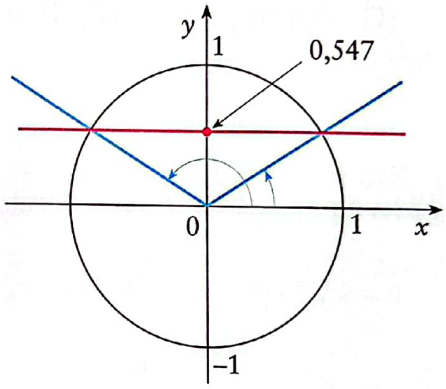
Determine, com aproximação às décimas do grau, $\hat{A}$ e $\hat{C}$.

Resolução

Neste caso são conhecidos dois lados do triângulo e um ângulo.

Nestas situações, por vezes, o problema tem mais do que uma solução.

Vejamos se é este o caso.



Determinação de $\hat{C}$:

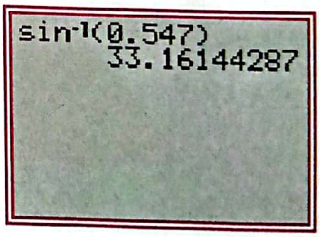
$$\frac{6}{\sin 41°} = \frac{5}{\sin \hat{C}} \iff$$

$$\iff \sin \hat{C} = \frac{5 \times \sin 41°}{6}$$

$$\iff \sin \hat{C} \approx 0{,}547$$

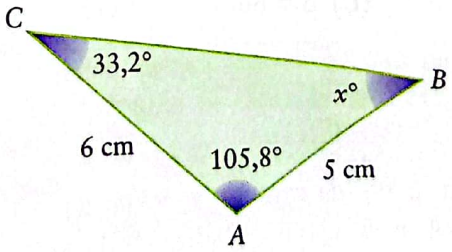
Há duas soluções para $\hat{C}$.

$\hat{C} = 33{,}2°$ ou $\hat{C} = 146{,}8°$.



Vamos averiguar se qualquer uma das soluções é possível.

- Se $\hat{C} = 33{,}2°$, então $\hat{A} = 180° - 41° - 33{,}2° - 33{,}2° = 105{,}8°$.



- Se $\hat{C} = 146{,}8°$, $\hat{A} = 180° - 41° - 146{,}8° = -7{,}8°$ o que é impossível.

Portanto, $\hat{C} = 33{,}2°$ e $\hat{A} = 105{,}8°$.

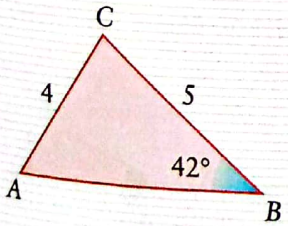
Resposta: Com aproximação às décimas do grau, $\hat{A} = 105{,}8°$ e $\hat{C} = 33{,}2°$.

4

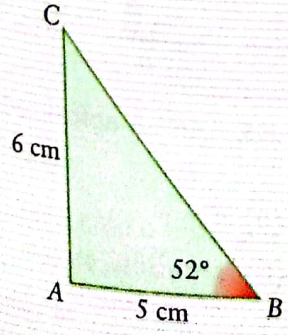
Calcule o perímetro de cada um dos triângulos.

Apresente o resultado com aproximação às centésimas do centímetro.

4.1



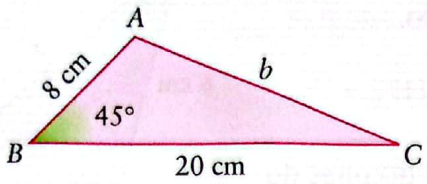
4.2



Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1 Na figura, $[ABC]$ é um triângulo.



$\overline{AB} = 8$ cm ; $\overline{BC} = 20$ cm e $\hat{B} = 45°$.

O valor mais próximo de $\overline{AB}$ é:

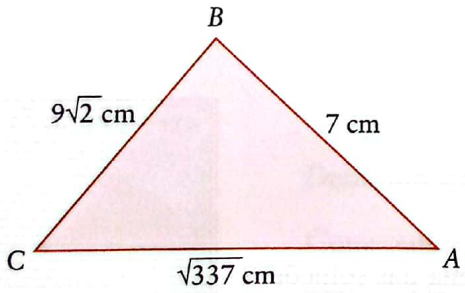
(A) 15 cm ; **(B)** 15,5 cm ;

(C) 15,4 cm ; **(D)** 16 cm .

10 pontos

2 Na figura, $[ABC]$ é um triângulo.

$a = 9\sqrt{2}$ cm , $b = \sqrt{337}$ cm e $c = 7$ cm .



Tem-se que:

(A) $\hat{B} = 45°$; **(B)** $\hat{B} = 50°$;

(C) $\hat{B} = 42°$; **(D)** $\hat{B} = 60°$.

10 pontos

3 O ponto C dista 2 km da casa A e 5 km da casa B , onde A e B estão situados em dois lados opostos de um vale. Se $\hat{C} = 120°$, a distância, em km , entre A e B é:

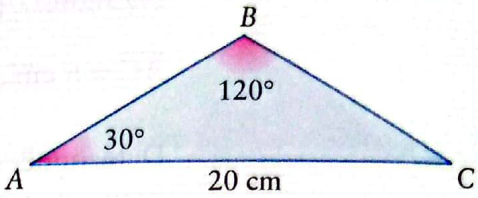
(A) 5 km ; **(B)** 6 km ;

(C) 7 km ; **(D)** 8 km .

10 pontos

4 No triângulo $[ABC]$ da figura, tem-se:

$\hat{B} = 120°$, $\hat{A} = 30°$ e $\overline{AC} = 20$ cm .



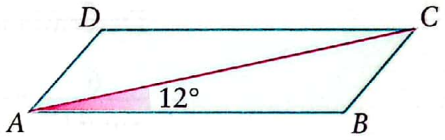
O valor mais próximo de $\overline{BC}$ é igual a:

(A) 11,6 cm ; **(B)** 11,55 cm ;

(C) 12 cm ; **(D)** 11 cm .

10 pontos

5 Na figura, $[ABCD]$ é um paralelogramo.



$B\hat{A}C = 12°$; $\overline{AD} = 4$ cm e $\overline{DC} = 10$ cm .

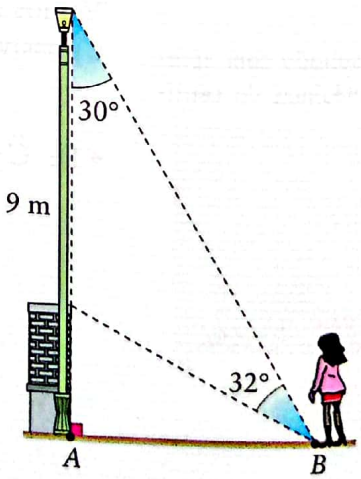
$\hat{B}$ é aproximadamente igual a:

(A) 160,7° ; **(B)** 150° ;

(C) 130° ; **(D)** 128,2° .

10 pontos

6 Observe a figura.



De acordo com os dados, $\overline{AB}$ é aproximadamente igual a:

(A) 7,5 m ; **(B)** 9 m ;

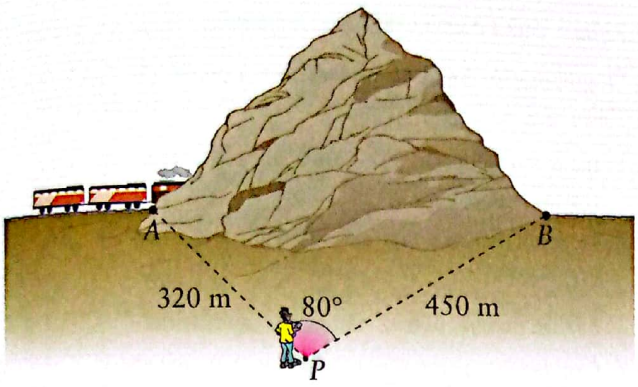
(C) 10 m ; **(D)** 12 m .

10 pontos

Digitalizada com CamScanner

QUESTÕES DE RESPOSTA ABERTA

7 Os pontos A e B são os pontos de entrada e saída de um túnel em linha recta.



De um ponto P, afastado da montanha, um observador mediu as distâncias entre P e A e P e B, sendo $\overline{PA} = 320$ m e $\overline{PB} = 450$ m.

O ângulo BPA tem de amplitude $80°$.

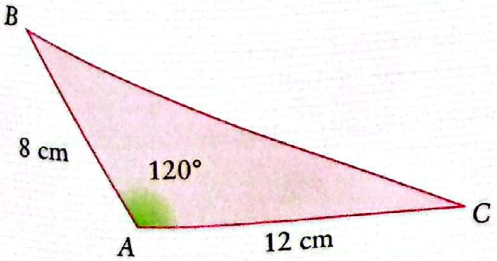
Qual é o comprimento do túnel?

Apresente o resultado com aproximação às décimas do metro.

30 pontos

8 Prova-se que para qualquer triângulo a área é dada como metade do produto do comprimento de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado.

Determine a área do triângulo $[ABC]$.



Apresente o resultado com aproximação às décimas do centímetro quadrado.

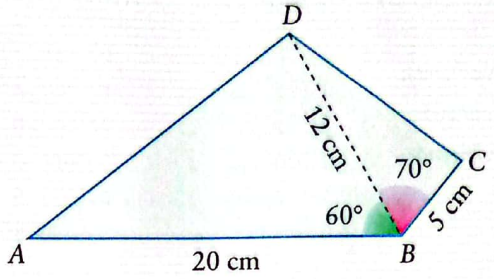
30 pontos

9 Na figura, $[ABCD]$ é um quadrilátero.

$\overline{AB} = 20$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm e $\overline{DB} = 12$ cm.

$D\hat{B}A = 60°$ e $C\hat{B}D = 70°$.

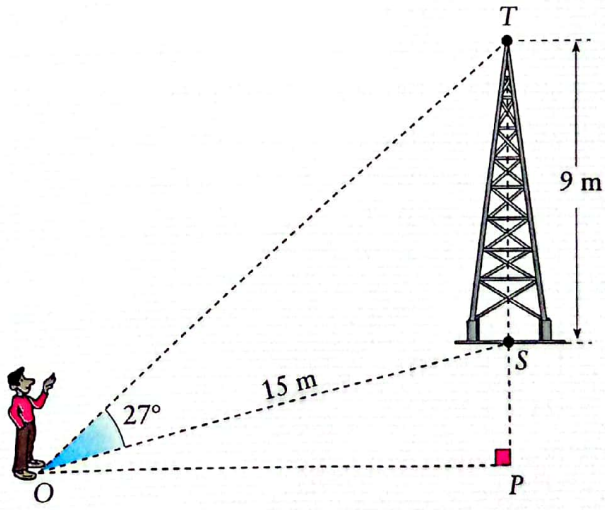
Determine a área do quadrilátero $[ABCD]$.



40 pontos

10 Uma torre de controlo está situada na vertical a 9 m do solo.

Um observador, no ponto O, está situado a 15 m da base da torre, ou seja, do ponto S.



O observador vê o cimo da torre segundo um ângulo de elevação de $27°$.

Na figura $[TP] \perp [OP]$.

10.1 Determine $\overline{OT}$.

Apresente o resultado com aproximação às décimas do metro.

10.2 Qual é a amplitude do ângulo POS?

Apresente o resultado com aproximação às décimas do grau.

40 pontos

Digitalizada com CamScanner

Soluções

1. São designações: **1.1**, **1.3**, **1.5** e **1.7**. **Pág. 9**

São proposições: **1.2**, **1.4**, **1.6** e **1.8**.

2. As proposições de **1.2**, **1.6** e **1.8** são verdadeiras enquanto que a proposição de **1.4** é falsa.

3.1 A primeira. **Pág. 10**

3.2 A primeira.

3.3 A segunda.

4.1 V; **Pág. 11**

4.2 F;

4.3 F;

4.4 V.

5. As afirmações **5.1** e **5.3** são verdadeiras.

6.1 O livro escolar não é um instrumento de trabalho. **Pág. 12**

6.2 O automóvel não é um meio de transporte.

6.3 Nem todos os alunos gostam de Matemática.

7.1 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$. **Pág. 13**

7.2 π não é um número irracional.

7.3 Nem todos os números primos são ímpares.

8.1 $2\sqrt{3}\neq\sqrt{12}$ (F);
$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ (V).

8.2 $\{1\}\not\subset\{1,2,3\}$ (F);
$\{1\}\subset\{1,2,3\}$ (V).

8.3 $2^3\neq 6$ (V);
$2^3=6$ (F).

8.4 $(2\sqrt{5})^2\neq 20$ (F);
$(2\sqrt{5})^2=20$ (V).

9.1 Falsa;

9.2 $\sqrt{\sqrt[3]{5}}\geqslant\sqrt[6]{5}$;

9.3 Verdade, visto que $\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}$.

10.1 A água é um bem essencial e a protecção do ambiente é uma responsabilidade de todos. **Pág. 14**

10.2 A água não é um bem essencial e a protecção do ambiente é uma responsabilidade de todos.

11.1 $l\wedge m$; **Pág. 15**

11.2 $l\wedge\sim m$;

11.3 $\sim l\wedge\sim m$.

12. A proposição de **11.1** é verdadeira e as proposições de **11.2** e **11.3** são falsas.

13.1 $a\dot{\vee}b$;

13.2 $\sim a\dot{\vee}\sim b$.

14.1 Ou $1+1=2$ ou a lógica é uma batata. **Pág. 16**

14.2 Ou a lógica é uma batata ou $1+1\neq 2$.

15 A proposição **14.1** é verdadeira e a proposição **14.2** é falsa.

16.1 Ou o Paulino tem 17 anos ou a Mia tem 16 anos (Falsa).

16.2 Ou o Paulino não tem 17 anos ou a Mia tem 16 anos (Verdadeira).

17.1 É falsa, porque p e q são ambas verdadeiras.

17.2 É verdadeira, porque $\sim p$ é falsa e q é verdadeira.

18.1 $p\vee q$;

18.2 $p\dot{\vee}q$;

18.3 $(p\wedge r)\vee q$.

19.1 a é verdadeira e b é falsa. **Pág. 17**

19.2.1 $5<9$ e/ou $\frac{7}{3}\neq 2\frac{1}{3}$ (V)

19.2.2 $5\geqslant 9$ e/ou $\frac{7}{3}\neq 2\frac{1}{3}$ (F)

19.2.3 $5\geqslant 9$ e/ou $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$ (V)

20.1 V. Pelo menos uma das proposições é verdadeira.

20.2 V. Pelo menos uma das proposições é verdadeira.

21.1 V;

21.2 F;

21.3 V.

22.1 $q\longrightarrow r$; **Pág. 18**

22.2 $p\longrightarrow\sim r$;

22.3 $\sim r\longrightarrow\sim q$;

22.4 $(\sim p\wedge q)\longrightarrow r$.

23.1 Se $2+2=5$, então π não é um número irracional.

23.2 Se $2+2\neq 5$, então $\sqrt{3}$ é um número irracional.

23.3 Se π e $\sqrt{3}$ são números irracionais, então $2+2\neq 5$.

23.4 Se $2+2=5$ ou $\sqrt{3}$ não é um número irracional, então π não é um número irracional.

24. As proposições são todas verdadeiras.

25.1 F;

25.2 F;

25.3 V.

26.1 Paulino estuda Matemática se e só se quer ser cientista. **Pág. 19**

26.2 Paulino estuda Matemática se e só se não quer ser jornalista.

26.3 Paulino estuda Matemática e quer ser cientista se e só se não quer ser jornalista.

Digitalizada com CamScanner

Soluções

27.1 12 é um número par se e só se $\frac{1}{3}$ é um número irracional.

27.2 12 é um número par se e só se $\sqrt{2}$ não é um número irracional.

27.3 12 não é número par se e só se $\frac{1}{3}$ e $\sqrt{2}$ são números racionais.

27.4 12 é um número par e $\sqrt{2}$ é um número racional se e só se $\frac{1}{3}$ é um número racional.

28. V, F, V e F.

29.1 V;

29.2 V;

29.3 V.

30.1

p	$\vee$	q	$\leftrightarrow$	q	$\vee$	p
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**1**	0	**1**	0	**1**	1
0	**1**	1	**1**	1	**1**	0
0	**0**	0	**1**	0	**0**	0

30.2

p	$\wedge$	V	$\leftrightarrow$	V	$\wedge$	p	$\leftrightarrow$	p
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
0	**0**	1	**1**	1	**0**	0	**1**	0

30.3

p	$\vee$	p	$\leftrightarrow$	p
1	1	1	**1**	1
0	0	0	**1**	0

31.1

$(a$	$\wedge$	$b)$	$\rightarrow$	$(a$	$\vee$	$b)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	0	**1**	1	**1**	0
0	**0**	1	**1**	0	**1**	1
0	**0**	0	**1**	0	**0**	0

31.2

b	$\rightarrow$	$(\sim$	a	$\rightarrow$	$b)$
1	**1**	0	1	1	1
0	**1**	0	1	1	0
1	**1**	1	0	1	1
0	**1**	1	0	0	0

31.3

$\sim$	$(a$	$\vee$	$b)$	$\leftrightarrow$	$(\sim$	a	$\wedge$	$\sim$	$b)$
0	1	1	1	**1**	0	1	**0**	0	1
0	1	1	0	**1**	0	1	**0**	1	0
0	0	1	1	**1**	1	0	**0**	0	1
1	0	0	0	**1**	1	0	**1**	1	0

32.

p	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\vee$	$r)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**1**	1	**0**	0	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	0
1	**1**	0	**0**	1	**1**	1	**1**	0	**1**	1	**1**	1
1	**1**	0	**0**	0	**1**	1	**1**	0	**1**	1	**1**	0
0	**1**	1	**1**	1	**1**	0	**1**	1	**1**	0	**1**	1
0	**0**	1	**0**	0	**1**	0	**1**	1	**0**	0	**0**	0
0	**0**	0	**0**	1	**1**	0	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**0**	0	**0**	0	**1**	0	**0**	0	**0**	0	**0**	0

Pág. 21

33.1 0;

33.2 0;

33.3 0.

34.1 $\sim a \vee b$;

34.2 $(\sim a \vee \sim b) \vee c$;

34.3 $a \wedge \sim b$;

34.4 $(\sim a \wedge b) \vee c$.

Pág. 22

35.1 $5 \geqslant 7 \vee 7 \geqslant 9$;

35.2 $3 \leqslant 2 \wedge 3 \leqslant -2$.

36.1 Jorge não é médico e/ou estuda Matemática.

36.2 Jorge é médico e estuda Matemática.

37.1 $a \wedge (\sim a \wedge b) \Leftrightarrow \underbrace{a \wedge \sim a} \wedge b$
$\Leftrightarrow \mathrm{F} \wedge b \Leftrightarrow \mathrm{F}$;

37.2 $a \vee (\sim a \vee b) \Leftrightarrow a \vee \sim a \vee b$
$\Leftrightarrow \mathrm{V} \vee b \Leftrightarrow \mathrm{V}$;

37.3 $a \wedge (b \vee \sim a) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge \sim a)$
$\Leftrightarrow (a \wedge b) \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow a \wedge b$;

37.4 $a \vee (b \wedge \sim a) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee \sim a)$
$\Leftrightarrow a \vee b \wedge \mathrm{V} \Leftrightarrow a \vee b$.

38. A proposição é verdadeira.

Pág. 23

39.

p	$\vee$	q	$\leftrightarrow$	$\sim$	p	$\rightarrow$	q
1	**1**	1	**1**	0	1	**1**	1
1	**1**	0	**1**	0	1	**1**	0
0	**1**	1	**1**	1	0	**1**	1
0	**0**	0	**1**	1	0	**0**	0

40.1 $\sim a \wedge \sim b$;

40.2 $a \wedge \sim b \wedge \sim c$;

40.3 $a \wedge b \wedge c$.

41. $2 \times 3 + 7 = 13$ e $5 \times (2 \times 3 + 7) \neq 60$.

Digitalizada com CamScanner

Soluções

42. $(a \longrightarrow b) \wedge (a \wedge b)$ — **Pág. 24**

$\Leftrightarrow (\sim a \vee b) \wedge (a \wedge b)$

$\Leftrightarrow (\sim a \wedge a \wedge b) \vee (b \wedge a \wedge b)$

$\Leftrightarrow F \vee (b \wedge a)$

$\Leftrightarrow b \wedge a$.

43.

$\sim$	$(a$	$\longleftrightarrow$	$b)$	$\longleftrightarrow$	a	$\dot{\vee}$	b
0	1	1	1	**1**	1	**0**	1
1	1	0	0	**1**	1	**1**	0
1	0	0	1	**1**	0	**1**	1
0	0	1	0	**1**	0	**0**	0

44.1 $2+2=5 \dot{\vee} 2+2 \neq 4$;

44.2 $2 \times 3=5 \dot{\vee} 2 \times 3+1=7$.

45.

$(p$	$\longrightarrow$	$p)$	$\longleftrightarrow$	q	$\Leftrightarrow$	p	$\vee$	q
1	1	1	**1**	1	1	1	**1**	1
1	0	0	**1**	0	1	1	**1**	0
0	0	1	**0**	1	1	0	**1**	1
0	0	0	**0**	0	1	0	**0**	0

46.1 $a \vee b$;

46.2 p;

46.3 a;

46.4 b.

49.1 $p \longrightarrow q \wedge (p \vee r)$; — **Pág. 25**

49.2 $p \longrightarrow q\ (q \longleftrightarrow q \wedge r)$;

49.3 $(p \longrightarrow \sim p \wedge q) \longleftrightarrow (p \vee q \longrightarrow \sim r \wedge q)$.

1. (D). — **Pág. 26**

2. (C).

3. (B).

4. (A).

5. (B).

6. (D).

7. (C).

8.1 $\sim r \wedge q$ — **Pág. 27**

A Olívia não é estudante e o Jeremias é pescador.

$\sim q \longrightarrow r$

Se o Jeremias não era pescador, então a Olívia era estudante.

$p \wedge q \wedge r$

O Eusébio foi futebolista e o Jeremias era pescador e Olívia era estudante.

8.2 $\sim r \wedge q$, verdadeira.

$\sim q \longrightarrow r$, verdadeira.

$p \wedge q \wedge r$, falsa.

9.1.1 $\sim a \vee b$;

9.1.2 $a \longrightarrow b \vee c$;

9.1.3 $a \wedge \sim c \longrightarrow \sim b$.

9.2 São verdadeiras.

10.1 Ordem possível de preenchimento da tabela.

$\sim$	a	$\longrightarrow$	$(\sim$	a	$\vee$	b	$\longrightarrow$	a	$\wedge$	$b)$	$\longleftrightarrow$	a
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	**1**	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	**1**	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	**1**	0
2.º	1.º	7.º	3.º	1.º	5.º	1.º	6.º	1.º	4.º	1.º		1.º

10.2 $\sim a \longrightarrow (\sim a \vee b \longrightarrow a \wedge b)$

$\Leftrightarrow a \vee (\sim a \vee b \longrightarrow a \wedge b)$

$\Leftrightarrow a \vee [(a \wedge \sim b) \vee a \wedge b]$

$\Leftrightarrow a \vee [a \wedge (\sim b \vee b)]$

$\Leftrightarrow a \vee (a \wedge V)$

$\Leftrightarrow a \vee V$

$\Leftrightarrow a$ c. q. m.

11.1 O Manuel não estuda Física nem Matemática.

11.2 O Manuel estuda Física e Matemática e não estuda Biologia.

É verdadeira a proposição $a \wedge b \wedge \sim c$.

1. São condições as expressões de **1.2**, **1.4**, **1.5**, **1.6** e **1.7**. — **Pág. 29**

2.1 $\forall x \in H$, x é mortal. — **Pág. 30**

2.2 $\forall x \in P$, x tem guelras.

2.3 $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

3.1 Todo o quadrado de um número real é não negativo.

3.2 Todo o número natural aumentado de uma unidade é maior que esse número.

3.3 Todos os peixes respiram por guelras.

3.4 Todo o número real aumentado de 4 é positivo.

3.5 Todo o número natural aumentado de 4 é positivo.

4. A afirmação que não é verdadeira é a **3.4**.

5.1 Falsa;

5.2 Verdadeira;

5.3 Verdadeira;

5.4 Verdadeira.

6.1 $x > 0$, $\forall x \in A$;

6.2 $\forall x \in A$, $x < 2x$.

7.1 $\exists x \in \mathbb{R}$, $x > 50$; — **Pág. 31**

7.2 $\exists x \in \{\text{números primos}\}$, x é par;

7.3 $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 16$;

7.4 $\exists x \in \{\text{cobras}\}$, x é venenosa.

Digitalizada com CamScanner

8.1 Existe pelo menos um número real que é solução da equação $x^2 + 3x + 2 = 0$. **Pág. 32**

8.2 Existe pelo menos um número natural que é solução da equação $x^2 + 3x + 2 = 0$.

8.3 Existe pelo menos um número real cujo quadrado aumentado de 3 é positivo.

8.4 Existe pelo menos um número real que é solução da inequação $3x - 2 < x$.

8.5 Existe pelo menos um número natural que é solução da inequação $3x - 2 < x$.

9. Verdadeiro; falso; verdadeiro; verdadeiro; falso.

10.1 Verdadeira;

10.2 Falsa;

10.3 Verdadeira.

11.1 x e y são livres. **Pág. 33**

11.2 x é muda.

11.3 x é livre e y é muda.

11.4 x é muda.

12. Proposições: **11.2** e **11.4**.

Condições: **11.1** e **11.3**.

13. {1, 2}

14.1 a) $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$;

b) $\exists x,\ y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$;

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R},\ x + y = 0$;

d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$. **Pág. 34**

14.2 Quaisquer dois números reais têm soma nula (falso).
Existem pelo menos dois números reais cuja soma é nula (verdadeiro).
Para todo o número real existe pelo menos um outro número real cuja soma com o primeiro é nula (verdadeiro).
Existe pelo menos um número real que adicionado com qualquer outro dá soma nula (falso).

15.1 Verdadeiro;

15.2 Verdadeiro.

16.1 $\exists x \in T$, x não joga futebol. **Pág. 35**

16.2 $\forall x \in T$, x não joga xadrez e/ou x não joga dominó.

16.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 \neq x - 5$;

16.4 $x \in \mathbb{N},\ |x| \geqslant 2 \wedge 2x - 5 \leqslant 0$;

17. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq 3y$.

1. (D). **Pág. 38**

2. (A).

3. (C).

4. (C).

5. (B).

6. (A).

7. (B).

8.1 $\forall x \in \mathbb{N},\ x > 0$; **Pág. 39**

8.2 $\exists x \in \mathbb{R},\ x < 0$;

8.3 $\forall x \in \mathbb{Q},\ |x| \geqslant 0$;

8.4 $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x + 6$;

8.5 $\exists x \in \mathbb{Z},\ x \in]-5, 5[$;

8.6 $\forall x \in \mathbb{Z},\ x \notin]4, 5[$.

9.1 Todo o número natural é real (verdadeiro).

9.2 Em L a conjunção é indempotente (verdadeiro).

9.3 Há pelo menos um número real cujo valor absoluto é não superior a sete (verdadeiro).

9.4 Todo o número natural é maior que o seu inverso (falso).

9.5 Há pelo menos um número real que é maior que o seu inverso (verdadeiro).

9.6 Existe pelo menos um número do intervalo $[1, 5[$ que é igual a 5 (falso)

10.1 a) Existe pelo menos um ser vivo que esteve na Lua.

b) Todo o número inteiro é igual ao seu dobro.

10.2 a) Verdadeiro;

b) Falso.

10.3 a) $\forall x \in H$, x não esteve na Lua;

b) $\exists x \in \mathbb{Z},\ x \neq 2x$.

11.1 a) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z},\ y < x$;

b) $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z},\ x < y$.

11.2 a) Verdadeiro;

b) Falso.

12.1 Falso;

12.2 Verdadeiro.

13.1 a) O produto de dois números reais existe sempre e é único.

b) Propriedade comutativa.

c) Propriedade associativa.

d) Existência de elemento neutro.

e) Existência de inverso em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

13.2 a) Verdadeiro;

b) Falso.

14.1 $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$;

14.2 $\exists u \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + u = u + x = x$;

14.3 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x = 0$.

Digitalizada com CamScanner

Soluções

Pág. 43

1.1 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, possível e determinada.

1.2 $S = \{0\}$, possível e determinada.

1.3 $S = \{\}$, impossível.

1.4 $S = \{-2\}$, possível e determinada.

1.5 $S = \{0\}$, possível e determinada.

Pág. 44

2.1 $S = \{0\}$;

2.2 $S = \left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$;

2.3 $S = \{\}$, equação impossível;

2.4 $S = \{-7, 0\}$;

2.5 $S = \{2, 5\}$.

3.1 $S = \{0\}$;

3.2 $S = \left\{\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}\right\}$;

3.3 $S = \{0, 3, 4\}$.

Pág. 45

4.1 $S = \left\{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right\}$;

4.2 $S = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$.

5.1 $\left]-\infty, -\frac{1}{6}\right[$;

5.2 $\left]-\infty, \frac{9}{7}\right[$.

Pág. 46

6.1 $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$;

6.2 $]0, 3[$;

6.3 $]-\infty, 0] \cup [6, +\infty[$.

Pág. 47

7.1 É uma expressão racional inteira porque é definida por um polinómio; g não é uma expressão racional porque a variável x figura no radicando.

7.2 a) $2(x-1)$;

b) $(x-2)(x+2)$;

c) $(1-x)(1+x)$;

d) $\left(\frac{x}{2}-7\right)\left(\frac{x}{2}+7\right)$;

e) $(x-1)(x-3)$;

f) $(x-5)(2x-1)$;

g) $x^2(x-1)$;

h) $x(x-1)(x+1)$.

7.3 a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;

b) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$;

c) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;

d) $\mathbb{R} \setminus \{-14, 14\}$;

e) $\mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$;

f) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$;

g) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;

h) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$;

i) $\mathbb{R}$;

j) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$;

k) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 5\}$;

l) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$.

Pág. 48

8.1 $\frac{-1}{x+3}$; $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$;

8.2 $\frac{1}{x-5}$; $\mathbb{R} \setminus \{5\}$;

8.3 $\frac{x(x+2)}{2}$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

8.4 x; $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$;

8.5 $\frac{5-x}{5+x}$; $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$;

8.6 $\frac{3x-2}{x(1-x)}$; $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;

8.7 $\frac{x+1}{x}$; $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$;

8.8 $x-1$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

8.9 $\frac{3x^2}{2(x^2-1)}$; $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Pág. 49

9.1 $-\frac{1}{5x^2}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

9.2 $\frac{x^2+2x}{3-x}$, $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2, 3\}$;

9.3 $\frac{2-2x}{x^2+x}$, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$;

9.4 x^2-4, $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Pág. 50

10.1 $-\frac{3x^2+3x}{2}$, $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

10.2 $\frac{3x^2-3}{x^3}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

10.3 $\frac{3x^2-15x}{5x+25}$, $\mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$;

10.4 $\frac{x+1}{x-1}$, $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 4\}$.

11.1 $\frac{x+1}{x+2}$, $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$;

11.2 $\frac{x-1}{x+1}$, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$;

11.3 $\frac{2x-1}{x-2}$, $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$;

11.4 $\frac{2x^2+7x-2}{x^2-4}$, $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$;

11.5 $\frac{3x^2+x}{(x-1)^2(x+1)}$, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;

11.6 $\frac{-2x^2+29x+21}{(2x+3)^2(2x-3)}$, $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$;

Digitalizada com CamScanner

11.7 $\frac{5x-3}{3(x-3)^2(x+3)}$, $\mathbb{R}\setminus\{-3, 0, 3\}$;

11.8 $\frac{x}{3}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

11.9 $\frac{x-4}{x^3}$, $\mathbb{R}\setminus\{-4, 0\}$;

11.10 $\frac{5}{x-1}$, $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$;

11.11 $\frac{x^2}{5(x-1)}$, $\mathbb{R}\setminus\{-1, 0, 1\}$;

11.12 $\frac{2x(x-3)}{x+3}$, $\mathbb{R}\setminus\{-3, 0\}$;

11.13 $\frac{2x-1}{2x-5}$, $\mathbb{R}\setminus\left\{-2, \frac{5}{2}, 1\right\}$.

Pág. 53

12.1 $\{-1, 1\}$;

12.2. $\{-2\}$;

12.3. $\{\}$;

12.4. $\{\}$;

12.5. $\{0\}$;

12.6. $\{\}$.

13.1. $x = 6$;

13.2. $x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$;

13.3. $x = 3$;

13.4. $x = -\frac{5}{3}$.

Pág. 55

14.1. a) $\left]-\infty, -\frac{15}{2}\right[$;

b) $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$;

c) $]3, 7[$;

d) $]-\infty, 0[\cup [3, +\infty[$;

e) $\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$;

f) $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$;

g) $]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$;

h) $\left]\frac{2}{3}, 1\right]$;

i) $]-\infty, -4[\cup \{0\} \cup]3, +\infty[$;

j) $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.

14.2 a) 11,25 cm;

b) $\left]-\infty, \frac{45}{4}\right[\cup]30, +\infty[$.

Pág. 56

1. (C).
2. (A).
3. (D).
4. (C).
5. (C).
6. (B).
7. (B).

8.1 $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; **Pág. 57**

8.2 $\mathbb{R}\setminus\{0, 9\}$.

9. Não são equivalentes porque o domínio de $A(x)$ é $\mathbb{R}\setminus\{-5, 0\}$ e o domínio de $B(x)$ é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

10.1 $\frac{-1}{4+2x^2}$, $\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$;

10.2 $\frac{x-3}{x+2}$, $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

11.1 $\frac{7x-10}{2x^2}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

11.2 $\frac{5}{x-1}$, $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$;

11.3 $\frac{x-3}{2x-5}$, $\mathbb{R}\setminus\left\{-2, \frac{5}{2}, 1\right\}$.

12.1 $S = \{\}$, equação impossível.

12.2 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

13.1 $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$;

13.2 $]-\infty, 1]$.

Pág. 59

1.1 a) $S = \{-3, 3\}$;

b) $S = \{-10, 10\}$;

c) $S = \{-10, 10\}$;

d) A equação é impossível em $\mathbb{R}$; $S = \{\}$;

e) $S = \{3\}$;

f) $S = \{-1\}$;

g) $S = \{-2\}$;

h) $S = \{0\}$;

i) $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

1.2 4,8 (1 c. d.)

1.3 O perímetro do círculo com aproximação às décimas do centímetro, é 15,7 cm.

Pág. 60

2.1 a) $5^{\frac{2}{3}}$;

b) $a^{\frac{2}{5}}$.

2.2 a) $\sqrt{3}$;

b) $\sqrt[5]{5}$;

c) $\sqrt[9]{a^5}$.

Digitalizada com CamScanner

Soluções

2.3 a) 1.º membro $= \sqrt{5} \times \sqrt{6} = 5^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{2}} = (5 \times 6)^{\frac{1}{2}} = 30^{\frac{1}{2}} = \sqrt{30}$
$=$ 2.º membro;

b) 1.º membro $= \sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{2} = 20^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = (20 : 2)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$
$=$ 2.º membro;

c) 1.º membro $= \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$
$=$ 2.º membro.

2.4 a) 3,0 (1 c. d.);

b) 4,0 (1 c. d.).

2.5 a) $4\sqrt{2}$;

b) 2;

c) $4\sqrt{2}$;

d) $2\sqrt[3]{5}$;

e) $-2\sqrt[3]{4}$;

f) 1.

3.1 a) $6\sqrt{2}$; **Pág. 62**

b) $7\sqrt{5}$;

c) 0;

d) $47\sqrt{3}$;

e) $14\sqrt{3}$;

f) $-\frac{5}{3}\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3}$.

3.2 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$;

c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$;

d) $\sqrt{2} + 1$;

e) $\sqrt{2} - 1$;

f) $\frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{15}$.

3.3 a) $\frac{\sqrt{10}}{5}$;

b) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

4.1 $D = \mathbb{R}$; **Pág. 63**

4.2 $D = [-1, +\infty[$;

4.3 $D = [-1, 1]$;

4.4 $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

4.5 $D =]-\infty, -2[\cup [1, +\infty[$.

---

5. $S = \{10\}$. **Pág. 64**

---

6. $S = \{0\}$; **Pág. 65**

7.1 $[0, +\infty[$;

7.2 $]-\infty, 3[$.

8.1 $\{1\}$; **Pág. 66**

8.2 $\{\}$;

8.3 $\{-13\}$;

8.4 $\{3\}$;

8.5 $\{1\}$;

8.6 $\{1\}$;

8.7 $\{\}$;

8.8 $\{2\}$;

8.9 $\{-1, 3\}$.

9.1 Volume da caixa $= \pi \times r^2 \times 6r = 6\pi r^3$ **Pág. 67**

Volume das três esferas $= 3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3$

Volume livre $= 6\pi r^3 - 4\pi r^3 = 2\pi r^3$

Metade do volume das três esferas $= 2\pi r^3 =$ volume da caixa que não é ocupado pelas esferas.

9.2 $1205{,}76 = 6\pi r^3$

$\Leftrightarrow r^3 = \frac{1205{,}76}{6\pi}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1205{,}76}{6\pi}} \approx 4$.

O raio da esfera é, aproximadamente, 4 cm.

---

1. (B). **Pág. 68**

2. (A).

3. (B).

4. (D).

5. (C).

6. (C).

7. (B).

8.2 5,9 cm. **Pág. 69**

9. $\begin{cases} x \approx 0{,}604 \text{ dm} \\ y \approx 9{,}927 \text{ dm} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \approx 4{,}963 \text{ dm} \\ y \approx 1{,}209 \text{ dm} \end{cases}$.

10. $x = \sqrt{80}$ m $\approx 8{,}94$ m e $y = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ m.

11.1 0,9 s;

11.2 35,75 cm (2 c. d.);

11.3 O comprimento do pêndulo de menor período é $\frac{1}{9}$ do comprimento do pêndulo de maior período.

Digitalizada com CamScanner

Pág. 70

1.1 53 pessoas;

$\begin{cases} 8x + 5 = y \\ 7x + 11 = y \end{cases}$.

1.2 a) $x = 4$ e $y = 1$;

b) $x = 5$ e $y = 4$.

Pág. 71

2.1 10 cestos;

2.2 60 pombas;

$\begin{cases} x + y = 100 \\ x + 20 = y \end{cases}$.

Pág. 73

3.1 $(2, -1, -1)$;

3.2 $(1, 2, 3)$;

3.3 $(1, -2, 0)$.

Pág. 75

4.1 $(-1, -2, 2)$;

4.2 $(1, -1, 1)$;

4.3 $(1, 0, 2)$.

Pág. 77

5.1 $(2, 0, -1)$;

5.2 $(2, 1, -1)$;

5.3 $(8, 5, 1)$.

Pág. 78

1. (B).
2. (A).
3. (A).
4. (A).
5. (C).
6. (A).

Pág. 79

7.1 $(3, 1)$ e $\left(\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}\right)$;

7.2 $(-1, 5)$ e $\left(\frac{19}{7}, -\frac{43}{7}\right)$.

8. 5 cm e 12 cm.

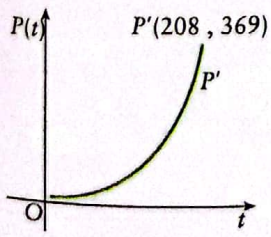
9. $\left(-\frac{1}{3}, 1, 2\right)$.

10. $(5, 7, 9)$.

11. $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$.

Pág. 85

1.1



1.2 369 mil milhões. Comentário: A população mundial prevista para 2200 é de 369 mil milhões, daí poder afirmar-se que a mesma crescerá muito rapidamente.

1.3 2134.

1.4 $P(t) = 6 \times (1{,}03)^t$, com t em anos após 1992.

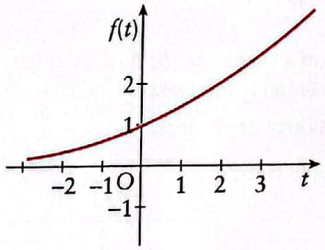
Pág. 87

2.1

t (dias)	P (milhões)
0	1
1	1,5
2	2,25
...	...
t	$1{,}5^t$

Ao fim de t dias haverá $1{,}5^t$ milhões de bactérias.

2.2



Pág. 88

3.1 $\{-2\}$;

3.2 $\{-3\}$;

3.3 $\{-1\}$.

Pág. 89

4.1 $]-4, +\infty[$;

4.2 $]-3, +\infty[$;

4.3 $]-\infty, 0]$;

4.4 $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

Pág. 90

5.1 O gráfico de $y_1 = 3^{x-2}$ obtém-se deslocando duas unidades o gráfico de $y = 3^x$ na direcção do eixo Ox (sentido positivo).

5.2 O gráfico de $y_2 = -3^{x-2}$ obtém-se do gráfico de $y_1 = 3^{x-2}$ por simetria relativamente ao eixo Ox.

5.3 O gráfico de $y_3 = 4 - 3^{x-2}$ obtém-se deslocando o gráfico de $y_2 = -3^{x-2}$ quatro unidades na direcção do eixo Oy (sentido positivo).

5.4 O gráfico de $y_4 = 3^{|x|}$ é simétrico relativamente ao eixo Oy e resulta do gráfico de $y = 3^x$ mantendo os pontos de abcissa não negativa.

5.5 Sabe-se que $3^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo o gráfico de $y = 3^x$ é igual ao gráfico de $y = |3^x|$. Daí que, o gráfico de $y_5 = -|3^x|$ seja simétrico do gráfico de $y = 3^x$ relativamente ao eixo Ox.

Pág. 91

6.1 $f(x) = 3^x$;

6.2 $f(x) = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ou $f(x) = 2^{6-x}$.

Digitalizada com CamScanner

Soluções

7. Aproximadamente 22 719 meticais. **Pág. 92**

$C = 20\,000\ e^{0,03 \times 4,25}$.

8. 0,273 g (3 c. d.) . **Pág. 93**

9.1 $P(t) = 510\ e^{0,588t}$;

9.2 $P(t) = 1113\ e^{0,66t}$.

10.1 Inicialmente havia 20 g . 10 segundos após a observação inicial já só haviam 2,71 g de composto. **Pág. 94**

10.2 Para que a quantidade de composto se reduza a metade terão de decorrer 3,47 segundos.

11.1 Três anos depois da compra, o automóvel vale aproximadamente 69,77 milhares de meticais. **Pág. 95**

11.2 $x = 5,78$

Interpretação: A um aumento de 5,78 anos corresponde uma redução do valor do automóvel para metade.

11.3 O automóvel tinha cerca de 9 anos.

12. Aproximadamente 3455 meticais.

1. (C) . **Pág. 96**

2. (D) .

3. (A) .

4. (B) .

5. (A) .

6. (B) .

7. (A) .

8. (B) .

9. (B) .

10.1 256 . **Pág. 97**

10.2

Número de dias decorridos após 1 de Julho	Número de novos doentes	Total de doentes afectados
1	3	4
2	12	16
3	48	64
4	192	256
5	768	1024

10.3 $N(t) = 4^t$;

10.4 $4^{12} = 16\,777\,216$;

10.5 10 dias .

11.1 O valor do andar é de 1 300 000 meticais.

11.2 A percentagem de valorização do andar no ano é de aproximadamente 14,3% .

11.3 Aproximadamente, 4 941 546 meticais.

12.1 Uma pessoa pode memorizar 22 símbolos em 4 minutos.

12.2 Para realizar tal tarefa precisou, aproximadamente, de 6 minutos.

1.1 6 ; **Pág. 101**

1.2 1 ;

1.3 1 ;

1.4 -4 ;

1.5 -6 ;

1.6 0 ;

1.7 $-\frac{1}{2}$;

1.8 3 ;

1.9 4 ;

1.10 $-\frac{26}{5}$.

2.1 3 ; **Pág. 102**

2.2 -2 ;

2.3 3 ;

2.4 $\frac{1}{3}$;

2.5 $\frac{1}{5}$;

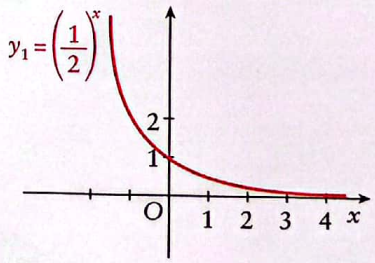
2.6 -1 ;

2.7 1 ;

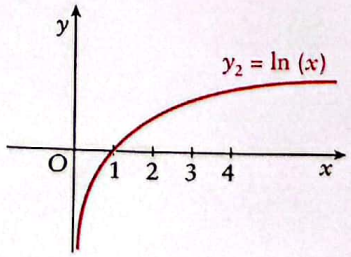
2.8 1 ;

2.9 -8 .

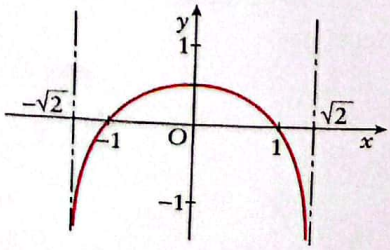
3.1 $D_{y_1} = \mathbb{R}$ **Pág. 103**



3.2 $D_{y_2} = \mathbb{R}^+$



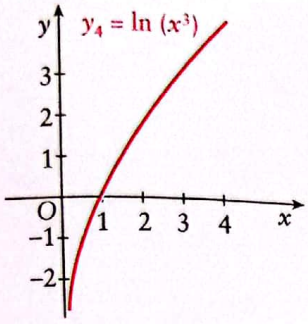
3.3 $D_{y_3} =]-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}[$



Digitalizada com CamScanner

Soluções

3.4 $D_{y_4} = \mathbb{R}^+$



Pág. 106

4.1 a) 10 ;
b) 7 ;
c) 2 ;
d) 1 ;
e) 40 ;
f) $-\frac{125}{4}$.

4.3 a) $\frac{5}{2}\ln(x)$;
b) $\ln\left(\frac{a^4}{b^3}\right)$.

Pág. 107

5.1 $S = \{243\}$;

5.2 $S = \{\sqrt{3}\}$;

5.3 $S = \{\log_2 80\}$;

5.4 $S = \{3\}$;

5.5 $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$;

5.6 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

5.7 $S = \{15\}$;

5.8 $S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$;

5.9 $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Pág. 108

6.1 a) $S = \{1\}$;
b) $S = \{0\}$;
c) $S = \{0\ ,\ \ln 2\}$.

6.2 a) $D_f = \mathbb{R}^+$;
b) $S = \varnothing$.

Pág. 110

7.1 $S = \left[\frac{2+2\sqrt{7}}{3}\ ,\ +\infty\right[$;

7.2 $S = \left[\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}\ ,\ 0\right[$.

Pág. 111

8.1 a) É a magnitude de um tremor de terra com uma amplitude igual a 1 .
b) $M = 10^{M_1 - 1} + 3$.

8.2 a) 7 ;
b) As soluções ácidas têm pH menor que 7 e as soluções alcalinas têm pH maior que 7 .

Pág. 112

9.1 Quando se iniciou a observação, o raio da mancha era de 1,78 km (2 c. d.).

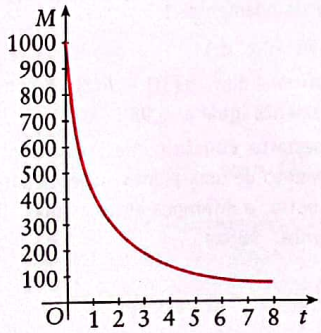
9.2 $\frac{A(t+1)}{A(t)} \approx 1{,}22$;
Este resultado permite concluir que em cada hora que passa a área do crude espalhado sobre o mar é multiplicada por $e^{0.2} \approx 1{,}22$; ou seja, a área do crude aumenta 22% por hora.

9.3 O crude chegou à praia decorridas 1,14 horas, logo, antes de o barco ser reparado.

Pág. 113

10.1 $t = 1{,}39$ (2 c. d.) ;

10.2



Pág. 114

11.1 O fenómeno foi observado por 10 pessoas.

11.2 $P(10) = 45$ (às unidades);
Interpretação: Passadas 10 horas da observação do fenómeno, o número de pessoas que tinha conhecimento do boato era, aproximadamente, igual a 45 .

11.3 $t = 13$ (às unidades)
Interpretação: Passadas 13 horas da observação do fenómeno, cerca de 60 pessoas sabiam do boato.

Pág. 115

12.1 10 litros ;

12.2 Aproximadamente 3 litros.

12.3 $G(t) = 10 - 10\log\left(\frac{10}{t+1}\right)$
$\iff G(t) = 10\log(t+1)$;

12.4 9 horas .

Pág. 116

1. (B) .
2. (D) .
3. (B) .
4. (A) .
5. (A) .
6. (B) .

Digitalizada com CamScanner

Soluções

7. (B).

8. (D).

9. (D).

10.1 No início havia cerca de 2011 plantas. **Pág. 117**

10.2 $x = 34{,}7$ (1 c. d.)

Interpretação: Passados 34,7 dias de um determinado dia t, têm-se o dobro das plantas.

11.1 Passados 5 anos da chegada dos cabritos à ilha, haverá aproximadamente 62 cabritos.

11.2 Deverão decorrer cerca de 11,55 anos.

11.3 Na ilha, o número de cabritos nunca atingirá os 200, porque sendo a exponencial sempre positiva, então $1 + 4e^{-0{,}12\,t} > 1$, logo $\frac{200}{1 + 4e^{-0{,}12t}} < 200$.

12.1 A planta tem aproximadamente 1,2 meses.

12.2 $h(3t) - h(t) \approx 0{,}98$ (2 c. d.)

Podemos assim afirmar que $h(3t) - h(t)$ é constante, sendo aproximadamente igual a 0,98.

Este resultado permite concluir que, se o tempo que decorre do crescimento de uma planta aumenta para o triplo em relação a outra, a diferença entre as suas alturas é de, aproximadamente, 98 cm.

13.1 $k = 0{,}28$ (2 c. d.);

13.2 $k = 8{,}56$ (2 c. d.);

Será necessário esperar 8,56 h para que o vinho atinja uma temperatura de 40 °F.

1.1 $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$; **Pág. 122**

1.2 $\|\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{2}$;

1.3 $\|\overrightarrow{AG}\| = 3\sqrt{3}$;

1.4 Por exemplo: $\overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{HE}$;

1.5 D;

1.6 G;

1.7 B;

1.8 H;

1.9 A;

1.10 B;

1.11 B.

2. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI}$; **Pág. 124**

b) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{EC}$;

c) $\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EG}$;

d) $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{HJ}$;

e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{EC}$;

f) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{AI}$;

g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

3.1 a) $\overrightarrow{CF}$; **Pág. 125**

b) $\overrightarrow{GC}$;

c) $\overrightarrow{NH}$;

d) $\overrightarrow{JE}$.

3.2 a) $\overrightarrow{IJ}$;

b) $\overrightarrow{OC}$;

c) $\overrightarrow{LF}$;

d) $\overrightarrow{CP}$;

e) $\overrightarrow{HO}$;

f) $\overrightarrow{OH}$.

3.3 a_1) $-2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$;

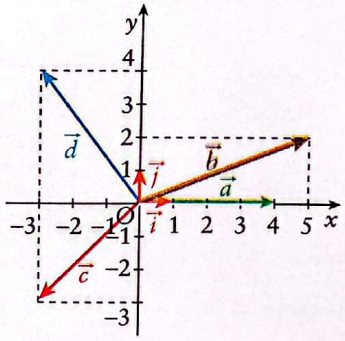
a_2) $\frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{FP}$;

a_3) $\frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HP}$;

a_4) $2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$;

b) $\overrightarrow{AM}$ é colinear com $\overrightarrow{GP}$ pois $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{GP}$;
$\overrightarrow{AM}$ é colinear com $\overrightarrow{EF}$ pois $\overrightarrow{AM} = 0{,}5\overrightarrow{EF}$;
$\overrightarrow{AM}$ é colinear com $\overrightarrow{CD}$ pois $\overrightarrow{AM} = -0{,}5\overrightarrow{CD}$.

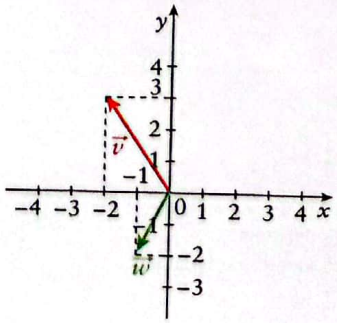
4.1 **Pág. 127**



4.2

Vector	Componentes	Coordenadas
$\vec{a}$	$4\vec{i}$ e $0\vec{j}$	$\vec{a} = (4, 0)$
$\vec{b}$	$5\vec{i}$ e $2\vec{j}$	$\vec{b} = (5, 2)$
$\vec{c}$	$-3\vec{i}$ e $-3\vec{j}$	$\vec{c} = (-3, -3)$
$\vec{d}$	$-3\vec{i}$ e $4\vec{j}$	$\vec{d} = (-3, 4)$

4.3 Por exemplo:



Digitalizada com CamScanner

Soluções

Pág. 128

5.1 a) $\overrightarrow{MN} = (-1, -5)$;

b) $\overrightarrow{NM} = (1, 5)$;

c) $\overrightarrow{NP} = (3, 3)$.

5.2 a) $M + \overrightarrow{NM} = (2, 7)$;

b) $N + \overrightarrow{MN} = (-1, -8)$;

c) $N + \overrightarrow{MP} = (2, -5)$.

Pág. 129

6. a) $\vec{a} + \vec{b} = (-1, 2)$;

b) $\vec{b} + \vec{c} = (-12, 8)$;

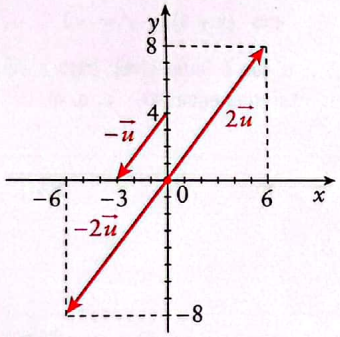
c) $(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} = (-11, 7)$;

d) $(\vec{a} + \vec{0}) + \vec{b} = (-1, 2)$;

e) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{c} = (-21, 12)$.

Pág. 130

7.1 Por exemplo:



7.2 a) $(20, -10)$;

b) $(-30, 15)$;

c) $(60, -30)$;

d) $(18, -5)$;

e) $(-77; 37{,}5)$;

f) $\left(-39, \frac{55}{2}\right)$.

Pág. 131

8.1 a) $\|\vec{u}\| = 5\sqrt{5}$;

b) $\|\vec{v}\| = \frac{\sqrt{37}}{2}$;

c) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{65}$.

8.2 Como $\vec{a} = -2\vec{b}$, conclui-se que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares.

Pág. 132

1.1 (C).

1.2 (C).

2. (B).

3. (A).

4. (B).

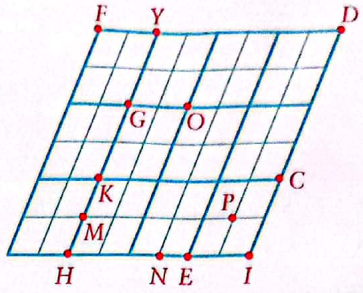
5.1 (D).

5.2 (C).

6. (A).

7.

Pág. 133



8.1 a) $\overrightarrow{OC} = 2\vec{y}$;

b) $\overrightarrow{BA} = \vec{x} - \vec{y}$;

c) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y}$.

8.2 $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}(\vec{x} - \vec{y})$;

8.3 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = \vec{y} + \frac{1}{3}(\vec{x} - \vec{y}) =$

$= \vec{y} + \frac{1}{3}\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y} = \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{2}{3}\vec{y}$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y}$

Portanto, $\overrightarrow{OH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$, logo $\overrightarrow{OH}$ é múltiplo de $\overrightarrow{OM}$.

Como $\overrightarrow{OH}$ e $\overrightarrow{OM}$ são colineares, então são paralelos e têm em comum o ponto O. Podemos, assim, concluir que O, H e M são colineares (pertencem à mesma recta).

9.1 $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se e só se existir um número real $k \neq 0$ tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.

$\vec{u} = k\vec{v} \iff (u_1, u_2) = k(v_1, v_2)$

$\iff (u_1, u_2) = (kv_1, kv_2)$

$\iff \begin{cases} kv_1 = u_1 \\ kv_2 = u_2 \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{u_1}{v_1} \\ k = \frac{u_2}{v_2} \end{cases}$

Como k tem de ser único temos que:

$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \iff u_1 \times v_2 = u_2 \times v_1$ com $v_1 \times v_2 \neq 0$ c. q. m.

9.2 a) $-1 \times 1 = 5 \times \frac{1}{5} \iff -1 = 1$ (F)

Então os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não são colineares

b) $\frac{1}{3} \times 3 = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \iff 1 = \frac{3}{3} \iff 1 = 1$ (V)

Então os vectores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ são colineares

c) $-\pi \times \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \times 2\pi \iff \frac{2\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$ (V)

Então os vectores $\vec{e}$ e $\vec{f}$ são colineares.

10.1 a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (-2, 3)$;

b) $-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

c) $3(A - D) + 2(D - A) = (5, -2)$.

Digitalizada com CamScanner

Soluções

10.2 $P_{[ABCD]} = 19{,}5$ cm (1 c. d.);

10.3 $\|\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\| = 2\sqrt{17}$;

10.4 $E \curvearrowright (0\ ,\ 3)$ ou $E \curvearrowright (0\ ,\ 1)$;

10.5 $A_{[ABCD]} = 22$ cm^2.

Pág. 135

1.1 a) $P = \left(4\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{5}\right)$ u. c.

b) $P = \left(6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}\right)$ u. c.

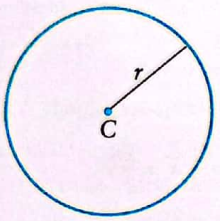
1.2 O triângulo é escaleno.

2. $y = \dfrac{2x + 19}{4}$.

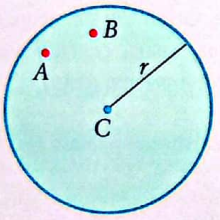
Pág. 136

3.1 Circunferência;

3.2



Circunferência de centro C e raio r é o conjunto de pontos do plano cuja distância a C é igual a r.



Círculo de centro C e raio r é o conjunto de pontos do plano cuja distância a C é menor ou igual a r. No desenho, os pontos A e B pertencem ao círculo e não pertencem à circunferência.

3.3 a) O conjunto de pontos do plano cuja distância ao ponto de coordenadas (1 , 2) é igual a 2.

b) O conjunto de pontos do plano cuja distância à origem do referencial é igual a 2.

c) O conjunto de pontos do plano cuja distância à origem do referencial é menor ou igual a 2.

Pág. 137

3.4 a) Circunferência: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$;
Círculo: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 \leqslant 4$.

b) Circunferência: $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 3$;
Círculo: $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 \leqslant 3$.

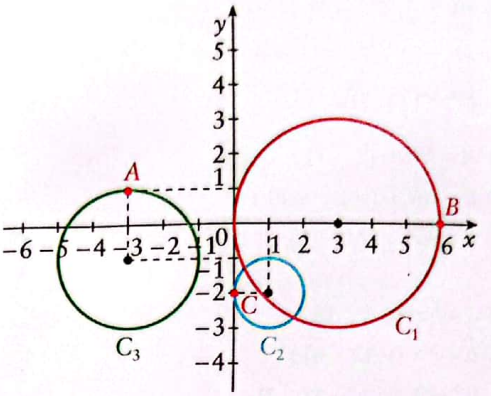
c) Circunferência: $(x + 1)^2 + y^2 = 8$;
Círculo: $(x + 1)^2 + y^2 \leqslant 8$.

3.5 a) Centro: $\left(2\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$ e raio $= \sqrt{3}$;

b) Centro: (1 , 3) e raio = 1;

c) Centro: (− 3 , 0) e raio $= \sqrt{3}$.

3.6 a)



b) O ponto A pertence a C_3 e é exterior a C_1 e C_2.
O ponto B pertence a C_1 e é exterior a C_2 e C_3.
O ponto C pertence a C_2 e é exterior a C_1 e C_3.

3.7 $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 3 = 0 \iff x^2 + 2x + 1 + y^2 = -3 \iff$
$\iff (x + 1)^2 + y^2 = -3$

Temos que $r^2 = -3$, o que é impossível, logo a equação dada não pode representar uma equação. c. q. m.

Pág. 138

4.1 $M \curvearrowright \left(\dfrac{1}{4}\ ,\ \dfrac{11}{2}\right)$;

4.2 $E \curvearrowright \left(3 - 2\sqrt{2}\ ,\ 3\right)$.

Pág. 139

5.1.1 $(x\ ,\ y) = (0\ ,\ 5) + k(-2\ ,\ 1)$, $k \in \mathbb{R}$;

5.1.2 $(x\ ,\ y) = (0\ ,\ -2) + k(-2\ ,\ 1)$, $k \in \mathbb{R}$;

5.1.3 A ordenada do ponto da recta com abcissa 7 é $\dfrac{3}{2}$, ou seja, esse ponto tem coordenadas $\left(7\ ,\ \dfrac{3}{2}\right)$.

5.2 a) $(x\ ,\ y) = (-1\ ,\ 2) + k(2\ ,\ 3)$, $k \in \mathbb{R}$;

b) $A \notin r$;

c) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

Pág. 140

6.1 a) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{3}$;

b) $y = 5x - 5$;

c) $y = x + 1$.

6.2 a) $D \curvearrowright (5\ ,\ 0)$;

b) $y = 2x - 6$ (contém a diagonal $[AC]$)
$y = -2x + 10$. (contém a diagonal $[BD]$)

Pág. 141

7. Por exemplo:

7.1 $(x\ ,\ y) = (3\ ,\ 2) + k(1\ ,\ 2)$, $k \in \mathbb{R}$;

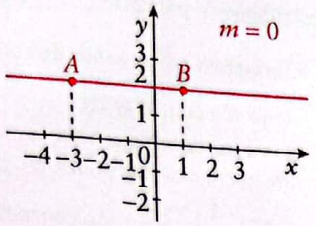
7.2 $(x\ ,\ y) = (3\ ,\ 2) + k(1\ ,\ 2)$, $k \in \mathbb{R}$;

7.3 $(x\ ,\ y) = (3\ ,\ 2) + k(1\ ,\ 2)$, $k \in [-1\ ,\ 0]$.

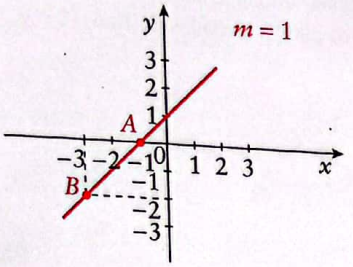
Digitalizada com CamScanner

Pág. 143

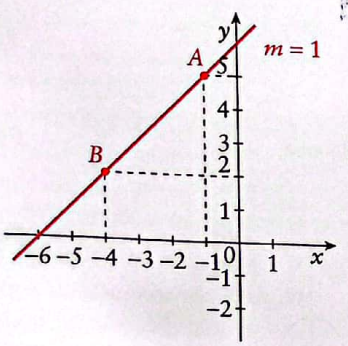
8.1 a)



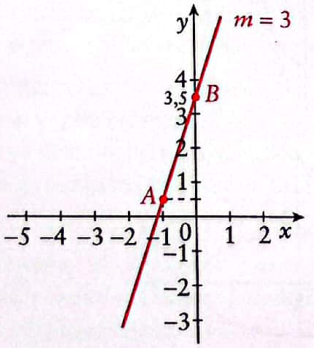
b)



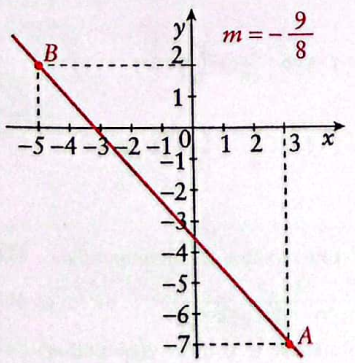
c)



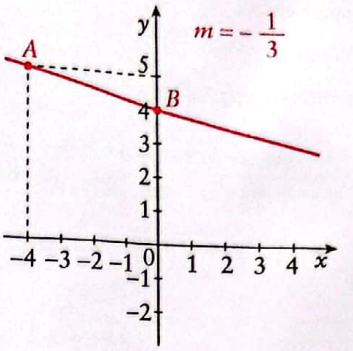
d)



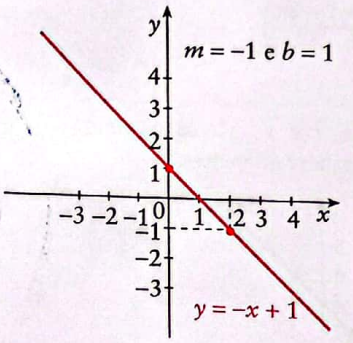
e)



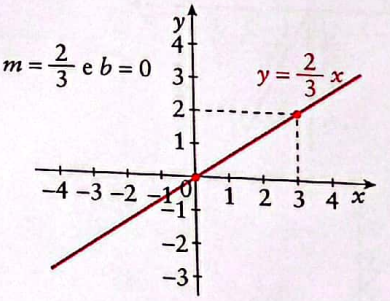
f)



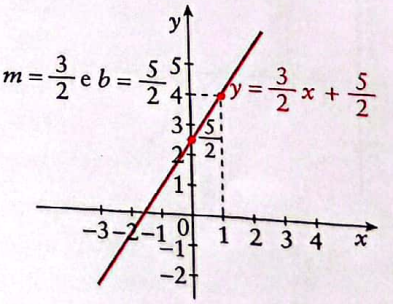
8.2 a)



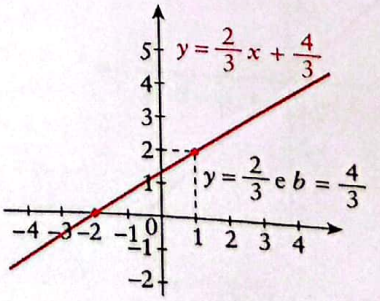
b)



c)



d)



Digitalizada com CamScanner

Soluções

8.3 **a)** O preço aumentou.

b) O preço diminuiu.

c) O preço manteve-se constante.

9.1 $y = 2x + 1$; **Pág. 144**

9.2 $y = -3x - 9$;

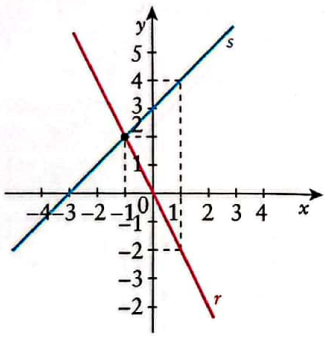
9.3 $y = -\frac{1}{2}x - 4$;

9.4 $y = -3$;

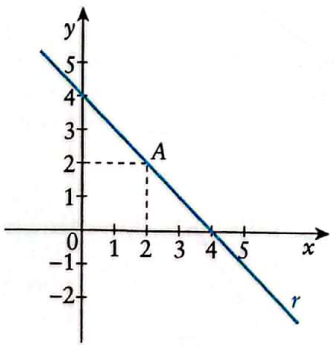
9.5 $y = -5x - 13$;

9.6 $y = -\frac{1}{2\pi}x + \left(\frac{-1-3\pi}{\pi}\right)$.

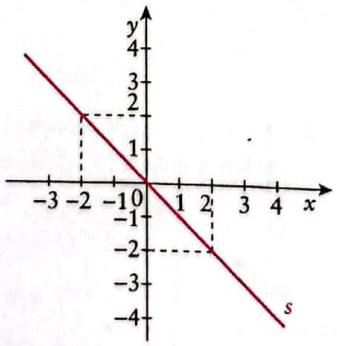
10.1 As duas rectas, r e s, são concorrentes porque têm declives diferentes. **Pág. 145**



10.2 **a)**



b)



c) $r: y = -x + 4$; $s: y = -x$.

11.1 **a)** As rectas são estritamente paralelas. **Pág. 147**

b) As duas rectas intersectam-se no ponto de coordenadas $\left(-2 - \frac{1}{\pi}, 2\right)$, logo são concorrentes.

c) As duas rectas intersectam-se no ponto de coordenadas $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{7}, \frac{2\sqrt{2}-1}{7}\right)$, logo são concorrentes.

d) As duas rectas são coincidentes. As soluções do sistema são todos os pares ordenados do tipo $(1 + y, y)$, com $y \in \mathbb{R}$.

11.2 **a)** $y = -2x + 1$;

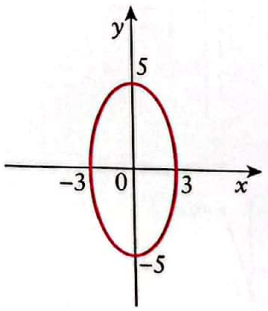
b) $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

12. $\sqrt{10}$ unidades. **Pág. 148**

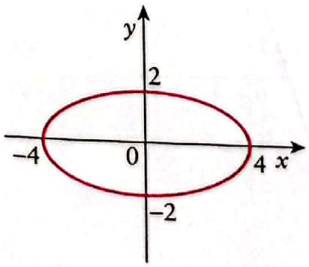
13. $d = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. **Pág. 149**

14. 2,5 unidades de área. **Pág. 150**

15.1 **a)** **Pág. 154**



b)



15.2 **a)** $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \iff \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$;

b) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

16. A explosão registou-se sobre um dos ramos da hipérbole $\frac{x^2}{115\,600} - \frac{y^2}{24\,884\,400} = 1$ de focos onde se situam os receptores A e B $(d_A - d_B = 680 \text{ m})$. **Pág. 157**

Digitalizada com CamScanner

1. (D) .
2. (C) .
3. (D) .
4. (C) .
5. (A) .
6. (C) .

Pág. 158

7.1 $(x, y) = (-1, 2) + k\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$;

7.2 $y = -3x - 1$;

7.3 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$;

7.4 $(x, y) = \left(-1, \frac{1}{2}\right) + k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R}_0^+$ ou

$(x, y) = \left(-1, \frac{1}{2}\right) + k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R}_0^-$.

Pág. 159

8.1 No referencial o. n. assinala-se o ponto dado.
Partindo desse ponto desloca-se o lápis u_1 unidades na horizontal e u_2 unidades na vertical, sendo $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vector director da recta.
Se $u_1 < 0$, desloca-se o lápis para a esquerda.
Se $u_1 > 0$, desloca-se o lápis para a direita.
Se $u_2 < 0$, desloca-se o lápis para baixo.
Se $u_2 > 0$, desloca-se o lápis para cima.

8.2 Substituindo na equação da recta dada x pela abcissa do ponto e y pela ordenada do ponto.
No caso da igualdade obtida for verdadeira o ponto pertence à recta, no caso de ser falsa o ponto não pertence à recta.

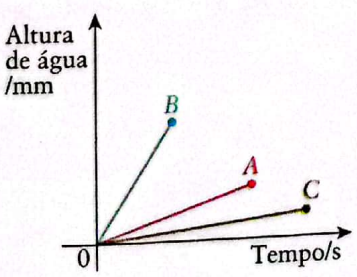
8.3 Verificando se os seus vectores directores são colineares. Caso sejam, as duas rectas são paralelas.

8.4 Substituindo na inequação dada, x pela abcissa do ponto dado e y pela ordenada.
Caso se obtenha uma desigualdade verdadeira, o ponto pertence ao semiplano considerado, caso contrário, não pertence.

9.1 A recta OB tem maior declive que a recta OA . O ângulo que a recta OB forma com a parte positiva do eixo Ox , é agudo e superior ao ângulo agudo que a recta OA forma com a mesma parte do eixo Ox .

9.2 O gráfico contido na recta OB . A altura do copo C_1 é superior à altura do copo C_2 e o copo C_1 demora o mesmo tempo a ficar cheio que o copo C_2 .

9.3



O declive é menor.

10.1 2,5 anos ;

10.2 A Ana à nascença tinha mais 10 cm que a Inês.

10.3 $y = 16x + 40$;

10.4 $y = 12x + 50$;

10.5 A Ana aos dois anos de idade media 74 cm .

10.6 A Inês aos cinco anos de idade media 1,2 metros.

11. $\left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $\left(4 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Pág. 161

1.1 $20 \cos(38°) \approx 15{,}76$;

1.2 0 ;

1.3 $51{,}46 \cos(132°) \approx -34{,}43$;

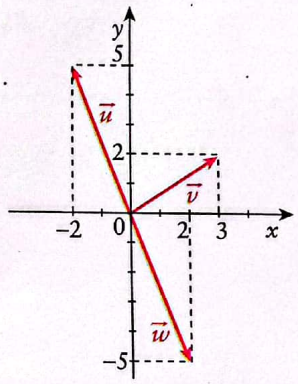
1.4 $9{,}6 \cos\left(\frac{4\pi}{5} \text{ rad}\right) \approx -7{,}77$;

1.5 -12 ;

1.6 $24 \cos(1 \text{ rad}) \approx 12{,}97$.

Pág. 164

2.1 a)



b) $\sqrt{29}$, $\sqrt{13}$ e $\sqrt{29}$;

c) 4 , -4 , -29 ;

d_1) 78,11° (2 c. d.) ;

d_2) 101,89° (2 c. d.) ;

d_3) 180° .

2.2 a_1) 19 ;

a_2) -53 ;

b) 25,35° (2 c. d.) .

2.3 a) Por exemplo: $\vec{a} = (2, -4)$, $\vec{b} = (-2, 4)$ e $\vec{c} = (4, -8)$;

b) $\vec{n} = (a, -2a)$, para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, define a família de vectores perpendiculares a $\vec{u}$.

Pág. 160

3.1 $(-6, -2)$.

3.2 a) $3x + y - 5 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$;

c) $3x + y + 5 = 0$.

3.3 a) $x - 2y + 4 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 2x - 19 = 0$;

c) $x - 2y - 1 = 0$;

d) $x - 2y = 0$.

Digitalizada com CamScanner

Soluções

4.1 a) 45° ;
b) 45° ;
c) 90° ;
d) 0° . **Pág. 167**

4.2 $\hat{A} \approx 40{,}601°$; $\hat{B} \approx 102{,}529°$; $\hat{C} \approx 36{,}870°$.

5.1 a) 108,43° (2 c. d.) ; **Pág. 168**
b) 63,43° (2 c. d.) ;
c) 153,43° (2 c. d.) ;
d) 116,57° (2 c. d.) ;
e) 0° ;
f) 90° .

5.2 a) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} + 5$;
b) $y = 1{,}56x + 6{,}56$ (2 c. d.) ;
c) $y = x + 6$;
d) $y = 0{,}27x + 5{,}27$ (2 c. d.) .

6.1. a) -1 ; **Pág. 169**
b) $\frac{1}{2}$;
c) $\frac{1}{5}$;
d) -2 ;
e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
f) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$;
g) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

6.2 $y = \frac{1}{2}x$; $y = \frac{1}{2}x + 1$; $y = \frac{1}{2}x + 2$; $y = \frac{1}{2}x - 1$; $y = \frac{1}{2}x - 2$ (por exemplo);

6.3 $y = 2x + 3$.

1. (C) . **Pág. 170**

2. (D) .

3. (D) .

4. (A) .

5. $\hat{U} \approx 59°$; $\hat{L} \approx 45°$; $\hat{A} \approx 76°$. **Pág. 171**

6. $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = 38{,}33°$.

7.1 $(\overline{MI})^2 + (\overline{IP})^2 = (\overline{MP})^2$
$\Leftrightarrow \overline{MI}^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{MI}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{4}(\overline{MI})^2 = 5$
$\Leftrightarrow \overline{MI}^2 = 4 \overset{\overline{MI}>0}{\Leftrightarrow} \overline{MI} = 2$;

7.2 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MA}$;

7.3 $\cos\alpha = \sin(90 - \alpha) = \sin(\overrightarrow{MI}\,\hat{}\,\overrightarrow{MP})$
$= \frac{\overline{IP}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

7.4 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MP} = -\|\overrightarrow{MA}\| \times \|\overrightarrow{MP}\| \cos\alpha$
$= -2 \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = -2$.

8. $-\frac{3}{2}$.

9. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
Logo, $2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

10.1 $r^2 \cos 144° \approx -0{,}81r^2$;

10.2 $-2\ell^2 \cos^2 36° \approx -1{,}31\ell^2$;

10.3 a) $\frac{6}{\cos 36°}$ cm $\approx 7{,}42$ cm ;
b) 72 ;
c) 72 .

1. 1 rad ≈ 57° 17' 45" . **Pág. 175**

2.1 a) 62° = 1,08 rad (2 c. d.) ; **Pág. 176**
b) 300° = 5,24 rad (2 c. d.) ;
c) 15° 30' = 0,27 rad (2 c. d.) ;
d) 12° 10' 13" = 0,21 rad (2 c. d.) .

2.2 a) $\frac{5\pi}{3}$ rad = 300° ;
b) $\frac{11\pi}{20}$ rad = 99° ;
c) 3,14 rad = 179,91° (2 c. d.) ;
d) 0,2 rad = 11,46° (2 c. d.) .

3. A parte do jardim decorada com flores tem aproximadamente 28,54 m² (2 c. d.) . **Pág. 177**

4.1 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. **Pág. 178**

4.2 Como $\sin\alpha$ é igual ao quociente entre a medida do cateto oposto a α e a medida da hipotenusa, então é imediato que: $0 < \sin\alpha < 1$, pois a hipotenusa é o lado de maior comprimento de um triângulo rectângulo. Para $0 < \cos\alpha < 1$, a justificação é análoga, em vez do cateto oposto, temos o adjacente.

5. $\frac{1}{16}$; **Pág. 179**

6.1 $x = 11{,}33$ m (2 c. d.) ; **Pág. 180**

6.2 $\alpha = 30°$;

6.3 $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Digitalizada com CamScanner

Soluções

7.1 O valor exacto de $\sin\alpha$ é $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. **Pág. 181**

O valor aproximado de $\sin\alpha$ é 0,98 (2 c. d.).

7.2 O valor exacto de $\tan\alpha$ é $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

O valor aproximado de $\tan\alpha$ é 0,83 (2 c. d.).

8. $\overline{AC} = 2{,}7$ km (1 c. d.). **Pág. 182**

9.1 $h = 32{,}6$ m (1 c. d.); **Pág. 183**

9.2 $h = 3{,}4$ m (1 c. d.);

9.3 $h = \frac{\tan 40° \tan 32° \, x}{\tan 40° - \tan 32°}$.

1. (D) $A_{\text{parte colorida}} = (\pi - 2)$ cm². **Pág. 184**

2. (C) $\frac{\pi}{2} + \tan x$ (u. a.).

3. (C) $A_{\triangle [OPQ]} = \frac{x^2}{4}$.

4. (B) $4 - 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

5. (A) $h_2 - h_1 = x \tan 20°$, com $x \neq 0$.

6. (A) $A_{\triangle [ABC]} = \sin\theta \cos\theta$.

7. Perímetro do pentágono $= 10r \tan 36°$, sendo r o raio do círculo. **Pág. 185**

8.1 $\overset{\frown}{AB} = \frac{10\pi}{3}$ cm;

8.2 $A = \frac{25\pi}{3}$ cm²;

8.3 $A_{\text{parte colorida}} = \left(\frac{50\pi}{3} + 6{,}25\sqrt{3}\right)$ cm².

10.1 Sabemos que um ângulo inscrito numa circunferência tem amplitude igual a metade da amplitude do arco que o contém. Como $\overset{\frown}{AB} = 180°$, porque é metade do círculo, então $A\hat{C}B = \frac{180°}{2} = 90°$.

10.3 a) $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 50 \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{3} = 12{,}5\sqrt{3}$;

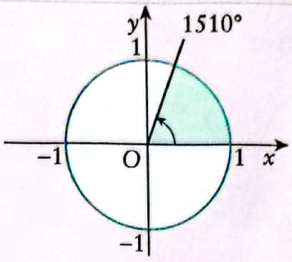
b) Com este ângulo não é possível construir o triângulo.

12. $A_{\text{jardim}} = \left(\frac{5375\pi}{72} - 100 \tan 21{,}5°\right)$ m².

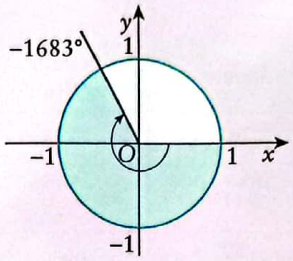
1.1 A Ana descreveu um ângulo de 3090° ou $\frac{103\pi}{6}$ radianos. **Pág. 188**

1.2 O ângulo de $\frac{103\pi}{6}$ radianos pertence ao 3.° Quadrante.

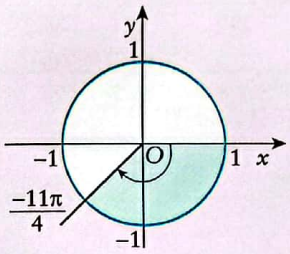
2.1 **Pág. 189**



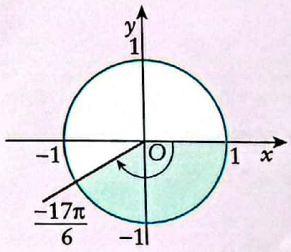
2.2



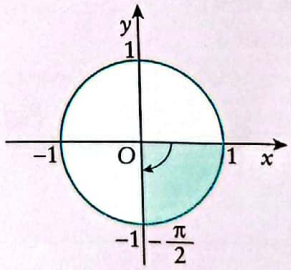
2.3



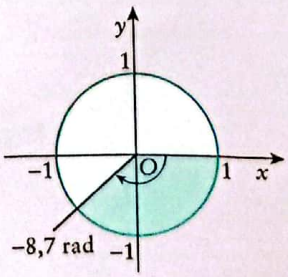
2.4



2.5



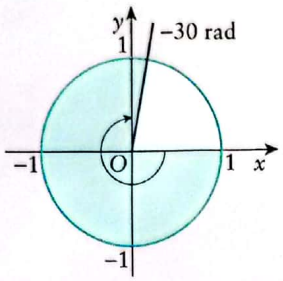
2.6



Digitalizada com CamScanner

Soluções

2.7



3.

Jogador	Ângulo	Prémio meticais
A	$-755°$	10
B	$\frac{16\pi}{3}$ rad	50 …
C	$-50°$ …	1000
D	$30°$ …	100 …
E	$60° + k \times 360°$ $k \in \{1, 2, 3\}$	50 …

Pág. 194

4.1 1;

4.2 0;

4.3 0;

4.4 -2.

Pág. 195

5.1 α pertence ao 3.° ou 4.° Q;

5.2 α pertence ao 1.° ou 4.° Q;

5.3 α pertence ao 2.° ou 4.° Q;

5.4 α pertence ao 2.°;

5.5 α pertence ao 1.° ou 2.° Q;

5.6 α pertence ao 1.° ou 2.° Q;

5.7 α pertence ao 1.° ou 3.° Q.

Pág. 198

6.1 $\frac{19 - 7\sqrt{10}}{10}$;

6.2 $\frac{9 - 10\sqrt{6}}{25}$.

Pág. 199

7.1 $A(\alpha) = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$;

7.2 $\frac{11\sqrt{15}}{4}$.

Pág. 200

1. (B).

2. (C).

3. (D).

4. (C).

5. (C).

6. (B).

7. (C).

8. (D).

Pág. 201

9.1 $1015° \in 4.°\ Q$;

9.2 $2215° \in 1.°\ Q$;

9.3 $-48° \in 4.°\ Q$;

9.4 $-6015° \in 2.°\ Q$.

10.1 0;

10.2 $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

10.3 $\frac{3}{4}$.

11.1 $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

11.2 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

12. $144° \in 2.°\ Q$.

13. $\frac{13\sqrt{2}}{12}$.

14. $x = 3\sqrt{3} \vee x = -3\sqrt{3}$.

15. $y = \frac{3\sqrt{153}}{4} \vee y = -\frac{3\sqrt{153}}{4}$.

16. No 3.° e 4.° quadrantes.

Quando $\cos x \tan x < 0$, uma vez que $\sin^2 x \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{\sin^2 x}{\cos x \tan x} < 0$, ou seja, quando o $\cos x$ tiver sinal contrário ao de $\tan x$, o que se verifica nos 3.° e 4.° quadrantes.

17. $A_{\Delta[AOB]} = \frac{\sin \alpha}{2}$.

Pág. 209

1.1 Período de f é igual a $\frac{1}{2}$;

1.2 Período de g é igual a $\frac{2\pi}{3}$;

1.3 Período de f é igual a $\frac{1}{3}$;

1.4 Período de h é igual a $\frac{\pi}{6}$;

1.5 Período de f é igual a 2;

1.6 Período de f é igual a 10;

1.7 Período de f é igual a $\frac{\pi}{2}$;

1.8 Período de f é igual a $\frac{1}{3}$.

Digitalizada com CamScanner

Soluções

2. $y = -5\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. **Pág. 213**

3. $y = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}x + \pi\right) + 4{,}5$. **Pág. 214**

1. (A). **Pág. 216**

2. (D).

3. (B).

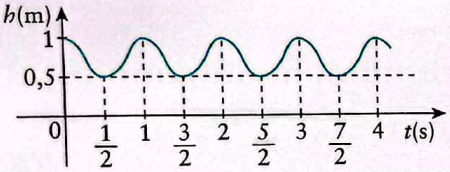
4. (B).

5. (D).

6.1 **Pág. 217**

t (s)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
h (m)	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1

6.2



7. $y = 3000\sin\left[\frac{\pi}{6}(t-9)\right] + 7000$.

8. $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) - 0{,}5$.

1.1 a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; **Pág. 220**

b) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

c) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

d) $x = -0{,}2 + 2k\pi \vee x = (\pi + 0{,}2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

1.2 a) $x = \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$;

b) No intervalo $[-\pi, \pi]$, temos como solução para os valores de x: $-\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$.

2.1 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; **Pág. 221**

2.2 $x = -\frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$;

2.3 $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

3.1 a) $-300°$; $-180°$; $-60°$; $0°$; $60°$; $180°$ e $300°$. **Pág. 222**

b) No intervalo $]-360°, 360°[$ a equação $2\sin\left(\frac{x}{3}\right) = 1$ tem a seguinte solução: $90°$.

3.2 a) 0; $\frac{2\pi}{3}$; π; $\frac{4\pi}{3}$ e 2π;

b) 0; $\frac{\pi}{2}$; π e 2π.

3.3 $-\pi$; 0 e π.

4.1 $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$; **Pág. 224**

4.2 $-\pi$; 0 e π;

4.3 $-\frac{5\pi}{8}$; $-\frac{3\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$ e $\frac{5\pi}{8}$;

4.4 $-2{,}3$; $-0{,}84$; $0{,}84$ e $2{,}3$.

5. $-360°$; $-216°$; $-120°$ e $-72°$.

6.1 A solução é 0. **Pág. 225**

6.2 Não existem soluções no intervalo $[-\pi, 0]$.

6.3 A solução é $-\frac{\pi}{2}$.

6.4 A solução é $-2{,}21$ rad.

7.1 $f(\theta) = -\frac{21}{26}$; **Pág. 228**

7.2 $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

9.1 0; **Pág. 229**

9.2 a) $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} \neq \frac{\sin^2 x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x}$;

b) $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x$.

10.1 a) $\cos 105° = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$; **Pág. 232**

b) $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;

c) $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{-\sqrt{3} + 1} = -\sqrt{3} - 2$;

d) $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

11. $f(x) = \sin x$. **Pág. 233**

12.1 $d = 25\sin(2\theta)$;

12.2 d é máximo quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad.

13.1 $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$; **Pág. 234**

13.2 $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$;

13.3 $\sqrt{2} - 1$.

Digitalizada com CamScanner

Soluções

14.1 $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

14.2 $-\frac{1}{2}$.

15.1 $\frac{1}{2}\sin(5x)+\frac{1}{2}\sin(-x)$; **Pág. 236**

15.2 $\frac{1}{2}\cos(7x)+\frac{1}{2}\cos(3x)$.

---

16. $x=\frac{2}{9}k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$. **Pág. 237**

17.1 $-\pi$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ e π;

17.2 $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$.

18.1 $S=\left\{x\in\mathbb{R}: -\frac{2\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$;

18.2 $x\in\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

---

1. (D). **Pág. 238**

2. (B).

3. (C).

4. (C).

5. (A).

6.1 $\theta=\frac{\pi}{2}+4k\pi \vee \theta=\frac{3\pi}{2}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **Pág. 239**

6.2 3 lados: $l=r\sqrt{3}$; 4 lados: $l=r\sqrt{2}$; 6 lados: $l=r$ (por exemplo).

7. $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2} \iff \sin x=2 \longrightarrow$ impossível
porque $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

8.1 As soluções da equação são 0; π e 2π.

8.2 As soluções da equação são $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

9. $t\approx 0{,}52$ segundos $\vee$ $t\approx 2{,}62$ segundos.

10.2 As soluções da equação são 0; $\frac{2\pi}{3}$; π; $\frac{4\pi}{3}$ e 2π.

11.2 $A\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ u. a.

Este resultado significa que o "trapézio" fica transformado num quadrado de lado 1.

13. As soluções são: $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$.

---

1. $\overline{BC}=6{,}60$ cm. **Pág. 242**

2. $\hat{B}\approx 38{,}6°$;
$\hat{C}\approx 98{,}9°$.

---

3. 19,6 cm. **Pág. 244**

4.1 19,91 cm; **Pág. 245**

4.2 18,60 cm.

---

1. (C). **Pág. 246**

2. (A).

3. (B).

4. (B).

5. (A).

6. (A).

---

7. 504,9 m. **Pág. 247**

8. 41,7 cm².

9. 149,1 cm².

10.1 19,3 m;

10.2 13,8°.

Digitalizada com CamScanner

Unidade temática 1 INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

Objectivos específicos O aluno deve ser capaz de:	Conteúdos	Competências básicas O aluno:
• identificar proposições; • atribuir valor lógico correcto a uma proposição; • aplicar as propriedades de negação, disjunção e conjunção; • demonstrar as propriedades através de tabelas de verdade; • interpretar as leis de De Morgan; • aplicar as Leis de De Morgan na resolução de problemas; • distinguir a expressão proposicional de uma proposição; • provar com as tabelas de verdade as propriedades de negação, conjunção e disjunção; • operar com a negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência; • aplicar quantificadores na tradução de expressões correntes em expressões quantificadas e vice-versa; • explicar o método de demonstração de teoremas por indução matemática; • aplicar os métodos de demonstração de teoremas por indução matemática.	1. **Introdução à lógica Matemática** 1.1. Noção de lógica 1.2. Proposições 1.3. Operações de negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência 1.3.1. Tabelas de verdade 1.3.2. Propriedades da negação, conjunção e disjunção 1.3.3. Leis de De Morgan 1.4. Expressões proposicionais 1.4.1. Operações de negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência 1.5. Quantificação e quantificadores 1.5.1. Existencial e universal 1.5.2. Método de indução matemática	• aplica e interpreta com rigor lógico as propriedades de negação, disjunção, conjunção e as leis de De Morgan na resolução de problemas reais; • usa quantificadores na tradução de expressões correntes em expressões quantificadas e vice-versa; • usa conhecimentos de lógica como uma via para disciplinar a mente e exercitar a capacidade de comunicar conceitos, raciocínios e ideias, com clareza e progressivo rigor.

Unidade temática 2 ÁLGEBRA

Objectivos específicos O aluno deve ser capaz de:	Conteúdos	
• identificar expressões algébricas; • classificar expressões algébricas; • determinar o domínio de existência de expressões algébricas racionais e irracionais; • operar com fracções racionais (adição, subtracção, multiplicação e divisão); • racionalizar o denominador de expressões irracionais; • resolver equações racionais e irracionais; • resolver analiticamente as inequações irracionais; • resolver sistemas de três equações lineares com três incógnitas aplicando o método de substituição, adição ordenada e Cramer;	2. **Álgebra** 2.1. Expressões algébricas 2.1.1. Noção de expressão algébrica 2.1.2. Classificação de expressões algébricas 2.1.3. Transformações algébricas 2.2. Fracções racionais 2.2.1. Noção de fracção racional 2.2.2. Domínio de existência 2.3. Operações com fracções racionais 2.3.1. Adição, subtracção e multiplicação 2.3.2. Divisão através da simplificação 2.4. Expressões irracionais 2.4.1. Noção de expressão irracional	• interpreta o significado das fórmulas no contexto de situações concretas, usando equações do 2.° e 3.° grau; • representa relações funcionais de diferentes maneiras passando de um tipo de representação para outros usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas; • decide sobre os procedimentos adequados para construir as soluções num contexto de resolução de problemas do mundo real.

Digitalizada com CamScanner

Unidade temática 2 ÁLGEBRA (Continuação)

Objectivos específicos O aluno deve ser capaz de:	Conteúdos	Competências básicas O aluno:
• resolver problemas que envolvem equações; • interpretar a solução da equação no contexto do problema apresentado.	2.4.2. Domínio de existência 2.4.3. Racionalização de denominadores de expressões algébricas irracionais 2.5. Equações 2.5.1. Equivalência de equações 2.5.2. Equações do 2.º grau (revisões) 2.5.3. Equações do 3.º grau (casos simples) 2.5.4. Equações que se reduzem a uma equação quadrática 2.5.5. Equações com radicais 2.6. Inequações irracionais 2.7. Sistema de equações lineares a: 2.7.1. duas incógnitas (revisão) 2.7.2. três incógnitas	• decide sobre os procedimentos adequados para construir as soluções num contexto de resolução de problemas do mundo real.

Unidade temática 3 EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Objectivos específicos O aluno deve ser capaz de:	Conteúdos	Competências básicas O aluno:
• identificar as equações e inequações exponenciais; • resolver gráfica e analiticamente as equações e inequações exponenciais; • resolver problemas reais da vida que envolvem equações e inequações exponenciais.	**3. Equações e inequações exponenciais** 3.1. Equação exponencial 3.1.1. Noção de equação exponencial 3.1.2. Resolução gráfica e analítica de equações 3.2. Inequação exponencial 3.2.1. Noção de inequação exponencial 3.2.2. Resolução gráfica e analítica de inequações	• resolve problemas no domínio da Matemática, da vida real e de outras áreas de conhecimento aplicando funções, equações e inequações exponenciais; • aplica conhecimentos sobre equações e inequações exponenciais como modelos matemáticos para a interpretação de situações do mundo real.

Unidade temática 4 EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Objectivos específicos O aluno deve ser capaz de:	Conteúdos	Competências básicas O aluno:
• identificar equações e inequações logarítmicas; • resolver gráfica e analiticamente as equações e inequações logarítmicas; • resolver problemas reais da vida que envolvem equações e inequações logarítmicas.	**4. Equações e inequações logarítmicas** 4.1. Noção de mantissa e característica 4.2. Co-logaritmo de um número 4.3. Noção de anti-logaritmo de um número	• resolve problemas no domínio da Matemática, da vida real e de outras áreas de conhecimento aplicando funções, equações e inequações logarítmicas; • aplica conhecimentos sobre equações e inequações logarítmicas como modelos matemáticos para a interpretação de situações do mundo real.

Digitalizada com CamScanner

Unidade temática 4 EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS (Continuação)

Objectivos específicos O aluno deve ser capaz de:	Conteúdos	Competências básicas O aluno:
	4.4. Equação logarítmica 4.4.1. Noção de equação logarítmica 4.4.2. Resolução de equações logarítmicas 4.5. Inequação logarítmica 4.5.1. Noção de inequação logarítmica 4.5.2. Resolução de inequações logarítmicas 4.5.3. Resolução de problemas concretos aplicando logaritmos	

Unidade temática 5 GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

Objectivos específicos O aluno deve ser capaz de:	Conteúdos	Competências básicas O aluno:
• aplicar vectores na resolução de problemas; • escrever as coordenadas e componentes de um vector no plano; • escrever um vector como a diferença de dois pontos; • determinar a soma de um ponto com um vector e a soma de dois vectores; • determinar o produto de um número real por um vector; • determinar a norma de um vector no plano; • determinar um vector colinear com outro vector; • resolver problemas envolvendo os conceitos norma e colinearidade entre vectores; • calcular a distância entre dois pontos; • identificar a equação da recta; • determinar o declive de uma recta; • escrever a equação da circunferência conhecido o centro e o raio; • resolver problemas envolvendo circunferências; • identificar o centro da circunferência e o raio dada a respectiva expressão analítica; • interpretar a condição de paralelismo e de perpendicularidade de duas rectas em função dos seus respectivos declives; • determinar o ponto médio de um segmento através da fórmula; • determinar os pontos de intersecção de duas rectas; • calcular a distância de um ponto a uma recta; • definir elipse e identificar os seus elementos; • escrever a equação de uma elipse com centro na origem dos eixos de coordenadas; • aplicar a equação da elipse na resolução de problemas.	**5. Geometria analítica do plano** 5.1. Aplicações de vectores 5.2. Distância entre dois pontos (com a sua demonstração) 5.3. Equação vectorial da recta no plano 5.4. Equação geral da recta 5.5. Equação reduzida da recta 5.6. Declive de uma recta 5.7. Cálculo do declive de uma recta dados dois pontos da recta 5.8. Posição relativa de rectas no plano 5.9. Condição de paralelismo e de perpendicularidade de duas rectas em função dos seus respectivos declives 5.10. Fórmula para determinar o ponto médio de um segmento e suas aplicações 5.11. Determinação de pontos de intersecção de duas rectas 5.12. Cálculo da distância de um ponto a uma recta 5.13. Equação da circunferência de centro e raio dados 5.14. Equação da elipse e da hipérbole	• usa a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações concretas da vida e na resolução de problemas geométricos, de outras áreas do conhecimento; • explorar modelos geométricos, suas propriedades e relações na resolução de problemas do dia-a-dia.

SUGESTÃO METODOLÓGICA – Nesta unidade temática é necessário abordar o tema "Produto escalar de dois vectores no plano", nomeadamente, definição, propriedades e expressão do produto escalar de vectores num referencial ortonormado.

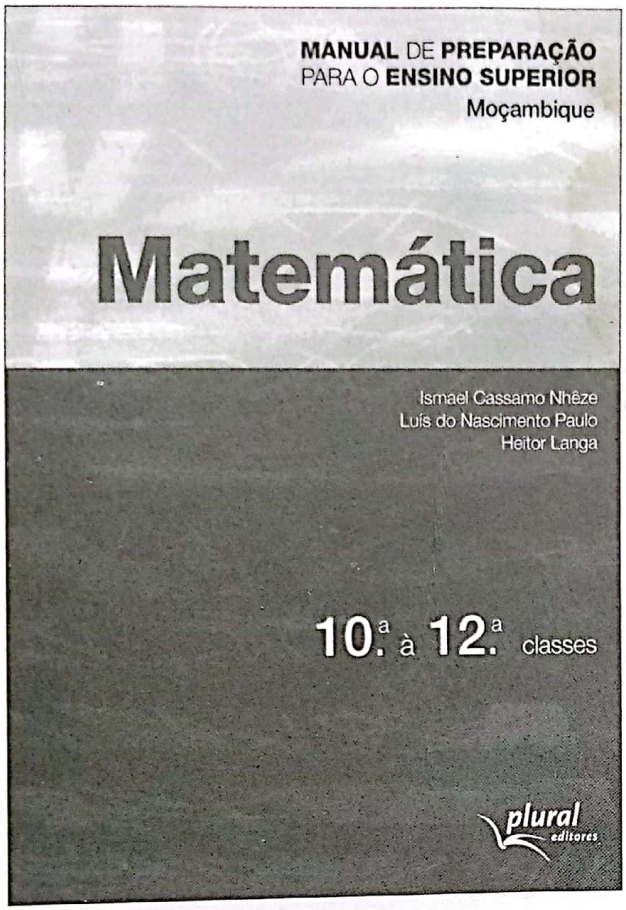
Digitalizada com CamScanner

Unidade temática 6 FUNÇÕES, EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Objectivos específicos O aluno deve ser capaz de:	Conteúdos	Competências básicas O aluno:
• identificar funções, equações e inequações trigonométricas; • representar graficamente as funções sen x, cos x, tg x, cotg x, $y = A \text{ sen } (ax + b) + B$ e $y = A \cos (ax + b) + B$, como funções reais de variável real; • identificar a periodicidade das funções trigonométricas; • interpretar a periodicidade das funções trigonométricas; • fazer o estudo completo das funções sen x, cos x, tg x, cotg x, $y = A \text{ sen } (ax + b) + B$ e $y = A \cos (ax + b) + B$; • aplicar a fórmula de seno e co-seno na resolução de problemas reais aplicando triângulos; • aplicar a fórmula da soma e diferença, ângulos duplos, bissecção de ângulos e do produto e da soma na resolução de problemas práticos da vida; • identificar as equações e inequações trigonométricas; • resolver as equações e inequações trigonométricas; • transformar a fórmula da soma num produto.	**6.** Funções e Equações trigonométricas **6.1.** Funções trigonométricas **6.1.1.** Representação gráfica das funções sen x, cos x, tg x e cotg x como funções reais de variável real **6.1.2.** Periodicidade **6.1.3.** Estudo completo das funções (domínio, contradomínio, zeros da função, variação da função, variação do sinal da função) **6.2.** Funções do tipo: $y = A \text{ sen } (ax + b) + B$; $y = A \cos (ax + b) + B$; **6.2.1.** Estudo completo das funções (domínio, contradomínio, zeros da função, variação da função, variação do sinal da função e periodicidade) **6.3.** Resolução de triângulos: fórmulas dos senos e dos co-senos **6.4.** Fórmula da soma e diferença **6.5.** Ângulos duplos **6.6.** Bissecção de ângulos **6.7.** Fórmula do produto e da soma **6.8.** Equações e inequações trigonométricas	• aplica padrões e regularidades para formular generalizações em diferentes contextos nomeadamente numéricos e trigonométricos; • interpreta tabelas de valores, gráficos, regras e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como, para passar de umas formas de representação para outras recorrendo a instrumentos adequados e a novas tecnologias; • estabelece conexões entre o que se estuda sobre a trigonometria e situações ligadas à vida (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos, etc.). • usa equações e inequações trigonométricas como meio de representar e resolver situações problemáticas, assim como, para realizar procedimentos algébricos simples.

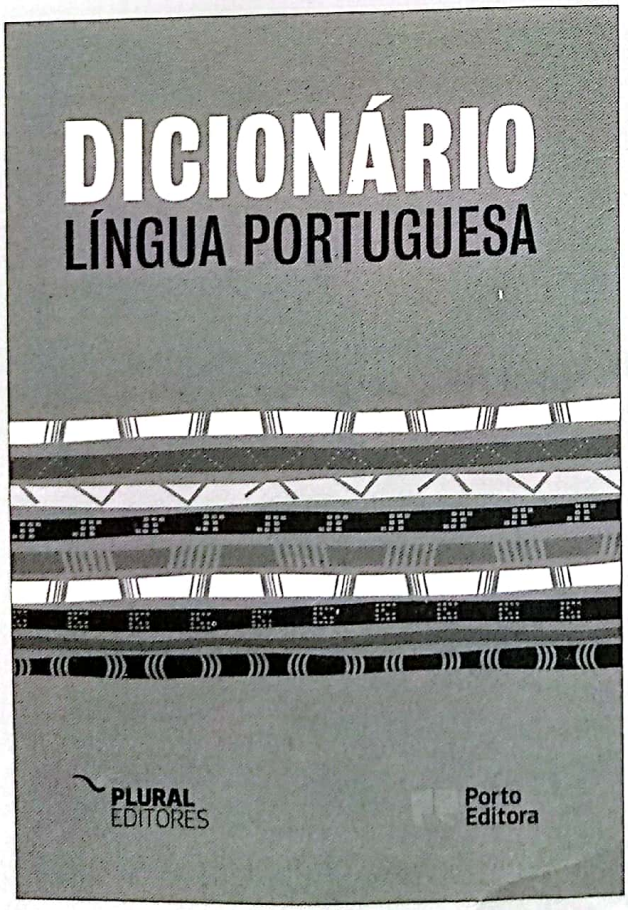
Digitalizada com CamScanner

Outros títulos de apoio



Manual de Preparação para o Ensino Superior

Esta obra foi concebida para os alunos de Matemática da 10.ª à 12.ª classes, assumindo particular importância para os estudantes que se preparam para realizar o exame de Matemática de admissão ao ensino superior.
Este livro contém resumos teóricos acompanhados de exemplos elucidativos para a resolução dos exercícios e problemas que são propostos.
Para a concepção desta obra pesquisaram-se e analisaram-se enunciados de exames de vários anos e procurou-se, através deles, ir ao encontro das maiores dificuldades que os alunos sentem.



Dicionário da Língua Portuguesa

O **Dicionário da Língua Portuguesa** é o dicionário recomendado para os estudantes do ensino secundário. Com mais de 55 000 definições de vocabulário actual e cerca de 3000 exemplos e frases idiomáticas, é uma ferramenta de trabalho e um auxiliar de estudo indispensável. É, sem dúvida, uma obra fundamental, editada pela Plural Editores/Porto Editora, especialista em Dicionários.

Digitalizada com CamScanner

11.ª classe

Matemática

Maria Augusta Ferreira Neves
Jorge Nuno Silva
Colaboração Manuel Joaquim Alves

Outros títulos disponíveis para a 12.ª classe

- Biologia
- Física
- Química
- Geografia
- TIC
- Língua Portuguesa
- Inglês
- História
- Introdução à Filosofia
- Francês

PLURAL EDITORES
www.pluraleditores.co.mz
ISBN 978-989-611-153-0
09582.50

Digitalizada com CamScanner